ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ БЭРА

Васил М. Веселинов

Р. Бэр доказал следующую, ставшую уже классической, теорему: каждая полунепрерывная сверху функция $f(x) \not\equiv +\infty$ может быть представлена в виде предела невозрастающей последовательности алгебраических (или тригонометрических — в периодическом случае) полиномов. Л. В. Канторович дал интересное доказательство теоремы Бэра, определив монотонную последовательность алгебраических полиномов в форме полиномов Бернштейна [3]. В настоящей работе исследуется приближение ограниченных полунепрерывных функций (точнее, их дополненных графиков) монотонными последовательностями полиномов в метрике Хаусдорфа. В отличии от теоремы Бэра в этом случае не только устанавливается, что каждую ограниченную полунепрерывную функцию можно приблизить в рассматриваемой метрике сколь угодно точно монотонной последовательностью полиномов, но и получаются оценки для скорости приближения в зависимости от структурных свойств функции. В связи с этим, заметим, что теоремы 1 и 3, доказанные ниже, обобщают теорему Бэра.

Напомним некоторые определения, связанные с метрикой Хаусдорфа [1], [2].

Пусть F и G — замкнутые точечные множества на плоскости. Хаусдорфово расстояние между F и G определяется следующим образом.

$$r(F, G) = \max\left\{\max_{a_1 \in F} \min_{a_2 \in G} \|a_1 - a_2\|_0, \max_{a_1 \in G} \min_{a_2 \in F} \|a_1 - a_2\|_0\right\},$$

где $\|a_1 - a_2\|_0 = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$, (x_i, y_i) — координаты точек a_i. Если $f(x)$ вещественная функция, заданная и ограниченная на замкнутом интервале τ, то через $S^f(x)$ и $I^f(x)$ будем обозначать соответственно верхнюю и нижнюю функцию Бэра функции $f(x)$

$$S^f(x) = \lim_{\delta \to 0} f_\delta(x), \quad I^f(x) = \lim_{\delta \to 0} f_{-\delta}(x),$$

где $f_\delta(x) = \sup\limits_{\substack{|t-x| \leq \delta \\ t, x \in \tau}} f(t)$, $f_{-\delta}(x) = \inf\limits_{\substack{|t-x| \leq \delta \\ t, x \in \tau}} f(t)$.

Дополненным графиком $\overline{f}_\tau$ функции $f(x)$ называется совокупность точек (x, y), для которых $x \in \tau$, $I^f(x) \leq y \leq S^f(x)$. Хаусдорфово расстояние

$r(f, g)$ между функциями $f(x)$ и $g(x)$ на интервале τ определяется как хаусдорфово расстояние между их дополненными графиками, т. е.

$$r(f, g)=r(f_\tau, g_\tau).$$

Обозначим через R_Δ совокупность вещественных функций $f(x)$ заданных и ограниченных на конечном отрезке $\Delta=[a, b]$, таких что $f_\Delta=\overline{S}_\Delta^f$. Обозначим также через $R_{2\pi}$ совокупность вещественных функций $f(x)$, заданных и ограниченных на всей действительной оси, периодических с периодом 2π и таких что $\overline{f}_{(-\infty,\infty)}=\overline{S}_{(-\infty,\infty)}^f$ Ясно, что R_Δ содержит все полунепрерывные сверху и ограниченные на Δ функции, но класс R_Δ шире; аналогичное утверждение справедливо для класса $R_{2\pi}$.

Верхний модуль полунепрерывности $\theta_f(\delta)$ функции $f(x)$ введенами в [5]. По определению

$$\theta_f(\delta) = r(f, f_\delta).$$

В [5] показано: для того, чтобы $f(x) \in R_\Delta$, необходимо и достаточно выполнение условия $\lim\limits_{\delta\to 0}\theta_f(\delta)=0$; аналогичное утверждение справедливо для класса $R_{2\pi}$. Обозначим через H_n совокупность алгебраических полиномов степени $\leq n$ и через H_n^τ совокупность тригонометрических полиномов порядка $\leq n$.

Теорема 1. Пусть $f(x)<R_{2\pi}$, $\sup\limits_{-\infty<x<\infty}|f(x)|\leq M$. Тогда существует невозрастающая последовательность тригонометрических полиномов $\{T_n(x)\}$, $T_n(x)\in H_n^\tau$, такая что

$$r(f, T_n)\leq\theta_f\left(c_1\frac{\ln n}{n}\right)+c_2(M)n^{-2}, \tag{1}$$

где $c_1>0$ — постоянная, не зависящая от n, f и M, $c_2(M)>0$ — постоянная, зависящая только от M.

Доказательство. Рассмотрим интегральный оператор с ядром типа Фейера

$$D_{m,\nu}(f;\ x)=\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)K_{m,\nu}(t)\,dt,$$

где m и ν — натуральные числа,

$$K_{m,\nu}(t)=c_{m,\nu}\left(\frac{\sin\frac{mt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^{2\nu}dt,$$

$$C_{m,\nu}^{-1}=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\sin\frac{mt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^{2\nu}dt.$$

Положим

$$D_n(f;\ x)=D_{m,\nu}(f;\ x) \text{ и } K_n(t)=K_{m,\nu}(t)$$

при $m=\left[\frac{n}{\ln n}\right]$ и $\nu=[\ln n]$, где $n\geqq 3$ — натуральное число, $[x]$ обозначает, как обычно, целую часть x. Заметим, что оператор $D_n(f;\ x)$ — тригонометрический полином порядка $\leqq n$.

Нетрудно доказать (см. [2]), что для каждого $\delta>0$ выполнено неравенство

$$\int_{\delta}^{\pi} K_{m,\nu}(t)\,dt \leqq \frac{\pi^{4\nu-1}}{2^{2\nu+1}(2\nu-1)(m\delta)^{2\nu-1}}. \tag{2}$$

Пусть $\delta=q\frac{\ln n}{n}$, $q>0$. Тогда

$$(m\delta)^{2\nu-1}\sim q^{2\ln n-1}. \tag{3}$$

Из (2) и (3) следует, что существуют постоянные $\alpha>0$ и $B>0$, такие что если $\lambda(n)=\alpha\frac{\ln n}{n}$, то

$$\int_{\lambda(n)}^{\pi} K_n(t)\,dt \leqq \frac{B}{n^2}. \tag{4}$$

Следуя Л. В. Канторовичу [3], рассмотрим тригонометрический полином

$$D_n^*(f;\ x)=\int_{-\pi}^{\pi} f_{2\lambda(n)}(x+t)\,K_n(t)\,dt.$$

Имеем

$$D_n^*(f;\ x)=\int_{-\pi}^{\pi} f_{2\lambda(n)}(t)\,K_n(t-x)\,dt=\int_{|t-x|\leqq\lambda(n)}+\int_{|t-x|>\lambda(n)}=\int_{(1)}+\int_{(2)}. \tag{5}$$

Дальше, пользуясь (4), получаем

$$\int_{(2)}\Big|\leqq\int_{|t-x|>\lambda(n)}|f_{2\lambda(n)}(t)\,K_n(t-x)\,dt \tag{6}$$

$$=\int_{|t|>\lambda(n)}|f_{2\lambda(n)}(t+x)|\,K_n(t)\,dt\leqq 2M\int_{\lambda(n)}^{\pi}K_n(t)\,dt\leqq\frac{2MB}{n^2}.$$

Непосредствено из определения функции $f_\delta(x)$ получаем, что при $|t-x|\leqq\lambda(n)$ выполнены неравенства

(7) $$f_{\lambda(n)}(x)\leqq f_{2\lambda(n)}(t)\leqq f_{3\lambda(n)}(x).$$

Из (4) и (7) следует

(8) $$f_{\lambda(n)}(x)-\frac{2MB}{n^2}\leqq\int\limits_{(1)}\leqq f_{3\lambda(n)}(x)+\frac{2MB}{n^2}.$$

(6) и (8) дают

(9) $$f_{\lambda(n)}(x)-\frac{4MB}{n^2}\leqq D_n^*(f;\ x)\leqq f_{3\lambda(n)}(x)+\frac{4MB}{n^2}$$

для каждого $x\in(-\infty,\ \infty)$.

Построим невозрастающую последовательность тригонометрических полиномов. Положим

$$\Phi_k(x)=D_{4k}^*(x)+Q_k,$$

$$Q_k=4MB\sum_{i=k}^{\infty}\left(\frac{1}{4^{2i}}+\frac{1}{4^{2(i+1)}}\right).$$

Докажем, что

(10) $$\Phi_k(x)\geqq\Phi_{k+1}(x).$$

Сначала заметим, что для каждого натурального $k\geqq3$ выполнено $\frac{\ln 4^k}{4^k}\geqq3\frac{\ln 4^{k+1}}{4^{k+1}}$ и следовательно

(11) $$\lambda(4^k)\geqq3\lambda(4^{k+1}).$$

Из (9) и (11) следует

$$\Phi_k(x)\geqq f_{\lambda(4k)}(x)-\frac{4MB}{4^{2k}}+Q_k=f_{\lambda(4k)}(x)-\frac{4MB}{4^{2k}}$$

$$+\frac{4MB}{4^{2k}}+4MB\sum_{i=k+1}^{\infty}\left(\frac{1}{4^{2i}}+\frac{1}{4^{2(i+1)}}\right)+\frac{4MB}{4^{2(k+1)}}$$

$$\geqq f_{3\lambda(4^{k+1})}(x)+\frac{4MB}{4^{2(k+1)}}+Q_{k+1}(x)\geqq\Phi_{k+1}(x)$$

и (10) доказано.

Оценим сверху Q_k. Имеем

$$Q_k=4MB\sum_{i=k}^{\infty}\left(\frac{1}{4^{2i}}+\frac{1}{4^{2(i+1)}}\right)=4MB\frac{4^{-2k}+4^{-2(k+1)}}{1-4^{-2}}$$

и следовательно

$$Q_k \leqq \frac{5MB}{4^{2k}}. \tag{12}$$

Из (9) и (12) и определения хаусдорфова расстояния получаем

$$r(f, \Phi_k) \leqq r(f, f_{3\lambda}(4^k)) + \frac{4MB}{4^{2k}} + Q_k \leqq r(f, f_{3\lambda}(4^k))$$

$$+ \frac{4MB}{4^{2k}} + \frac{5MB}{4^{2k}} \text{ или окончательно}$$

$$r(f, \Phi_k) \leqq \theta_f\left(3\alpha \frac{\ln 4^k}{4^k}\right) + \frac{9MB}{4^{2k}}. \tag{13}$$

Отсюда нетрудно закончить доказательство теоремы. Пусть n — произвольное натуральное число, $n \geqq 4^3$ (это ограничение несущественно для доказательства теоремы). Тогда существует натуральное k, такое что $4^k \leqq n \leqq 4^{k+1}$. Положим

$$T_n(x) = \Phi_k(x).$$

Очевидно $T_n(x) \geqq T_{n+1}(x)$, т. е. последовательность $\{T_n(x)\}$ не возрастает. Заметим, что

$$\frac{\ln 4^k}{4^k} \leqq 4\frac{\ln 4^{k+1}}{4^{k+1}} \leqq 4\frac{\ln n}{n}.$$

Отсюда и из (13) следует

$$r(f, T_n) \leqq \theta_f\left(12\alpha \frac{\ln n}{n}\right) + \frac{144MB}{n^2}$$

и неравенство (1) установлено.

Этим теорема 1 доказана.

Замечание 1. В [5] установлено: из условия $\lim\limits_{\delta \to 0} \frac{\theta_f(\delta)}{\delta} = 0$ следует, что функция $f(x)$ — постоянная. Отсюда вытекает, что в (1) $\theta_f\left(c\frac{\ln n}{n}\right)$ не может стремится к нулю быстрее чем $\frac{\ln n}{n}$.

Обозначим через $R^s_{2\pi}$ совокупность функций $f(x) \in R_{2\pi}$, для которых существуют постоянные A и s ($A \geqq 0$, $0 < s \leqq 1$), такие что $\theta_f(\delta) \leqq \leqq A\delta^s$. Тогда из теоремы 1 получаем

Следствие 1. Если $f(x) \in R^s_{2\pi}$, то существует невозрастающая последовательность тригонометрических полиномов $\{T_n(x)\}$, $T_n(x) \in H^r_n$, такая что

$$r(f, T_n) = O\left(\left(\frac{\ln n}{n}\right)^s\right). \tag{14}$$

Замечание 2. Для каждой ограниченной и периодической с периодом 2π функции $f(x)$ обозначим
$E_n(f)=\inf\limits_{T(x)\in H_n^{\mathrm{T}}} r(f, T)$ — наилучшее приближение функции в метрике Хаусдорфа тригонометрическими полиномами порядка не выше n. В [4] (см. также [1]) получена универсальная оценка (точная по порядку)

$$E_n(f)=O\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

Следствие 1 показывает, что для каждой функции из класса $R_{2\pi}^1$ существует невозрастающая последовательность тригонометрических полиномов $\{T_n(x)\}$, $T_n(x)\in H_n^{\mathrm{T}}$, которая осуществляет приближение, совпадающее по порядку с наилучшим приближением функции тригонометрическими полиномами.

Покажем, что не существуют монотонные последовательности тригонометрических полиномов, которые дают лучшую по порядку оценку чем (14). Рассмотрим функцию $h(x)\in R_{2\pi}$,

$$h(x)=\begin{cases}1 & \text{для } x=0,\\ 0 & \text{для } 0<|x|\leq\pi.\end{cases}$$

В [4] установлено: существует постоянная $c_3>0$, независящая от n и такая что

$$E_n(h)\geq c_3\frac{\ln n}{n}. \tag{15}$$

Легко проверяется, что $\theta_h(\delta)=\delta$ — и следовательно $h(x)\in R_{2\pi}^1$. Отсюда и из (15) следует, что в теореме 1 и в следствии 1 нельзя заменить $\frac{\ln n}{n}$ функцией $\varphi(n)\geq 0$, такой что $\varphi(n)=o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$. Тем самым показано, что полученные результаты в указанном смысле являются неулучшаемыми. Этого нельзя сказать о постоянной c_1 в (1). Грубый подсчет дает $1\leq c_1\leq 162$. Эты границы можно в некоторой степени сузить, однако неизвестно минимальное значение c_1, для которого теорема 1 остается в силу.

Сформулируем в терминах наилучших приближений еще одно следствие теоремы 1. Обозначим

$$\tilde{E}_n(f)=\inf_{\substack{T(x)\in H_n^{\mathrm{T}}\\ T(x)\geq f(x)}} r(f, T) \text{ — наилучшее приближение сверху}$$

Хаусдорфа функции $f(x)$ тригонометрическими полиномами порядка $\leq n$. Тогда из теоремы 1 сразу следует

Теорема 2. Пусть $f(x)\in R_{2\pi}$, $\sup\limits_{-\infty<x<\infty}|f(x)|\leq M$. Тогда

$$\tilde{E}_n(f) \leq \theta_f\left(c_1 \frac{\ln n}{n}\right) + c_2(M)\, n^{-2}, \tag{16}$$

где $c_1 > 0$ — постоянная, независящая от n, f и M; $c_2(M) > 0$ — постоянная, зависящая только от M.

Оценка (16) точна относительно порядка.

Все полученные результаты переносятся легко на случае алгебраических полиномов. Сформулируем аналог теоремы 1.

Теорема 3. Пусть $f(x) \in R_\Delta$, $\sup\limits_{x \in \Delta} |f(x)| \leq M$. Тогда существует невозрастающая последовательность алгебраических полиномов $\{P_n(x)\}$ $P_n(x) \in H_n$, такая что

$$r(f, P_n) \leq \theta_f\left(c_1^* \frac{\ln n}{n}\right) + c_2^*(M)\, n^{-2},$$

где $c_1^* > 0$ — постоянная, независящая от n, f и M; $c_2^*(M) > 0$ — постоянная, зависящая только от M; $\frac{b-a}{2} \leq c_1^* \leq 81\,(b-a)$, $\Delta = [a, b]$.

Замечание 3. В связы с теоремами 1, 2 и 3 отметим, что полученные оценки нельзя заменить универсальными оценками, независящих от структурных свойств функций.

Замечание 4. Легко доказывается, что из сходимости в метрике Хаусдорфа невозрастающей последовательности полунепрерывных сверху функций к функциям классов $R_{2\pi}$ и R_Δ следует поточечная сходимость в точках полунепрерывности сверху. Поэтому теорема Бэра является следствием теорем 1 и 3.

Отметим наконец, что подобные результаты можно получить и для непериодических аналогов тригонометрических полиномов — целых функциях экспоненциального типа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сендов, Бл.: Некоторые вопросы теории приближении функций и множеств в хаусдорфовой метрике Усп. мат. наук, **24**, 5 (149), 1969, 141—178.
2. Сендов, Бл.: Аппроксимация относительно хаусдорфова расстояния. Докт. диссертация, Москва, 1967.
3. Канторович, Л. В.: О некоторых разложениях по полиномам в форме С. Н. Бернштейна, II. ДАН СССР, № 21, 1960, 595—600.
4. Веселинов, В. М.: Аппроксимирование функций при помощи тригонометрических полиномов относительно одной метрики хаусдорфовского типа. Mathematica (Cluj), **9** (32), 1, 1967, 185—199.
5. Веселинов, В. М.: О порядке приближения полунепрерывных функций нелинейными положительными операторами. Докл. Болг. АН, **24**, № 6 (1971), 705—708

Постъпила на 16. XI. 1971 г.

ON A THEOREM OF BAIRE

V. M. Veselinov

(SUMMARY)

In this paper the approximation is considered of bounded semi-continuous functions by monotonous sequences of algebraic and trigonometric polynomials with respect to Hausdorff metric. The results obtained generalize the Baire's theorem about approximation of semi-continuous functions.