О КРАТНО-ТРАНЗИТИВНЫХ ГРУППАХ

Недялко Д. Ненов

Пусть G-группа подстановок множества $\Omega=\{1, 2, \ldots, n\}$.

Определение: Группа G называется k-кратно транзитивной, если для любого набора элементов $a_1, \ldots, a_k \in \Omega$ и $b_1, \ldots, b_k \in \Omega$ существует $g \in G$ так, что $(a_i)g=b_i$ $(i=1, 2, \ldots, k)$.

Очевидно, что S_n является n-кратно транзитивной, а A_n является $(n-2)$-кратно транзитивной группой. Следовательно S_n $(n \geq 4)$ и A_n $(n \geq 6)$ являются 4-кратно транзитивными группами. Известны еще четыре 4-кратно транзитивные группы: M_{11}, M_{12}, M_{23} и M_{24}. Они называются группами Матье. Изучению 4-кратно транзитивных групп посвещено много работ, но осталось неизвестным существуют ли кроме известных другие 4-кратно транзитивные группы.

Обозначим, через $H=G_{1,2,3,4}$ стабилизатор элементов $1, 2, 3, 4 \in \Omega$ В 1872 году Жордан доказал следующую теорему:

Теорема 1. Если G — 4-кратно транзитивная группа и $|H|=1$, то G одна из следующих групп: S_4, S_5, A_6 и M_{11}.

Позже М. Холл доказал [1]:

Теорема 2. Если G — 4-кратно транзитивная группа и $|H|$ — нечетное число, то G находится среди S_4, S_5, A_6, A_7, M_{11}.

Случай, когда $|H|$ — четное число, изучался японскими математиками Nagao, Noda и Toyma. Noda и Toyma в работе [5] доказали следующую теорему:

Теорема 3. Пусть G — 4-кратно транзитивная группа и $H=G_{1,2,3,4}$ — стабилизатор элементов $1, 2, 3, 4 \in \Omega$. Если силовская 2-подгруппа группы H является циклической группой и отлична от единицы, то G совпадает с S_6 или S_7.

Описание 4-кратно транзитивных групп в случаях, когда $|H|=1, 2, 3$ или H является циклической группой $4^{ого}$ порядка дают соответно теоремы 1, 2, 3.

В этой работе рассматривается случай когда $|H|=4$ и H является элементарной абелевой группой. Будет доказана следующая:

Основная теорема. Не существует 4-кратно транзитивная группа, для которой стабилизатор четырех точек множества Ω является элементарной абелевой группой четвертого порядка.

Обозначения:

$|T|$ — число элементов множества T.

Ω — множество чисел $1, 2, \ldots, n$.

G — 4-кратно транзитивная группа подстановок на множестве $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$.

$\mathrm{Aut}(G)$ — группа автоморфизмов группы G.

e — единичный элемент группы G.

$H = G_{1,2,3,4}$ — стабилизатор точек $1, 2, 3, 4 \in \Omega$.

$N(G_{1,2,3,4})$ — нормализатор $G_{1,2,3,4}$ в G.

$Z(G_{1,2,3,4})$ — централизатор $G_{1,2,3,4}$ в G.

Пусть $T \subseteq G$.

$J(T)$ — множество всех точек из Ω, которые все элементы из T оставляют на месте.

Пусть $\Delta \subseteq \Omega$.

T^{Δ} — ограничение T на Δ.

S_{Ω} — симметрическая группа множества Ω.

Пусть H является стабилизатором точек $1, 2, 3, 4 \in \Omega$ в группе G. Очевидно, что если $\Delta = J(H)$, то Δ — инвариантно относительно $N(H)$.

В работе [2] доказано, что $[N(H)]^{\Delta}$ является 4-кратно транзитивной группой на множестве Δ и $[N(H)]^{\Delta}_{1,2,3,4} = e$.

Согласно теореме 1 возможны только следующие случаи:

(1) $\Delta = 4$, $N^{\Delta}(H) \cong S_4$;

(2) $\Delta = 5$, $N^{\Delta}(H) \cong S_5$;

(3) $\Delta = 6$, $N^{\Delta}(H) \cong A_6$;

(4) $\Delta = 11$, $N^{\Delta}(H) \cong M_{11}$.

Дальше мы будем пользоваться следующими теоремами:

Теорема 4. [3] Пусть H является стабилизатором точек $1, 2, 3, 4 \in \Omega$ в группе G. Если G 4-кратно транзитивна и $|\Delta| = 5$, 6 или 11, то G совпадает соответно с S_5, A_6 или M_{11}.

Теорема 5. [4] Если любой элемент второго порядка группы G оставляет на месте не больше пяти точек из Ω, то G совпадает с одной из следующих групп; S_4, S_5, A_8, A_9, M_{11}.

Теорема 6. ([1] т. 5.1.3) Две подстановки сопряжены в симметрической группе тогда и только тогда, когда они имеют одинаковое число циклов каждой длины.

Доказательство основной теоремы:

Непосредственно проверяется, что все перечисленые 4-кратно транзитивные группы не удовлетворяют условиям теоремы.

Дальше всюду будем предполагать, что G — 4-кратно транзитивная группа и $G_{1,2,3,4}$ является элементарной абелевой группой четвертого порядка.

Из теоремы 4 следует, что достаточно рассмотреть случай:

$$(A) \qquad |J(G_{1,2,3,4})| = 4 \quad \text{и} \quad [N(G_{1,2,3,4})]^{\Delta} \cong S_4,$$

где $\Delta = J(G_{1,2,3,4})$.

Любая орбита $G_{1,2,3,4}$ на $\Omega-\{1, 2, 3, 4\}$ будет содержать больше одного элемента и число элементов в любой такой орбите будет делителем $|G_{1,2,3,4}|=4$.

Следовательно:

(B) $|\Omega|$ — четное число.

Пусть $G_{1,2,3,4}=H$ — элементарная абелева группа четвертого порядка.

$$N(H)\supseteq Z(H)\supseteq H; \quad \Delta=J(H).$$

Согласно (A) $N^4(H)\sim N(H)/H\cong S_4$.

$$N(H)/H\Delta Z(H)/H.$$

Возможны следующие случаи:

(1) $Z(H)/H\cong e$ (т. е. $Z(H)=H$);

(2) $Z(H)/H\cong[A_4, A_4]$;

(3) $Z(H)/H\cong A_4$;

(4) $Z(H)/H\cong S_4$ (т. е. $Z(H)=N(H)$).

Утверждение теоремы в случае (1) очевидно, поскольку

$$N(H)/H\cong N(H)/Z(H)\cong S_4\subseteq \mathrm{Aut}(H),$$

а с другой стороны $\mathrm{Aut}(H)\cong S_3$.

Лемма 1. Группа G не содержит транспозиций. Действительно, в противном случае G будет содержать все транспозиции и следовательно $G\cong S_\Omega$.

Лемма 2. В случаях (2), (3) и (4), если $a=(m, k)(m_1\ k_1)\ldots\in G$, то $P^2=1$.

В случае (4), если $d=(m)(k)(m_1\ k_1)\ldots\in G$, то $d^2=1$.

Доказательство. Из леммы 1 следует, что существует $b=(x\ y)(z\ t)\ldots\in G$ и $b^2=e$. Существует $g\in G$ так, что $g=\begin{pmatrix} x & y & z & t\ldots \\ m & k & m_1 & k_1\ldots\end{pmatrix}$,

$$c=g^{-1}bg=(m\ k).(m_1\ k_1)\ldots;\ c^2=e.$$

$ac=(m)(k)(m_1)(k_1)\ldots$. Следовательно $(ac)^2=1$. В рассматриваемых случаях $c\in Z(G_{m,k,m_1,k_1})$. Следовательно $(ac)c=c(ac)$, т. е. $ac=ca$,

$$(ac)^2=a^2c^2=a^2=1.$$

Доказательство второй части леммы проводится аналогично.

Лемма 3. Пусть t_1 и $t_2\in G$, $t_1t_2=t_2t_1$ и $t_1=(a_1\ a_2\ldots a_k)\ldots$. Если $(a_1)t_2=a_1$, то $(a_j)t_2=a_j$ $(j=1, 2,\ldots,k)$.

Доказательство $(a_1)\,t_1\,t_2=(a_2)\,t_2$;

$$(a_1)\,t_1t_2=(a_1)\,t_2t_1=(a_1)\,t_1=a_2.$$

Следовательно $(a_2)\, t_2 = a_2$. Аналогично $(a_3)\, t_2 = a_3$ и т. д.

Лемма 4. Пусть $m_1, m_2, m_3, m_4, l_1, l_2, l_3, l_4 \in \Omega$. Тогда подгруппы G_{l_1, l_2, l_3, l_4} и G_{m_1, m_2, m_3, m_4} сопряжены в G.

Доказательство основной теоремы в случаях (2) и (3).

Пуст $t \in G_{1, 2, 3, 4}$. Допустим, что $|J(t)| \geqq 6$ и $t \neq e$.

Возьмем $t_1 = (3)\ (4)\ (5)\ (6) \ldots$, $t_1 \neq t$ и $t_1 \neq e$. Можно предположить, что $t_1 = (1\ 2)\ (3)\ (4)\ (5)\ (6) \ldots$ (см. лемму 3).

В случаях (2) и (3) обязательно существует $t_2 = (1)\ (2)\ (3)\ (4) \ldots$, такой что $t_1 t_2 \neq t_2 t_1$. $t_1 t_2 = (1\ 2)\ (3)\ (4) \ldots$ и $(t_1 t_2)^2 = (1)\ (2)\ (3)\ (4) \ldots \in G_{1, 2, 3, 4}$. $(t_1 t_2)^2 \neq e$, т. к. $t_1 t_2 \neq t_2 t_1$.

Следовательно $t_1 t_2$ является элементом четвертого порядка.

Пусть $t_1 t_2 = h$. Тогда $t_2 t_1 = h^{-1}$. $|J(h)| = 2$, т. к. в противном случае согласно (B) $|J(h)| > 4$, что противоречит тому, что h — элемент четвертого порядка.

Согласно лемме 2 h не содержит циклов длины два отличных от $(1\ 2)$.

Следовательно $|J(t_1 t_2)^2| = 4$ (*). $t_1^2 = e$, $h^4 = e$, $t_1 (t_1 t_2) t_1^{-1} = t_1 h t_1^{-1} = h^{-1}$.

Следовательно $\Gamma = \{t_1, h\}$ — является группой диедра четвертой степени.

Γ содержит три отличные от e элемента второго порядка, а именно t_2, $(t_1 t_2)^2$, $(t_1 t_2)^2 t_2$. Все они имеют вид $(1)\ (2)\ (3)\ (4) \ldots$, т. е. они принадлежат $G_{1, 2, 3, 4}$.

Очевидно $t \in \Gamma$ и $t_1 t = t t_1$, $t t_2 = t_2 t$.

Следовательно t принадлежит центру Γ, т. е. $t = (t_1 t_2)^2$. Но последнее равенство противоречит (*). Следовательно $|J(t)| < 6$ и поскольку $|\Omega|$ — четное число, то $|J(t)| \leqq 4$ для каждого элемента второго порядка $t \in G$.

Окончательно утверждение теоремы следует из теоремы 5.

Доказательство теоремы в *случае* (4). $(N(H) = Z(H)$.

Лемма 5. Пусть $t \in G$ и $t^2 = e$. Если $t \neq e$, то $|J(t)| \leqq 8$.

Доказательство. Допустим, что $J(t) > 8$. Поскольку $|\Omega|$ — четное число, то $|J(t)| \geqq 10$.

Предположим, что $t = (1)\ (2)\ (3)\ (4)\ (5)\ (6)\ (7)\ (8)\ (9)\ (10) \ldots$ Пусть $t_1 \in G_{1, 2, 3, 4}$ и $t_1 \neq t$, $t_1 \neq e$. Из теоремы 4 следует, что $J(t) \cap J(t_1) = \{1, 2, 3, 4\}$.

Можно предположить (см. лемму 3), что

$$t_1 = (1)\ (2)\ (3)\ (4)\ (5\ 6)\ (7\ 8)\ (9\ 10) \ldots$$

и

$$t_2 = t_1 t = (1)\ (2)\ (3)\ (4)\ (5\ 6)\ (7\ 8)\ (9\ 10) \ldots$$

Очевидно $G_{1, 2, 3, 4} = H = \{e_1 t, t_1, t_2\}$. Пусть $x_1 = (3)\ (4)\ (5)\ (6) \ldots$, $x_1 \neq t$ и $x_1 \neq e$. $x_1 \in Z(H)$ и $(1)\, x_1 \neq 1$, следовательно $x_1 = (1\ 2)\ (3)\ (4) \ldots$

Пуст $x_2=(3)\ (4)\ (7)\ (8)\ldots$; $x_2 \neq t$ и $x_2 \neq e$. Аналогично $x_2 \in Z(H)$ $(1)x_2 \neq 1$, следовательно

$$x_2=(1\ 2)\ (3)\ (4)\ (7)\ (8)\ldots$$

$$x_3=(3)\ (4)\ (9)\ (10)\ldots;\ x_3 \neq t \text{ и } x_3 \neq e.$$

$x_3 \in Z(H)$; $(1)x_3 \neq 1$. Следовательно

$$x_3=(1\ 2)\ (3)\ (4)\ (9)\ (10)\ldots$$

Очевидно, что $x_1 \neq x_2 \neq x_3$, т. к. в противном случае получим, что $|J(x_i) \cap J(t)| > 4$ для некоторого $i=1, 2, 3$. Это противоречит теореме 4.

$$x_1 x_2=(1)\ (2)\ (3)\ (4)\ldots \text{ и } (5)x_1 x_2=(5)x_2 \neq 5.$$

Следовательно $x_1 x_2 \neq t, e$, т. е. $x_1 x_2=t_1$ или t_2.

$$x_1 x_3=(1)\ (2)\ (3)\ (4)\ldots \text{ и } (5)x_1 x_3 \neq 5.$$

Следовательно $x_1 x_3 \neq t, e$, т. е. $x_1 x_3=t_1$ или t_2. Аналогично $x_2 x_3 = t_1$ или t_2.

Следовательно два из элементов $x_1 x_2$, $x_1 x_3$, $x_2 x_3$ равны. Это противоречит тому, что x_1, x_2, x_3 разные.

Следовательно $|J(t)| \leq 8$ если $t^2=e$ и $t \neq e$.

Лемма доказана.

Группа G 4-кратно транзитивна. Следовательно существует элемент $Z=(1)\ (2\ 3\ 4)\ldots$

Возьмем такое z, чтобы $z^3=e$.

Возможны только следующие случаи:

(a) $z=(1)\ (2\ 3\ 4)A$, где A содержит только циклы длины три.

(в) $z=(1)\ (2\ 3\ 4)\ (5)B$, где B содержит только циклы длины три.

(c) $z=(1)\ (2\ 3\ 4)\ (5)\ (6)\ C$, где C содержит только циклы длины три.

Пусть $t_0=(1)\ (2)\ (3)\ (4)\ (5\ k)\ldots \in G_{1,2,3,4}=H$, $z \in Z(H)$ и следовательно $z\,t_0=t_0\,z$.

В случае (a) $|J(t_0)|=4$, т. к. в противном случае согласно лемме 3 t_0 оставляет на месте больше восьми элементов Ω, а это противоречит лемме 5. Следовательно в случае (а) каждый элемент $2^{\text{ого}}$ порядка G оставляет на месте не больше четырех элементов, т. е. случай (а) сводится к теореме 5.

Случай (в) тоже невозможен, т. к. согласно лемме 3 (k) $z=k$ и $k \neq 5$.

В случае (с) непременно $t_0=(1)\ (2)\ (3)\ (4)\ (5\ 6)\ldots$ (т. е. $k=6$).

Обозначим, через t_1 и t_2 остальные два неединичные элементы $G_{1,2,3,4}$. Применяя лемму 3 для z, t_1 и z, t_2, получим, что $t_1=(1)\ (2)\ (3)\ (4)\ (5)\ (6)\ldots t_2=(1)\ (2)\ (3)\ (4)\ (5\ 6)\ldots$ либо наоборот.

Заметим, что непременно $|J(t_0)|=|J(t_2)|=4$.

Группа $H=\{e, t_0, t_1, t_2\}$ полурегулярна на $\Omega-\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ в случае (с). Любая орбита H на $\Omega-\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ имеет длину четыре. Предположим, что $\{7, 8, 9, 10\}$ — одна из таких орбит. Пусть

$$t_0=(1)\ (2)\ (3)\ (4)\ (5\ 6)\ (7\ 8)\ (9\ 10)\ldots,$$

$$t_1=(1)\ (2)\ (3)\ (4)\ (5)\ (6)\ (7\ 9)(8\ 10)\ldots,$$

$$t_2=(1)\ (2)\ (3)\ (4)\ (5\ 6)\ (7\ 10)\ (8\ 9)\ldots$$

Возьмем элемент $y=(7)\ (8)\ (9)\ (10)\ldots$, такой что $|J(y)|=4$ (см. теорему 6 и лемму 4).

Очевидно $y \in Z(G_{1,2,3,4}) = N(G_{1,2,3,4})$. Следовательно $y = ((1)\tau\ (2)\tau)\ ((3)\tau\ (4)\tau)\ldots$, где τ — подстановка символов 1, 2, 3, 4.

$$yt_1 = t_1 y \text{ и } (5)\ t_1 = 5,\ (6)\ t_1 = 6. \text{ Согласно лемме } 3$$

$$y = ((1)\tau\ (2)\tau)\ ((3)\tau\ (4)\tau)\ (5\ 6)\ldots$$

Следовательно каждой орбите $G_{1,2,3,4}$ на $\Omega - \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ставится в соответствие элемент вида:

$$((1)\tau\ (2)\tau)\ ((3)\tau\ (4)\tau)(5\ 6)\ldots$$

Разным элементом таким образом ставятся разные элементы, т. к. мы выбрали $J(y) = 4$. Очевидно, что не существует больше шести элементов вида $((1)\tau\ (2)\tau)\ ((3)\tau\ (4)\tau)\ (5\ 6)\ldots$ т. к. в противном случае существует хотя бы три различные элементы y_1, y_2, y_3 вида

$$(i_1\, i_2)\ (i_3\, i_4)\ (5\ 6)\ldots, \text{ где } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ i_1 & i_2 & i_3 & i_4 \end{pmatrix} \text{—подстановка.}$$

$$y_1\, y_2 = (1)\ (2)\ (3)\ (4)\ (5)\ (6)\ldots$$

$$y_1\, y_3 = (1)\ (2)\ (3)\ (4)\ (5)\ (6)\ldots$$

$$y_1\, y_2 \neq y_1\, y_3 \neq e, \text{ т. к. } y_1 \neq y_2 \neq y_3.$$

Последнее противоречит теореме 4, т. к. $|J(G_{1,2,3,4})| > 4$. Следовательно $|\Omega| \leq 6 + 4.6 = 30$. Окончательно, доказательство основной теоремы следует из следующей теоремы М. Холла.

Теорема. Если G — 4-кратно транзитивная группа степени меньше 35, то она совпадает с одной из следующих групп:
$S_n\ (n \geq 4)$, $A_n\ (n \geq 6)$, M_{11}, M_{12}, M_{23}, M_{24} (см. [1]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Холл, М.: Теория групп. Москва. Ин. литература, 1962.
2. Witt, E.: Die 5-fach transitiven Gruppen von Mathieu. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **12** (1937), 256—264.
3. Nagao, H.: On multiply transitive groups. IV. Osaka J. Math., 2 (1965), № 2, 120—136.
4. Nagao, H.: On multiply transitive groups. V. J. Algebra, **9** (1968,) № 2, 240—248.
5. Noda, R, Oyama, T.: On multiply transitive groups. VI. J. Algebra, **11** (1969) № 1, 145—154.

Постъпила на 16. XI. 1971 г.

ON THE MULTIPLY TRANSITIVE GROUPS

D. Nenov

(SUMMARY)

Let G be a four-multiply transitive group of permutations of the set $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$. Denote with $G_{1,2,3,4}$ the stabilizer of the points 1, 2, 3, 4.

In this paper the following is proved:

Theorem. It does not exist a four-multiply transitive group G, for which $G_{1,2,3,4}$ is an elementary abelian group of order 4.