

АПРОКСИМИРАНЕ НА НЕПРЕКЪСНАТИ ФУНКЦИИ ЧРЕЗ ДРОБНО-РАЦИОНАЛНИ ФУНКЦИИ ОТНОСНО ЕДНА Δ-МЕТРИКА ОТ ХАУСДОРФОВСКИ ТИП

Андрей Андреев и Васил А. Попов

В тази работа ще разгледаме въпроса за приближение на непрекъснати функции чрез дробни рационални функции относно дефинираното в [4] „ h -разстояние“, което е Δ -метрика от хаусдордовски тип в пространството C_Δ (C_Δ означава множеството от всички непрекъснати функции в крайния интервал $\Delta = [a, b]$). Ще покажем, че класическите резултати за съществуване, единственост и характеризация на дробно-рационална функция на най-добро приближение за дадена непрекъсната функция относно равномерното разстояние се явяват като граничен случай от разглеждания.

Ако $f(x)$ и $g(x) \in C_\Delta$, то с $h_k(f, g)$ и $\rho(f, g)$ ще означаваме:

$$(1) \quad h_k(f, g) = \max_{y \in \Delta} \min_{x \in \Delta} \max \left[\frac{1}{k} |x - y|, \frac{|f(x) - g(y)|}{|x - y|} \right], \quad k > 0,$$

$$(2) \quad \rho(f, g) = \max_{x \in \Delta} |f(x) - g(x)|.$$

Очевидно $\lim_{k \rightarrow 0} h_k(f, g) = h_0(f, g) = \rho(f, g)$.

Да означим с $T_{m,n}$ множеството на всички функции от вида

$$s(x) = \frac{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n}{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m},$$

където $a_0, a_1, \dots, a_m, b_0, b_1, \dots, b_n$ са реални числа, а функцията $s(x) \in C_\Delta$ и $s(x) > 0$ за всяко $x \in \Delta$.

За функция $f(x) \in C_\Delta$ и всяко $k \geq 0$ най-добро приближение на $f(x)$ чрез елементи от $T_{m,n}$ ще наричаме числото

$$E_{m,n}(f; k) = \inf_{P \in T_{m,n}} h_k(f, P)$$

при $k=0$ под $E_{m,n}(f; 0)$ ще разбираме

$$E_{m,n}(f; 0) = E_{m,n}(f) = \inf_{P \in T_{m,n}} \rho(f, P).$$

При така направените означения в сила е следната

Теорема 1. За всяка функция $f(x) \in C_A$ и всяко $k \geq 0$ съществува функция $P(x) \in T_{m,n}$ такава, че $E_{m,n}(f; k) = h_k(f, P)$.

Доказателството на теоремата следва веднага от компактността на равномерно ограниченните функции от $T_{m,n}$ на интервала Δ .

Използвайки теорема 1, получаваме

$$\lim_{k \rightarrow 0} E_{m,n}(f; k) = E_{m,n}(f),$$

т. е. $E_{m,n}(f; k)$ е непрекъсната функция на k в точката 0.

Следната теорема показва, че критерият на Колмогоров за характеризация на функциите на най-добро приближение е приложим за „ h -разстоянието“.

Теорема 2. Нека $f(x) \in C_A$, $P(x) \in T_{m,n}$, $k \geq 0$ и фиксирано, и с A означим множеството от онези точки $x \in \Delta$, за които

$$\min_{y \in A} \max \left[\frac{1}{k} |x-y|, |f(y)-P(x)| \right] = h_k(f, P).$$

Необходимо и достатъчно условие функцията $P(x)$ да удовлетворява условието $E_{m,n}(f; k) = h_k(f, P)$ е за всяка функция $Q(x) \in T_{m,n}$ да съществува поне една точка $x_0 \in A$, така че

$$(f(x_0) - P(x_0))(Q(x_0) - P(x_0)) \leq 0.$$

Достатъчност. Нека $Q(x) \in T_{m,n}$ е произволна функция, отлична от $P(x)$. От условието на теоремата следва съществуването на точка $x_0 \in A$, така че

$$(3) \quad (f(x_0) - P(x_0))(Q(x_0) - P(x_0)) \leq 0.$$

Ако за определеност допуснем $f(x_0) > P(x_0)$, то от (3) получаваме

$$f(x_0) > P(x_0) \geq Q(x_0).$$

Последните неравенства заедно с лема 5 от [4] водят до

$$h_k(f, P) \leq h_k(f, Q).$$

Необходимост. Да допуснем, че условието на теоремата не е изпълнено, т. е. в сила е $E_{m,n}(f; k) = h_k(f, P)$, но съществува поне една функция $Q(x) \in T_{m,n}$, така че за всички точки от A е в сила

$$(4) \quad (f(x) - P(x))(Q(x) - P(x)) > 0.$$

На всяка точка $x \in A$ съпоставяме число $\delta_x > 0$, така че за всяко $y \in [x - \delta_x, x + \delta_x]$ от (4) да следва

$$(5) \quad \begin{aligned} f(y) - P(y) &> 0, \quad Q(y) - P(y) > 0, \quad \text{ако } f(x) - P(x) > 0, \\ f(y) - P(y) &< 0, \quad Q(y) - P(y) < 0, \quad \text{ако } f(x) - P(x) < 0. \end{aligned}$$

Да означим с B и B следните подмножества от точки на Δ :

$$B = \left(\bigcup_{x \in A} [x - \delta_x, x + \delta_x] \right) \cap \Delta, \quad B = \Delta \setminus B.$$

От определението на B и B следва съществуването на $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$, такива, че

$$(6) \quad \begin{aligned} \max_{x \in B} \min_{y \in A} \max \left[\frac{1}{k} |x - y|, |f(y) - P(x)| \right] &< E_{m,n}(f; k) - \varepsilon, \\ \min_{x \in B} |f(x) - P(x)| &= \eta. \end{aligned}$$

Да образуваме дробно-рационалната функция

$$R(x) = s(x) - \frac{(1-\lambda)P_1 + \lambda Q_1}{(1-\lambda)P_2 + \lambda Q_2}, \quad h > 0,$$

където

$$P(x) = \frac{P_1(x)}{P_2(x)}, \quad Q(x) = \frac{Q_1(x)}{Q_2(x)},$$

$P_1(x)$ и $Q_1(x)$ са полиноми най-много от степен n , а $P_2(x)$ и $Q_2(x)$ са полиноми от степен, не по-висока от m .

Очевидно $R(x) \in T_{m,n}$ за всяко $\lambda > 0$. От (5) следва, че за всяко $x \in B$ и всяко $\lambda > 0$ са изпълнени неравенствата

$$(7) \quad \lambda(P_2Q_1 - Q_2P_1) > 0, \quad \text{ако } f(x) > P(x),$$

$$(8) \quad \lambda(P_2Q_1 - Q_2P_1) < 0, \quad \text{ако } f(x) < P(x).$$

Но (7) и (8) са еквивалентни на

$$\frac{(1-\lambda)P_1 + \lambda Q_1}{(1-\lambda)P_2 + \lambda Q_2} > \frac{P_1}{P_2}, \quad \text{ако } f(x) > P(x),$$

$$\frac{(1-\lambda)P_1 + \lambda Q_1}{(1-\lambda)P_2 + \lambda Q_2} < \frac{P_1}{P_2}, \quad \text{ако } f(x) < P(x).$$

От последните неравенства, от (6) и от непрекъснатостта на $R(x)$ по λ следва съществуването на $\lambda_1 > 0$, така че за всяко $\lambda \in (0, \lambda_1)$

$$(9) \quad P(x) < R(x) < P(x) + \eta, \quad \text{ако } x \in B, \quad f(x) > P(x),$$

$$(10) \quad P(x) - \eta < R(x) < P(x), \quad \text{ако } x \in B, \quad f(x) < P(x),$$

$$(11) \quad \max_{x \in B} \min_{y \in A} \max \left[\frac{1}{k} |x - y|, |f(y) - R(x)| \right] < E_{m,n}(f; k).$$

Неравенствата (9), (10) и (11) заедно с лема 5 от [4] водят до противоречието $h_k(f, R) < h_k(f, P)$. С това теоремата е доказана.

Също както в класическия случай можем да характеризираме дробно-рационалната функция на най-добро приближение относно „ h -разстоянието“ със следната

Теорема 3. Нека функцията $f(x) \in C_4$. Ако функцията $P(x) \in T_{m,n}$ има вида

$$P(x) = s(x) \frac{b_0 x^{n-v} + b_1 x^{n-v-1} + \dots + b_{n-v}}{a_0 x^{m-\mu} + a_1 x^{m-\mu-1} + \dots + a_{m-\mu}}, \quad b_0 \neq 0, a_0 \neq 0, 0 \leq v \leq n, 0 \leq \mu \leq m$$

и удовлетворява $E_{m,n}(f; k) = h_k(f, P)$, $k \geq 0$, то съществуват поне N точки от Δ , x_1, x_2, \dots, x_N , $N \geq m+n-d+2$, $d = \min(\mu, v)$ такива, че

$$E_{m,n}(f; k) = \begin{cases} f(x_i) - P(x_i) & \text{ако } k=0, \\ \min_{x \in A} \max \left[\frac{1}{k} |x-x_i|, |f(x)-P(x_i)| \right] & \text{ако } k>0, \end{cases}$$

$$\operatorname{sgn}(f(x_i) - P(x_i)) = (-1)^{i+\varepsilon}, \quad \varepsilon = 0, 1.$$

На доказателството на теоремата няма да се спирате, а ще отбележим само, че точките x_1, x_2, \dots, x_N ще наричаме точки, осъществяващи h -алтернанс за функцията $P(x)$.

Теорема 4. За всяка функция $f(x) \in C_4$ и всяко $k \geq 0$ съществува единствена функция $P(x) \in T_{m,n}$, за която $E_{m,n}(f; k) = h_k(f, P)$.

Доказателство. Нека и функцията $Q(x) \in T_{m,n}$ удовлетворява условието

$$(12) \quad E_{m,n}(f; k) = h_k(f, Q)$$

и за определеност видът на функциите $P(x)$ и $Q(x)$ е следният:

$$P(x) = s(x) \frac{b_0 x^{n-v} + \dots + b_{n-v}}{a_0 x^{m-\mu} + \dots + a_{m-\mu}},$$

$$Q(x) = s(x) \frac{d_0 x^{n-v'} + \dots + d_{n-v'}}{c_0 x^{m-\mu'} + \dots + c_{m-\mu'}}.$$

Според теорема 3. съществуват точки $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$, $N \geq m+n-d+2$, $d = \min(\mu, v)$, осъществяващи h -алтернанс за функцията $P(x)$. От лема 1. от [1] следва, че вътре в правоъгълника с център точката $(\xi_i, P(\xi_i))$, със страна, успоредна на оста x с дължина $2k \cdot E_{m,n}(f; k)$ (при $k=0$ правоъгълникът се зарежда в отсечка, успоредна на оста y) и страна, успоредна на оста y с дължина $2E_{m,n}(f; k)$, няма точки от $f(x)$, т. е. за $x \in [\xi_i - k \cdot E_{m,n}(f; k), \xi_i + k \cdot E_{m,n}(f; k)]$ е в сила

$$(13) \quad f(x) \leq P(\xi_i) - E_{m,n}(f; k), \quad \text{ако } \operatorname{sgn}[P(\xi_i) - f(\xi_i)] = 1,$$

$$(14) \quad f(x) \geq P(\xi_i) + E_{m,n}(f; k), \quad \text{ако } \operatorname{sgn}[P(\xi_i) - f(\xi_i)] = -1,$$

Предвид на (6), в случай, че е в сила (13), е изпълнено $Q(\xi_i) \leq P(\xi_i)$, а в случай — (14), е изпълнено $Q(\xi_i) \geq P(\xi_i)$.

Образувайки функцията

$$R(x) = P(x) - Q(x) = s(x) \frac{u(x)}{v(x)},$$

от последните две неравенства намираме, че полиномът $u(x)$ от степен $\leq \max[m+n-v-\mu', m+n-v'-\mu] \leq N-2$, се анулира поне в $N-1$ точки, т. е. $P(x) = Q(x)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сендов, Б. л., Пенков, Б.: ϵ -ентропия и ϵ -капацитет на пространството от непрекъснатите функции. Изв. на Мат. инст. на БАН, 6 (1962), 27—50.
2. Березин, И. С., Жидков, Н. П.: Методы вычислений. Москва, 1966.
3. Ахиезер, М. И.: Лекции по теории аппроксимации. Москва, 1947.
4. Андреев, А., Попов, В. А.: Апроксимиране на функции относно една Δ -метрика от хаусдорфовски тип (под печат).

Постъпила на 16. XI. 1971 г.

DIE APPROXIMATION STETIGER FUNKTIONEN MITTELS GEBROCHENER RATIONALER FUNKTIONEN BEZÜGLICH EINER HAUSDORFFSCHEN Δ -METRIK

A. Andreev und W. A. Popow

(ZUSAMMENFASSUNG)

In der Arbeit wird die Approximation stetiger Funktionen mittels gebrochener rationaler Funktionen bezüglich folgender Hausdorffscher Δ -Metrik

$$h_k(f, g) = \max_{x \in [a, b]} \min_{y \in [a, b]} \max \left[\frac{1}{k} |x-y|, |f(y)-g(x)| \right], \quad k > 0,$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} h_k(f, g) = h_0(f, g) = \max_{x \in [a, b]} |f(x)-g(x)|$$

betrachtet.

Die beste Approximation der stetigen Funktion $f(x)$ mittels gebrochener rationaler Funktionen wird durch

$$E_{m,n}(f; k) = \inf_{P \in T_{m,n}} h_k(f, P), \quad k \geq 0,$$

definiert, wobei $T_{m,n}$ die Menge aller Funktionen

$$s(x) = \frac{a_0 x^n + \cdots + a_n}{b_0 x^m + \cdots + b_n}$$

ist. $s(x)$ ist stetig und für jedes $x \in [a, b]$ gilt $s(x) > 0$.

Es werden für jede stetige Funktion und für jede $m, n, k \geq 0$ Sätze über Existenz, Eindeutigkeit und Charakterisierung mittels des Kolmogoroffschen Kriteriums bewiesen. Die bekannten klassischen Ergebnisse bezüglich des gleichmässigen Abstandes sind Grenzfall (bei $k=0$) der Ergebnisse dieser Arbeit.