СООТНОШЕНИЯ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ ПОРЯДОК ПОЛУГРУПП ПРЕОБРАЗОВАНИЙ МНОЖЕСТВА С КОНЕЧНОЙ ЦЕПЬЮ

Калчо Ж. Тодоров

§ 1. Исходные понятия

1.1. В настоящей работе продолжаются исследования автора [5]. Найдены минимальные совокупности соотношений предшествования, определяющие поточечный порядок некоторых полугрупп (изотонных, монотонных и др.) преобразований множества, состоящего из конечной цепи и произвольного множества изолированных элементов.

1.2. Для определенности фиксируем следующие обозначения: Пусть $\Omega(\leqq')$ — множество упорядоченое порядком $\leqq'$; A_1 — полугруппа изотонных преобразований $\Omega(\leqq')$: $(A \in A_1 : k_1 \leqq' k_2 \Rightarrow Ak_1 \leqq' Ak_2)$ относительно суперпозиции преобразований, Q — множество антитонных преобразований $\Omega(\leqq')$: $(B \in Q : k_1 \leqq' k_2 \Rightarrow Bk_2 \leqq' Bk_1)$; A_2 — полугруппа монотонных преобразований множества $\Omega(\leqq')$; $A_2 = A_1 \cup Q$; $\leqq$ — поточечный порядок в полугруппе A_2: $A_1 \leqq A_2 \Leftrightarrow (\forall k \in \Omega)(A_1 k \leqq' A_2 k)$; $A_1 \prec A_2$ — означает что $A_1 < A_2$ и что $A_1 < B < A_2$ не выполняется ни для какого B; E — тождественное преобразование; Φ'_E — совокупность всех соотношений предшествования вида $S' \prec E$; Φ''_E — совокупность всех соотношений предшествования вида $E \prec S''$; $AM = \xi : (\forall x \in M : Ax = \xi)$.

Если не сказано противное, в дальнейшем $\Omega(\leqq')$ будеть обозначать множество, упорядоченное порядком $\leqq'$ таким образом, что оно является объединением множеств Ω_1 и Ω_2 таких, что: $\Omega_1 = \{1, 2, \cdots, n\}$ $(n \geqq 2)$ является цепью: $(\forall x, y \in \Omega_1$ либо $x < y$, либо $y < x)$, а Ω_2 — произвольным множеством изолированных элементов: $(x \leqq' y \Rightarrow x = y)$. $\Omega(\leqq')$ — будем называть множеством с конечной цепью.

1.3. Напомним некоторые основные понятия, идущие с работ Ляпина Е. С. [3] и автора [5].

Запись $x \dot{\in} M$ будет обозначать, что x является элементом множества M или пустым символом.

Пусть в полугруппе A_2 задано соотношение предшествования $\sigma : A_1 \prec B_1$. Тогда для всякого

$$U_1 \dot{\in} A_1, \quad V \dot{\in} A_2, \quad U_2 \in Q$$

имеем

$$\sigma_1: U_1A_1V \leqq U_1B_1V, \quad \sigma_2: U_2B_1V \geqq U_2A_1V.$$

Соотношения предшествования σ_1, σ_2 будем называть непосредственными следствиями из σ в полугруппе A_2.

Соотношение предшествования $A<B$ будем называть следствием из некоторой совокупности соотношений предшествования Φ, если $A=B$, или, если в A_2 найдутся такие элементы S_j $(j=0, 1, \cdots, m)$ $A=S_0$, $B=S_m$

$$A=S_0 \leqq S_1 \leqq \cdots \leqq S_{m-1} \leqq S_m=B,$$

что каждое из соотношений $S_i \leqq S_{i+1}$ $(i=0, \cdots, m-1)$ является непосредственным следствием какого-нибудь соотношения из Φ.

По аналогии с [3] определяются „совокупность, определяющая порядок в A_2" и „минимальная совокупность, определяющая порядок".

1.4. Для любого изотонного преобразования A множества $\Omega(\leqq')$ имеем $A\Omega_1 \subset \Omega_1$, если:

а) $Ak_1 \in \Omega_1$ для некоторого $k_1 \in \Omega_1$, или

б) число элементов множества $A\Omega_1$ не меньше двух: $|A\Omega_1| \geqq 2$.

Доказательство. Случай а) доказывается непосредственно. б). Пусть $|A\Omega_1| \geqq 2$, $\xi_i (i=1, 2)$ два разные элемента множества $A\Omega_1$ и k_i-те его элементы, для которых $Ak_i=\xi_i$ $(i=1, 2)$, и для определенности пусть $k_1 \leqq' k_2$. Тогда так как $\xi_1 \neq \xi_2$ и $k_1 \neq k_2$, то $k_1 <' k_2 \Rightarrow Ak_1 \leqq' Ak_2$ или $\xi_1 <' \xi_2$. Последнее соотношение согласно а) показывает правильность утверждения б).

Таким образом, для всякого изотонного преобразования A множества Ω имеем либо $A\Omega_1 \subset \Omega_1$ либо $A\Omega_1=\xi_0$.

1.5. Можно доказать следующее предложение (пользуясь формулировками п. 1.4):

Если изотонное преобразование H множества Ω такое, что $H=UV(U, V \in A)$ и $Hk=k$ для каждого k из линейно упорядоченного множества Ω, то $Uk=k$ и $Vk=k$.

§ 2. Совокупности соотношений предшествования, определяющие порядок в полугруппах изотонных и монотонных преобразований

2.1. В начале этого параграфа рассмотрим полугруппу B тех изотонных преобразований, которые совпадают с тождественным преобразованием E для элементов из Ω_1, т. е. $B \in B \Leftrightarrow (\forall k \in \Omega_1)(Bk=k)$. Для фиксированного $\alpha_0 \in \Omega_2$ и любого $i \in \Omega_1$ $(i=1, \cdots, n-1)$ обозначим через Φ_{α_0} совокупность всех соотношений предшествования вида $\alpha^0_{ii+1}: H^0_i \prec H^0_{i+1}$, где $H^0_i \alpha_0=i$ и $H^0_i k=k$ для $k \in \Omega \setminus \{\alpha_0\}$.

2.2 Лемма. Совокупность соотношений предшествования Φ_{α_0} определяет поточечный порядок в полугруппе B преобразований упорядоченного множества Ω с конечной цепью.

Доказательство разобьем на два подслучая:

а) Пусть Γ — некоторое подмножество множества Ω_2, а преобразования $B_1, B_2 \in B$, такие, что

$$B_1\Gamma = i \in \Omega_1 \setminus \{n\},\ B_2\Gamma = i+1,$$

$$(\forall k \in \Omega_1)(B_j k = k),\ (\forall k \in \Omega_2 \setminus \Gamma)(B_j k = \xi_{k_c}) \qquad (j=1,\ 2).$$

Покажем, что соотношение предшествования $B_1 < B_2$ является непосредственным следствием из совокупности Φ_{α_0}. Для этой цели, фиксируем элемент $\beta \in \Gamma$ (если $\alpha_0 \in \Gamma$, будем считать, что $\beta = \alpha_0$) и преобразования $T_1, T_2 \in B$ определим, полагая: $(T_1\beta = B_1\alpha_0)$ $(\forall k \in \Omega \setminus \{\beta\})$ $(T_1 k = B_1 k)$, $(T_2\alpha_0 = \beta)(T_2\Gamma = \alpha_0)$, $(\forall k \in \Omega \setminus \Gamma \cup \{\alpha_0\}))(T_2 k = k)$. Непосредственная проверка показывает, что $B_1 = T_1 H_i^0 T_2$, $B_2 = T_1 H_{i+1}^0 T_2$.

б) Пусть Γ_i $(i \in J)$ непересекающиеся подмножества множества Ω_2, а преобразования B_j $(j=1,\ 2)$ такие, что: $S_i = B_1\Gamma_i \leqq' B_2\Gamma_i = t_i$. Так как число элементов множества Ω_1 равно $n(|\Omega| = n \geqq 2)$, то $|J| \leqq \binom{n+1}{2}$.

Преобразования B_{jj+1} $(j=0, \cdots, p-1)$ определим следующим образом: $B_1 = B_{01}$, $B_2 = B_{p-1p}$ и, если для $S_m + a (<' t_m)$, преобразование B_{jj+1} определено так, что $B_{jj+1}\Gamma_i = B_2 k$ $(i=1, \cdots, m-1,\ m < J)$, $B_{jj+1}\Gamma_m = s_m + a$ и $(\forall k \in \Omega \setminus (\bigcup_1^m \Gamma_i))(B_{jj+1} k = B_1 k)$, то преобразование B_{j+1j+2} определим, полагая:

$$(\forall k \in \Gamma_m)(B_{j+1j+2} k = s_m + a + 1),$$

$$(\forall k \in \Omega \setminus \Gamma_m)(B_{j+1j+2} k = B_{jj+1} k).$$

Согласно а) соотношение предшествования B_{jj+1}: $B_{jj+1} < B_{j+1j+2}$ есть следствие из совокупности Φ_{α_0}. Более того, имеем

$$B_1 = B_{01} \leqq B_{12} \leqq \cdots \leqq B_{p-1p} = B_2.$$

2.3. Теорема. Совокупность соотношений предшествования Φ_{α_0} является минимальной совокупностью, определяющей готовечный порядок в полугруппе преобразований B упорядоченного множества $\Omega(\leqq')$ с конечной цепью.

Доказательство. Предположим, что соотношение предшествования $\alpha_{jj+1}^0 : H_j^0 < H_{j+1}^0$ есть следствие из соотношения α_{ii+1}^0, $H_i^0 < H_{i+1}^0$ (непосредственное, так как $H_j^0 \prec H_{j+1}^0$), т. е., $H_j^0 = UH_i^0 V$, $H_{j+1}^0 = UH_{i+1}^0 V$ $(U,\ V \in B)$. Если предположим, что $V\alpha_0 = \beta \in \Omega_2/\{\alpha_0\}$, тогда

$$H_j^0 \alpha_0 = U H_i^0 V \alpha_0 = UH_i^0 \beta = U\beta = UH_{j+1}^0 \beta = UH_{j+1}^0 U \alpha_0 = H_{j+1}^0 \alpha_0,$$

а по условию $H_j^0 \alpha_0 = j \neq j+1 = H_{j+1}^0 \alpha_0$.

Если предположим, что $V\alpha_0=\alpha_0$, тогда согласно 1.5 $Ui=i$ для каждого $i\in\Omega_1$. Следовательно,

$$j=H_j^0\alpha_0=UH_i^0V\alpha_0=UH_i^0\alpha_0=Ui=i.$$

Соотношение предшествования $H_j^0<H_{j+1}^0$ есть покрытие и, не являясь непосредственным следствием, оно не можеть быть следствием из совокупности $\Phi_{\alpha_0}\setminus\{\alpha_{jj+1}\}$.

2.4. В полугруппе A_1 всех изотонных преобразований множества $\Omega(\leq')$ для тех ее элементов A', для которых $A'<E$ (аналогично и для тех A'', для которых $E<A''$), будем иметь $A'k=k(A''k=k)$ для всех $k\in\Omega_2$.

Отсюда, в частности, легко заметить, что, например, полугруппа изотонных направленных преобразований $N_1=\{A\in A: x\in\Omega_1(\leq')\Rightarrow x\leq' Ax)$ конечной цепи и соответствувющая полугруппа преобразований упорядоченного множества с конечной цепью $\Omega(\leq')$ изоморфны.

2.5. Обозначим через

$$\Phi=\Phi_E'\cup\Phi_E''\cup\Phi_{\alpha_0}\ (\text{см. п. 1.2 и п. 2.1}).$$

Лемма. Совокупность соотношений предшествования Φ определяет поточечный порядок в полугруппе A_1 изотонных преобразований упорядоченного множества $\Omega(\leq')$ с конечной цепью.

Доказательство. Рассмотрим любое соотношение предшествования $\delta: A_1<A_2(A_1, A_2\in A_1)$. Если одно из преобразований A_1, A_2 сравнимо с тождественным преобразованием E, тогда $Ak=k$ для каждого $k\in\Omega_4$ и соотношение предшествования σ есть следствие из Φ [5] Сравнительно нетрудно рассматривается и случай, когда $A_i(i=1, 2)$ одновременно несравнимые с E и $A_i\Omega_1\subset\Omega_1$.

Пусть $A_1\Omega_1=\beta_0\in\Omega_2$. Тогда, согласно п. 1.4 и соотношению σ следует, что и $A_2\Omega_1=\beta_0$. Если Γ — некоторое подмножество множества Ω_2, рассмотрим те преобразования, для которых $i=A_1\Gamma<A_2\Gamma=i+1$ и $A_1k=A_2k$ для прочих $k\in\Omega$. Возможны два подслучая:

а) существует элемент $\gamma\in\Omega_2$, для которого $A_1\gamma=\beta_0$, а следовательно, и $A_2\gamma=\beta_0$;

б) для каждого $k\in\Omega_2$ имеем $A_1k\neq\beta_0$.

Для определенности рассмотрим случай б) и предположим в начале, что Ω_2 — конечное множество. Если в этом случае, $\Omega_2\setminus A\Omega=\varnothing$, тогда для каждого $k\in\Omega_2\setminus\Gamma$ будем иметь $Ak\notin/\Omega_1$ (иначе число элементов множества $A_1(\Omega_2\setminus\{\Gamma, k\})\cup\{\beta_0\}$ было бы на единицу меньше числа элементов множества Ω_2), поэтому $|\Gamma|=1$. Равенство $A_2=S''A_1$, где $S''i=i+1$ и $S''k=k$ для прочих k из Ω, показывает, что соотношение предшествования $A_1<A_2$ является следствием соотношения $E<S''$ из совокупности Φ_E''.

Если $\Omega_2\setminus A\Omega\in\gamma$, то, очевидно, что $\gamma\neq\beta_0$, так как $\beta_0\in A_1\Omega$. Рассматривая два основные подслучая: $\Gamma\cap A_1\Omega=\varnothing$ и $\Gamma\subset A_1\Omega$ (случай

$\Gamma \cap A_1\Omega \neq \varnothing$ и $\Gamma \cap A_1\Omega \neq \Gamma$ сводится к ним) можно показать, что соотношение предшествования $A_1 < A_2$ является следствием совокупности Φ_{α_0}.

Рассмотрим случай б) в предположении, что Ω_2 — бесконечное множество и пусть $\alpha \in \Gamma$, $\gamma \in \Omega_2 \setminus \{\alpha\}$. Тогда преобразования T_1, H_i, T_2 такие, что:

$$T_2\Omega_1 = \gamma, \quad T_2\Gamma = \alpha,$$

если $k \in \Omega \setminus \{\Omega_1 \cup \Gamma\}$ и $A_1 k \in \Omega_1$, $T_2 k = A_1 k = A_2 k$, остальную часть множества Ω_2 преобразование T_2 отображает взаимно однозначно в множество $\Omega_2 \setminus \{\alpha, \gamma\}$;

$$H_i\alpha = \alpha + 1, \quad H_i k = k, \text{ если } k \in \Omega \setminus \{\alpha\};$$

$T_1 k = k$, если $k \in \Omega_1$, $T_1\gamma = \beta_0$, для прочих k из Ω_2 преобразование T_1 определим так, чтобы $T_1(T_2 k) = A_1 k$.

Непосредственно видно, что $A_1 = T_1 H_i T_2$, $A_2 = T_1 H_{i+1} T_2$, где соотношение предшествования $H_i \prec H_{i+1}$ является следствием из совокупности Φ_{α_0} (2.2).

Если $\sigma: A_1 < A_2$, где $A_i\Omega_1 = \beta_0 \in \Omega_2$ $(i = 1, 2)$ $(A_1, A_2 \in \mathrm{A}_1)$, есть произвольное соотношение предшествования, с помощью только что полученных результатов и способа построения конечных цепочек, указанного при доказательстве п. 2.2, заключаем, что соотношение предшествования σ является следствием из совокупности Φ.

2.6. Теорема. Совокупность соотношений предшествования Φ является минимальной совокупностью, определяющей поточечный порядок в полугруппе всех изотонных преобразований A_1 упорядоченного множества $\Omega(\leqslant')$ с конечной цепью.

Доказательство. Исходя из того, что

$$\Phi = \Phi'_E \cup \Phi''_E \cup \Phi_{\alpha_0},$$

$$\Phi'_E \cap \Phi''_E = \varnothing, \quad \Phi'_E \cap \Phi_{\alpha_0} = \varnothing, \quad \Phi''_E \cap \Phi_{\alpha_0} = \varnothing$$

покажем в начале, что ни одно соотношение предшествования любой из совокупностей Φ'_E, Φ''_E, Φ_{α_0} не является следствием (непосредственным) из других совокупностей.

Все случаи можно доказать, предполагая противное. Как пример, докажем, что ни одно соотношение предшествования совокупности Φ'_E не является следствием из совокупности Φ_{α_0} и обратно, ни одно соотношение предшествования совокупности Φ_{α_0} не является следствием из совокупности Φ'_E.

Предположим, что соотношение предшествования $\sigma': S' \prec E$, где $S'k_0 = k_0 - 1$, и $S'k = k$ для прочих k из Ω, является следствием соотношения предшествования $\alpha^0_{ii+1}(H^0_i \prec H^0_{i+1})$: $S' = UH^0_i V$, $E = UH^0_i V$ $U, V \in \mathrm{A}_1$). Преобразование V является правым делителем E, поэтому $|V\Omega_1| \geqslant 2$, и согласно п. 1.4, в этом случае $V\Omega_1 \subset \Omega_1$.

Для любого $k \in \Omega_1$ последовательно должны иметь:

$$H^0{}_i k = H^0{}_{i+1} k = k = Ek,$$

$$S'k = UH^0{}_i Vk = UH^0{}_{i+1}(Vk) = UVk,$$

$$Ek = UH^0{}_{i+1} Vk = UH^0{}_{i+1}(Vk) = UVk,$$

т. е. $S'k = Ek$, для любого $k \in \Omega_1$, что неверно:

$$S' k_0 = k_0 - 1 \neq k_0 = Ek_0 \qquad (k_0 \in \Omega_1).$$

Следовательно, соотношение σ' не может быть непосредственным следствием из совокупности Φ_{α_0}. Так как оно есть покрытие, то оно не можеть быть и следствием из совокупности Φ_{α_0}.

Обратно, предположим, что

$$H_i^0 = US'V, \quad H_{i+1}^0 = UEV = UV \quad (U, V \in A_1),$$

где $\sigma' : S \prec E$.

Для каждого $k \in \Omega_1$ по условию $H_i^0 k = H_{i+1}^0 k = k$, а по предположению — $H_{i+1}^0 k = UVk$. Поэтому, для каждого $k \in \Omega_1$ можно утверждать (1.5), что $Uk = Vk = k$ и следовательно, с одной стороны

$$H_i^0 k = US'Vk = U[S'(Vk)] = U(S'k) = S'k,$$

а, с другой стороны,

$$k_0 = H_i^0 k_0 \neq S'k_0 = k_0 - 1.$$

Доказательство теоремы будет завершено, если докажем еще, что

Ни одно из соотношений предшествования любой из совокупностей Φ'_E, Φ''_E, Φ_{α_0} не является следствием остальных соотношений этой же совокупности.

Докажем формулированное утверждение для совокупности Φ_{α_0}: Допустим, что соотношение предшествования $\alpha^0_{ii+1} : H_i^0 < H_{i+1}^0$ есть непосредственное следствие из соотношения $\alpha^0_{jj+1} : H_j^0 < H_{j+1}^0$, т. е.

$$(1) \qquad H_i^0 = UH_j^0 V, \quad H_{i+1}^0 = UH_{j+1}^0 V \quad (U, V \in A_1).$$

Допустим, также что $\alpha_0 \notin V\Omega$. Тогда, по определению $H_j^0 k = H_{j+1}^0 k = k$ для $k \in \Omega \setminus \{\alpha_0\}$, а для всех $k \in \Omega$ имели бы

$$k = H_i^0 k = UH_j^0 Vk = U[H_j^0(Vk)] = U(Vk) = UVk;$$

$$k = H_{i+1}^0 k = UH_{j+1}^0 Vk = U[H_{j+1}^0(Vk)] = U(Vk) = UVk,$$

т. е. $H_{i+1}^0 = H_i^0 = E$, что неверно. Следовательно, $\alpha_0 \in V\Omega$.

Равенство $H_i^0 = UH_j^0 V$ показывает, что $V\Omega_1 \geq 2$ ([4], II, 3). Согласно 1.4 имеем $V\Omega_1 \subset \Omega_1$.

Если для $k \in \Omega_1$ положим $Vk = \xi_k$, то $\xi_k \in \Omega_1$ и

$$k = H_i^0 k = UVk = U(Vk) = U\xi_k .$$

Мы получили, что $U\xi_k \in \Omega_1$. Из п. 1.4 следует, что $U\Omega_1 \subset \Omega_1$. И так, $V\Omega_1 \subset \Omega_1$, $U\Omega_1 \subset \Omega_1$.

Пусть $V\beta = \alpha_0$. Включение $U\Omega_1 \subset \Omega_1$ показывает, что $\beta \in \Omega_2$. Предположим, что $\beta \neq \alpha_0$. Тогда имели бы

$$\beta = H_i^0 \beta = UH_j^0 V\beta = U[H_j^0(V\beta)] = U(H_j^0 \alpha_0) = Uj \in \Omega_1.$$

И так, если выполняются равенство (1), то $V\alpha_0 = \alpha_0$. Отсюда, для каждого $k \in \Omega \setminus \{\alpha_0\}$ следует, что

$$k = H_i^0 k = UH_j^0 Vk = U[H_j^0(Vk)] = U(Vk) = UVk,$$

т. е. что $Uk = k$, $Vk = k$ для каждого $k \in \Omega_1$ (1.5).

Далее —

$$i = H_i^0 \alpha_0 = UH_j^0 V\alpha_0 = U[H_j^0(V\alpha_0)] = UH_j^0 \alpha_0 = Uj = j,$$

$$i+1 = H_{i+1}^0 \alpha_0 = UH_{j+1}^0 V\alpha_0 = U[H_{j+1}^0(V\alpha_0)]$$

$$= UH_{j+1}^0 \alpha_0 = U(j+1) = j+1.$$

что возможно только, если $i = i$.

Пользуясь формулировкой п. 1.5 можно доказать справедливость сформулированного утверждения и для совокупностей Φ'_E и Φ''_E.

2.7. В работе Зыбиной [2] доказана следующая теорема — 3.5: Пусть Ω — конечная структура. Совокупность соотношений Φ_E определяет порядок в полугруппе изотонных преобразований Ω тогда и только тогда, когда Ω является линейно упорядоченным множеством.

Ее обобщением является следующая

Теорема. Пусть подмножество Ω_1 нетривиально сравнимых элементов упорядоченного множество $\overline{\Omega}$ ($\leqq'$) конечно и обладает максимальным и минимальным элементами. Совокупность соотношений предшествования $\Phi = \Phi'_E \cup \Phi''_E \cup \Phi_{\alpha_0}$ (см. 1.2 и 2.1) определяет поточечный порядок в полугруппе A_1 всех изотонных преобразований множества Ω_1 тогда и только тогда, когда множество Ω является линейно упорядоченным.

Доказательство. Достаточность следует из теоремы 2.6.

Предположим, что множество Ω_1 сравнимых элементов множества Ω ($\leqq'$) конечно, обладает максимальным и минимальным элементами и не является линейно упорядоченным множеством. Покажем, что в полугруппе изотонных преобразований A_1 множества Ω найдется со-

отношение предшествования, не являющееся следствием из совокупности Φ. Это будет означать, что указанная совокупность соотношений не определяет порядок в полугруппе A_1.

Следуя доказательству теоремы 3.5 [2], предположим, что в множестве Ω_1:

$$O=O_1\prec O_2\succ O_3\prec\cdots\prec O_{m-1}\prec O_m,$$

где O_i есть наименьший элемент в множестве $\Omega_1\setminus\{O_1, O_2, \cdots, O_{i-1}\}$ для $i=2, 3, \cdots, m$; $O=O_1$ есть наименьший элемент в множестве Ω_1, и множество $\Omega\setminus\{O_1, O_2, \cdots, O_m\}$ уже не имеет наименьшего элемента.

Пусть число n есть максимум длин цепочек элементов в множестве Ω_1. Обозначим через L одну из цепочек длины n в множестве Ω_1: $\alpha_1\leqq\alpha_2\leqq\cdots\leqq\alpha_m\leqq\cdots\leqq\alpha_n$. Очевидно, $\alpha_j=O_j$ для $j=1, 2, \cdots, m$ $\alpha_n=1$ (1-максимальный элемент) и $\alpha_i\prec\alpha_{i+1}$ для всех $i=1, 2, \cdots, n-1$ Используя цепочку L, определим преобразование A множества Ω, полагая: $A\xi=\xi$ для всех $\xi\in\Omega/\Omega_1$, $A\xi=\alpha_i$, если $\xi\in\Omega_1$ и α_i имеют одну и ту же длину максимальной цепи с первым элементом α_1. Преобразование B множества Ω определим, полагая: $B\alpha_m=\alpha_{m+1}$, $B\xi=A\xi$ для всех $\xi\in\Omega\setminus\{\alpha_m\}$. Преобразования A и B являются изотонными преобразованиями множества Ω и $A\prec B$. Предположим, что указанное соотношение является следствием из совокупности Φ'_E. Так как оно есть покрытие ([5]; т. 1.12), то найдутся элементы U, $V\in A_1$ и соотношение $\sigma: X\prec E$ из Ψ'_E такие, что имеют место равенства $A=UXV$ $B=UEV$.

Предположим, что $V=E$. Тогда $A=BX$ и следовательно, с одной стороны, имеем $A\Omega\subset B\Omega$ ([4], 11, 3), а с другой — $A\Omega=B\Omega\cup\{\alpha_m\}$. Полученное противоречие показывает, что $V\neq E$. Преобразование V является правым делителем преобразования A, поэтому $V\Omega_1\subset\Omega_1$ (1.4). Последовательно, пользуясь результаты т. 1.12, пр. 1,27 [5] и доказательством т. 3.5 [2] доходим до противоречия.

Предположим, что указанное покрытие является следствием из совокупности Φ''_E: $A=U_1EV_1$, $B=U_1YV_1$, где $E\prec Y$. Последовательные рассуждения показывают, что $V\neq E$, и что $V\Omega_1\subset\Omega_1$. Повтаряя доказательство т. 3.5 [2], опять доходим до противоречия.

Нетрудно заметить, что соотношение предшествования $A\prec B$ не может быт следствием (непосредственным) также и из совокупности соотношений Φ_{α_0}.

2.8. В полугруппе A_2 всех монотонных (изотонных и антитонных) преобразований упорядоченного множества $\Omega(\leqq')$ с конечной цепью, упорядоченной поточечным порядком, для каждого ее элемента A и каждого соотношения предшествования $k_1\prec' k_2$ по определению имеем либо $Ak_1\leqq' Ak_2$, либо $Ak_2\leqq' Ak_1$. Утверждение п. 1.4 справедливо и для любого A элемента полугруппы A_2.

Обозначим через G группу всех взаимно однозначных преобразований множества Ω на себя. О-автоморфизмами упорядоченного множества $\Omega(\leq')$ с конечной цепью являются только те обратимые преобразования $E_\tau \in G$, для которых $E_\tau k = k$ для каждого $k \in \Omega_1$ и которые отображают взаимно однозначно на себя множество Ω_2. Дуальными о-автоморофизмами упорядоченного множества с конечной цепью являются только те обратимые преобразования $G_\tau \in G$, для которых $G_\tau k = n-k+1$ для каждого $k \in \Omega_1$ и которые отображают множество Ω_2 взаимно однозначно на себя.

2.9. Лемма. Совокупность соотношений предшествования Φ из 2.5 определяет поточечный порядок в полугруппе монотонных преобразований A_2 упорядоченного множества $\Omega(\leq')$ с конечной цепью.

Доказательство следует из лемм 2.3 [5] и 2.5.

2.10. Обозначим через $\widetilde{\Phi}_{\alpha_0}$ совокупность соотношений предшествования вида $\alpha^0_{ii+1}: H^0_i < H^0_{i+1}$, где $i = 1, \ldots, \frac{n}{2}$, если n-четно и $i = 1, \ldots, \frac{n-1}{2}$, если n-нечетно, и преобразования H^0_i, H^0_{i+1} определены следующим образом (см. 2.1): $H^0_i \alpha_0 = i (\alpha \in \Omega_2)$ и $H_i k = k$. Положим $\widetilde{\Phi} = \Phi'_E \cup \widetilde{\Phi}_{\alpha_0}$ (см. 1.2).

Теорема. Совокупность соотношений предшествования $\widetilde{\Phi}$ является минимальной совокупностью, определяющей поточечный порядок в полугруппе всех монотонных преобразований упорядоченного множества $\Omega(\leq')$ с конечной цепью.

Доказательство. Рассмотрим соотношение $\alpha_{n-i,\, n-i+1} : H^0_{n-i} < H^0_{n-i+1}$ и взаимно однозначное преобразование G, при котором $Gk = k$ для всех $k \in \Omega_2$ и $Gk = n-k+1$ для всех $k \in \Omega_1$. Очевидно, $G \in Q$ (1.2) и $H^0_{n-i} = GH^0_{i+1}G$, $H^0_{n-i+1} = GH^0_i G$. Следовательно, любое соотношение вида $\alpha^0_{n-i,\, n-i+1} \in \Phi_{\alpha_0}$ является следствием из соотношения предшествования вида $\alpha_{ii+1} \in \widetilde{\Phi}_{\alpha_0}$.

Кроме того, согласно лемме 1.18 [5], так как $G \cap Q \neq \varnothing$, то любое соотношение из совокупности Φ''_E является непосредственным следствием некоторого соотношения из совокупности Φ'_E и обратно.

Рассуждениями аналогичными доказательству т. 2.6 можно показать, что совокупность $\widetilde{\Phi}$ является минимальной совокупностью в полугруппе A_2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Биркгоф, Г.: Теория структур. ИЛ, М., 1952.
2. Зыбина, Л. Д. Совокупности соотношений, определяющие упорядоченность частичных эндоморфизмов. Уч. зап. Ленинград. гос. пед. ин-та, 274 (1965), 122—142.
3. Ляпин, Е. С.: Соотношения, определяющие упорядоченность в упорядоченных полугруппах. Изв. АН СССР, сер. матем., 25 (1961), 671—684.
4. Ляпин, Е. С. Полугруппы. М., 1960.

5. Тодоров, К. Ж.: Соотношения, определяющие порядок в полугруппах с упорядоченностью. Уч. зап. Ленинград. гос. пед. ин-та, **464** (1971), 144—172.

Постъпила на 16. XI. 1971 г.

RELATIONS DEFINING THE ORDER IN SEMIGROUPS OF TRANSFORMATIONS OF A SET WITH A FINITE CHAIN

K. J. Todorov

(SUMMARY)

The ordered set $\Omega(\leqq')$ is thought to consist of a finite chain Ω_1 and a trivial ordered subset Ω_2. We denote through Φ_E the set of covers of the kind $S'<E$, $E<S''$ (E being the identical transformation); through Φ_{α_0} the set of covers of the kind $H_i^1<H_{i+1}^1$ where $H_i^0\alpha_0=i$ for any fixed element $\alpha_0\in\Omega_2$ and for any arbitrary $i\in\Omega_1$ and where $H_i^0k=k$ for $k\in\Omega\setminus\{\alpha_0\}$; $\Phi=\Phi_E\cup\Phi_{\alpha_0}$. A_1 is the semigroup of the isotonic transformation of the set Ω $(\leqq')$; and $B_1=\{B\in A:(\forall k\in\Omega_2)(Bk=k)\}$ is the subsemigroup of the semigroup A_1.

The following theorem is proved:

The set of relations Φ (Φ_{α_0}) is a minimal set defining the point order in the semigroup $A_1(B)$ (Basic definitions are given in [3] and [5]).

An analogical theorem is proved also for the semigroup of the monotonic (isotonic and antitonic) transformations of the set $\Omega(\leqq')$.