ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЯ В МЕТРИКЕ ХАУСДОРФА

Васил А. Попов

Хорошо известен следующий классический результат С. Н. Бернштейна [1] (см. также [2]):

Пусть дана последовательность чисел $\{A_n\}_0^\infty$, $A_n \geqq A_{n+1} \geqq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = 0$. Для каждого интервала $[a, b]$ существует непрерывная в $[a, b]$ функция f такая, что ее наилучшие приближения $E_n(f)$ алгебраическими многочленами степени n относительно равномерного расстояния

$$\rho(f, g) = \max_{x\in[a, b]} |f(x) - g(x)|$$

удовлетворяют равенства:

$$E_n(f) = A_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

Для наилучших приближении $E_n(f)_r$ функции f алгебраическими многочленами степени n в метрике Хаусдорфа Бл. Сендов [3], [4], показал, что

$$E_n(f)_r = O\left(\frac{\ln n}{n}\right) \tag{2}$$

и таким образом, если последовательность $\{A_n\}_0^\infty$ сходится к нулю медленее чем $\ln n/n$ теорема типа Бернштейна не имеет место для Хаусдорфового расстояния.

Бл. Сендов поставил в связи с этом и (2) следующий вопрос:

Пусть задана последовательность чисел $\{A_n\}_0^\infty$, удовлетворяющая условиям:

а) $0 \leqq A_n \leqq \dfrac{\ln n}{n}$,

б) $A_{n+1} \leqq A_n$.

Существует ли интервал $[a, b]$ и функция f, заданная в $[a, b]$ такая, что ее наилучшие приближения $E_n(f)_r$ алгебраическими многочленами степени n в метрике Хаусдорфа в $[a, b]$ удовлетворяют

$$E_n(f)_r = A_n,$$

Аналогично, существует ли 2π-периодическая функция f такая, что ее наилучшие приближения $E_n^T(f)_r$ тригонометрическими многочленами порядка n относительно метрики Хаусдорфа удовлетворяют

$$E_n^T(f)_r = A_n .$$

Мы покажем, что и в этом случае ответ отрицательный. Точнее иммет место

Теорема 1. Существует последовательность чисел $\{A_n\}_0^\infty$, $0 \leqq A_n \leqq \frac{\ln n}{n}$, $A_{n+1} \leqq A_n$ такая, что не существует интервал $[a, b]$ и функция f, заданная в $[a, b]$ такие, что

$$E_n(f)_r = A_n .$$

Аналогично не существует 2π-периодическая функция такая, что

$$E_n^T(f)_r = A_n .$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность $\{A_i\}_0^\infty$, заданная следующим образом: пусть $\{n_k\}$ — подпоследовательность натуральных чисел (которую определим явным образом несколько позднее) и числа A_i определяются через

$$A_i = \frac{\ln n_{k+1}}{n_{k+1}}, \text{ если } n_k \leqq i < n_{k+1}. \tag{3}$$

Очевидно эта последовательность удовлетворяет условиям а) и б).

Пусть существует интервал $[a, b]$ и функция f, наилучшие при ближения $E_n(f)_r$ которой относительно метрики Хаусдорфа в $[a, b$ удовлетворяют

$$E_n(f)_r = A_n . \tag{4}$$

В [5] показано, что существует абсолютная постоянная c (неза висящая от f) такая, что

$$E_n(f)_r \leqq c \frac{\ln_+ n\omega\left(f; \frac{1}{n}\right)}{n}, \tag{5}$$

где

$$\ln_+ x = \begin{cases} 1, & \text{если } x < e, \\ \ln x, & \text{если } x \geqq e, \end{cases}$$

а

$$\omega(f; \delta) = \sup_{|x-y| \leqq \delta} |f(x) - f(y)|$$

есть модуль непрерывности функции f в $[a, b]$.

Оценим $\omega(f;\delta)$. Полагая для краткости $\delta_k=\frac{1}{n_{k+1}-1}$, получаем:

$$\omega(f;\delta_k)=\sup_{|x-y|\leq\delta_k} f(x)-f(y)$$

$$\leq \sup_{|x-y|\leq\delta_k+\frac{2\ln n_{k+1}}{n_{k+1}}} |p_{n_k}(x)-p_{n_k}(y)|+2\frac{\ln n_{k+1}}{n_{k+1}}$$

(6) $$\leq c_1\frac{(b-a)n_k^2\ln n_{k+1}}{n_{k+1}}.$$

Здесь p_{n_k} — многочлен наилучшего хаусдорфового приближения степени n_k, т. е.

$$E_{n_k}(f)_r=r(f,p_{n_k}),$$

а постоянная c_1 зависит только от максимума функции f.

Из (5) и (6) следует сразу

$$En_{k+1}-1(f)_r\leq c_2\frac{\ln_+(n_{k+1}-1)\frac{c_1(b-a)n_k^2\ln n_{k+1}}{n_{k+1}}}{n_{k+1}-1}$$

(7) $$\leq c_3\frac{\ln_+(n_k\ln n_{k+1})}{n_{k+1}}.$$

Здесь c_3 — абсолютная постоянная.

Выберем теперь n_k так, чтобы

(8) $$\ln(n_k\ln n_{k+1})=o(\ln n_k).$$

Это возможно, если положить например

$$n_1=2,\quad n_{k+1}=(n_k)^k.$$

Тогда очевидно

$$\ln(n_k k\ln n_k)=o(k\ln n_k).$$

Из (7) и (8) следует, что для больших n_{k+1} имеет место неравенство

$$En_{k+1}-1(f)_r<\frac{\ln n_{k+1}}{n_{k+1}}=An_{k+1}-1,$$

что противоречит

$$En_{k+1}-1(f)_r=An_{k+1}-1.$$

Тригонометрический случай рассматривается вполне аналогично. Теорема доказана.

Отметим теперь, что Бл. Сендов получил свою оценку (2) не только для приближения функции в метрике Хаусдорфа, но и для приближения более общих точковых множеств, которые принадлежат к классу F_Δ. Напомним, что класс F_Δ состоит из всех ограниченных точковых множеств в плоскости, которые выпуклы относительно оси y, замкнуты и их проекция на оси x совпадает с интервалом Δ.

Покажем теперь, что если для $F \in F_\Delta$ выполнено

$$E_n(F)_r = A_n, \quad n=0, 1, 2, \ldots,$$

где последовательность $\{A_n\}_0^\infty$ определяется из (3) и (8), то F есть непрерывная на Δ функция.

Действительно, для любых точек $(x_1, y_1) \in F, (x_2, y_2) \in F, |x_1 - x_2| \leq \delta_k = \frac{1}{n_{n+1}-1}$ имеет место

$$|y_1 - y_2| \leq c \frac{|\Delta| n_k^2 \ln n_{k+1}}{n_{k+1}}$$

см. (6)), и следовательно F — непрерывная на Δ функция.

Из этого и теоремы 1 следует, что для последовательности типа (3), (8) не существует интервал Δ и $F \in F_\Delta$ такие, что $E_n(F)_r = A_n$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бернштейн, С. Н.: Об обратной задаче теории наилучшего приближения непрерывных функций. Собрание сочинений, т. II, 292—294.
2. Натансон, И. П.: Конструктивная теория функций. Москва, 1949.
3. Сендов. Бл.: Апроксимиране на функции с алгебрични полиноми по отношение на една метрика от хаусдорфов тип, Год. на Соф. унив, Физ.-мат. фак., 55 (1962) 1—39.
4. Сендов,: Бл. Некоторые вопросы теории приближении функций и множеств в метрике Хаусдорфа, УМН, т. XXIV, вып. 5 (149), 1969, 141—178.
Постъпила на 16. XI. 1971 г.

ON THE CONVERSE PROBLEM OF THE THEORY OF APPROXIMATION IN THE HAUSDORFF'S METRIC

V. A. Popov

(SUMMARY)

In the paper a sequence $\{A_n\}_0^\infty$, is constructed satisfying the condition:

I) $0 \leq A_n \leq \ln n/n$;

II) $A_{n+1} \leq A_n$

such that there does not exist a function f and an interval $[a, b]$ with

$$E_n(f)_r = A_n, \quad n=0, 1, 2, \ldots,$$

where $E_n(f)_r$ is the best approximation of the function f by algebraical polynomials of n-th degree in the Hausdorff's metricin $[a, b]$.