О НЕПРЕРЫВНЫХ И ПОЛУНЕПРЕРЫВНЫХ О-МЕТРИКАХ

Стоян Й. Недев

В основном, работа посвящена доказательству утверждений, сформулированных в заметке [1]. Впервые публикуются предложения 1, 2 и 3, теорема 10 и следствие 3.

§ 1. Основные определения и вспомогательные утверждения

Определение 1 (С. Й. Недев [2]). Топологическое пространство X называется о-метризуемым о-метрикой ρ, если $\rho(a,y)$ есть неотрицательная функция на квадрате $X\times X$, удовлетворяющая следующим двум условиям: 1) $\rho(x,y)=0$ тогда и только тогда, когда $x=y$; 2) если $F\subset X$, то F замкнуто в X тогда и только тогда, когда для каждой точки $x\notin F$ выполнено соотношение

$$\rho(x,F)=\inf\{\rho(x,y)/y\in F\}>0.$$

Если функция ρ симметрична, т. е. если для любых двух точек $x,y\in X$ имеет место равенство $\rho(x,y)=\rho(y,x)$, то ρ называется симметрикой, а пространство X —симметризуемым.

Если, кроме условиям 1) и 2), функция ρ удовлетворяет еще неравенству треугольника, т. е. если для любых трех точек $x,y,z\in X$ имее место неравенство $\rho(x,y)\leq\rho(x,z)+\rho(z,y)$, то ρ называется Δ—метрикой, а пространство X Δ-метризуемым.

Условие (h). Для любой точки $x\in X$ и для любого $\varepsilon>0$ $x\in\langle O^{\rho}_{\varepsilon}x\rangle$ $=\operatorname{Int}O^{\rho}_{\varepsilon}x$, где $O\rho_x\to O^{\rho}_{\varepsilon}x=\{y\in X/\rho(x,y)<\varepsilon\}$.

О-метрику, ρ удовлетворяющую условию (h) мы называем сильной о-метрикой, а пространство X, чью топологию она задает — сильно- о-метризуемым о-метрикой ρ.

Условие (AH) (П. С. Александров, В. В. Немыцкий [3]). Для любой точки $x\in X$ и любого $\varepsilon>0$ существует $\delta=\delta(x,\varepsilon)>0$ такое, что из $\rho(x,y)<\delta$ и $\rho(x,z)<\delta$ следует $\rho(y,z)<\varepsilon$.

Слабое условие Коши (А. В. Архангельский [4]). Если множество A не замкнуто, то для любого $\varepsilon>0$ существуют точки $x,y\in A$ такие, то $0<\rho(x,y)<\varepsilon$.

Условие (K). (А. В. Архангельский [5]). Если F и Φ — непересекающиеся бикомпакты, то $\rho(F,\Phi)>0$.

Условие (*A*) (А. В. Архангельский [5]). Если множество F — замкнуто, а Φ — бикомпакт и если $F \cap \Phi = \varnothing$, то $\rho(F, \Phi) > 0$.

Теорема 1 (А. В. Архангельский [5]). Если T_2-пространство X симметризуемо симметрикой, удовлетворяющей условию (А), то X метризуемо.

Определение 2 (П. С. Александров, П. С. Урысон [6]). Последовательность покрытий $\{\omega_n / n = 1, 2, \ldots\}$ называется измельчающейся если для каждой точки x и ее окрестности Ox найдется n, для которого $\omega_n x = \cup \{U / x \in U \in \omega_n\} \subset Ox$.

Теорема 2 (П. С. Александров, В. В. Немыцкий [3]). T_1-пространство X тогда и только тогда симметризуемо симметрикой, удовлетворяющей условиям (h) и (AH), когда X обладает измельчающейся последовательностью открытых покрытий.

Теорема 3 (С. Й. Недев [7], теорема 31*). Есло пространство X о-метризуемо о-метрикой ρ и для каждой точки $x_0 \in X$ функция $f_{x_0}(x) = \rho(x_0, x)$ равномерно непрерывна относительно ρ, то X метризуемо.

§ 2. Непрерывные и полунепрерывные о-метрики

Определение 3. Если пространство X о-метризуемо о-метрикой ρ и если для каждой точки $x \in X$ функция $f_{x_0}(x) = \rho(x_0, x)$ непрерывна на X, то ρ называется полунепрерывной о-метрикой.

Определение 4. Если пространство X о-метризуемо о-метрикой ρ и отображение $\rho: X \times X \to E^1$ (E^1—пространство вещественных чисел) непрерывно, то о-метрика ρ называется непрерывной о-метрикой.

Лемма 1. О-метрика ρ, порождающая топологию пространства X, является сильной о-метрикой тогда и только тогда, когда для каждой точки $x_0 \in X$ функция $f_{x_0}(x) = \rho(x_0, x)$ непрерывна в точке x_0.

Лемма 2. О-метрика ρ, порождающая топологию пространства X, тогда и только тогда является сильной о-метрикой, удовлетворяющей условию (АН), когда отображение $f: X \times X \to E^1$ непрерывно в точках диагонали $D(X) = \{(x, x) / x \in X\}$.

Лемма 3. Если пространство X о-метризуемо полунепрерывной о-метрикой ρ, то X вполне регулярно и все шаровые относительно ρ окрестности точек (т. е. множества вида $O^{\rho}_{\varepsilon} x$) открыты в X.

Доказательства предыдущих трех лемм не представляют никакого труда и поэтому опускаются.

Лемма 4. Пусть пространство X симметризуемо симметрикой ρ. Если все шаровые относительно ρ окрестности точек открыты в X, то ρ удовлетворяет слабому условию Коши.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ и А—незамкнутое подмножество X. Существует тогда точка $x_0 \in X \setminus A$ и последовательность $\{x_n / n = 1, 2, \ldots\}$ различных между собой точек $x_n \in A$ так, что $\lim_{n \to \infty} \rho(x_0, x_n) = 0$. Существует поэтому N такое, что для $n > N$ $\rho(x_0, x_n) < \varepsilon$, т. е.

* Теорема 31 из [7] значительно сильнее приведенной здесь теоремы 3.

$x_0 \in O^\rho_\varepsilon x_n$. Так как $O^\rho_\varepsilon x_n$ открыто, существует N_2 такое, что если $m > N$, то $x_m \in O^\rho_\varepsilon x_n$, т. е. $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$. Кроме того, если $m > n$, то $x_m \neq x_n$.

Теорема 4. Если пространство X о-метризуемо непрерывной о-метрикой ρ, то X вполне регулярно, а ρ является сильной о-метрикой, удовлетворяющей условиям (АН) и (К). Следовательно, X обладает измельчающейся последовательностью открытых покрытий.

Доказательство. В силу леммы 2, о-метрика ρ является сильной о-метрикой, удовлетворяющей условию (АН). Поэтому пространство X симметризуемо симметрикой $d(x,y) = \max\{\rho(x,y), \rho(y,x)\}$, которая, также удовлетворяет условию (АН). По лемме 3, пространство X вполне регулярно. Следовательно, каждый лежащий в X бикомпакт метризуем (см. [7]). Отсюда, чтобы проверить выполнение условия (К), достаточно показать, что из $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x, x_n) = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(y, y_n) = 0$ и $x \neq y$, следует $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) > 0$. Но так как о-метрика ρ непрерывна, то $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = \rho(x, y) > 0$.

Пример 1 (А. В. Архангельский). Пример финальнокомпактного неметризуемого пространства X, симметризуемого полунепрерывной симметрикой.

Точками пространства X служат точки верхней полуплоскости E и точки граничной прямой E^1, т. е. $X = E \cup E^1$. Для любых двух точек $x, y \in X$ пусть $|x-y|$ обозначает обычное эвклидово расстояние между ними, а $a(x,y)$-наименьший угол между прямыми $\overline{(x,y)}$ и E^1 в радианах. Введем на X симетрику d следующим образом:

а) если $x \in E^1$, то $d(x,y) = d(y,x) = |x-y| + a(x,y)$;

б) если $x, y \in E$ и x и y находятся на одной горизонтали, то $d(x,y) = d(y,x) = |x-y|$;

в) если $x, y \in E$, y выше x и z — общая точка прямых $\overline{x,y}$ и E^1, то $d(x,y) = d(y,x) = |x-y| \cdot d(y,z) / |y-z|$.

Полунепрерывность симметрики d в порожденной ею топологии τ_d (в смысле п. 2). Определения 1) на X проверяется непосредственно Также легко заметить, что как E, так и E^1 наследуют из X свои обычние евклидовы топологии. Отсюда следует, что (X, τ_d) финальнокомпактно. С другой стороны, вес пространства (X, τ_d) не меньше континуума и, значит (X, τ_d), не метризуемо.

Следствие 1. Условие (АН) и слабое условие Коши не эквивалентны.

Доказательство. Легко заметить, что построенная в примере 1 симметрика d удовлетворяет слабому условию Коши. С другой стороны, на пространстве (X, τ_d) не существует о-метрики, удовлетворяющей условию (АН), поскольку иначе (X, τ_d) обладало бы измельчающей последовательностью покрытий и, так как оно паракомпактно (финальнокомпактно), по одной теореме Бинга [8] было бы метризуемым.

Пример 2. Пример пространства X без σ-консервативной сети*, симметризуемого полунепрерывной симметрикой.

Точками пространства X служат точки плоскости. Вводим на X симметрику $d(x,y)=|x-y|+a(x,y)$ (обозначения взяты из примера 1).

Впервые пример регулярного симметризуемого пространства без σ-консервативной сети построил Я. А. Кофнер [10]. Пространство его примера также допускает полунепрерывную симметрику.

Отметим, что каждое о-метризуемое непрерывной о-метрикой пространство обладает σ-дискретной сетью.

Лемма 5. Пусть пространство X о-метризуемо полунепрерывной о-метрикой p и сопряженная к p о-метрика q (т. е. о-метрика q, определенная равенством $q(x,y)=p(y,x)$ порождает на X о-хаусдорфову топологию τ_q (т. е. из $\lim\limits_{n\to\infty} q(x,x_n)=0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} q(y,x_n)=0$ следует $x=y$). Тогда, если X' всюду плотно в (X,τ_q), то (X,τ_p) допускает взаимно однозначное соответствие в $I^{|X'|}$. (Здесь I означает единичный отрезок $[0,1]$, а $|X'|$ —мощность множества X'.)

Доказательство. В силу сделанных в лемме предположений, семейство $\varphi=\{p(x_0,x)/x_0\in X'\}$ непрерывных на (X,τ_p) функций, разделяет точки множества X. Очевидно, $|\varphi|=|X'|$.

Так как любая симметрика совпадает со своей сопряженной о-метрикой, то имеет место:

Теорема 5. Если пространство X симметризуемо полунепрерывной симметрикой и если множество X' всюду плотно в X, то X допускает взаимно однозначное соответствие в $I^{|X'|}$.

Так как пространство $\aleph_0$**-метризуемо, имеет место:

Следствие 2. Если сепарабельное пространство X симетризуемо полунепрерывной симметрикой, то X уплотняется (т. е. допускает взаимно однозначное и непрерывное соответствие) в метрическое пространство, причем это уплотнение является гомеоморфизмом на всюду-плотное множество, являющееся множеством типа G_δ в X.

Предложение 1. Топология любого нормального сильно симметризуемого пространства порождается полунепрерывной о-метрикой ρ, удовлетворяющей еще следующему условию:

$$\text{(1)} \qquad \text{из } \lim_{n\to\infty}\rho(x_r,x)=0 \text{ следует } \lim_{n\to\infty}\rho(x,x_n)=0.$$

Условие (1) указывает на то, что полунепрерывная о-метрика ρ несет информацию о симметризуемости пространства (см. [2]).

Доказательство. Пусть нормальное пространство X сильно симметризуемо сильной симметрикой d. Для каждой точки $x_0\in X$ фик-

* (А. В. Архангельский, [9]). Семейство $\{s_\alpha/\alpha\in A\}$ подмножеств пространства X называется сетью в X, если для любого открытого в X множества U и каждой точки $x\in U$ найдется $\alpha\in A$ такое, что $x\in s_\alpha\subset U$.

** $\aleph_0$ обозначает кардинальное число бесконечных счетных множеств.

сируем последовательность натуральных чисел $n_1(x_0) < n_2(x_0) < \ldots$, так, чтобы выполнялись включения: $\left[O^d_{\frac{1}{n_{i+1}(x_0)}} x_0 \right] \subset \left\langle O^d_{\frac{1}{n_i(x_0)}} x_0 \right\rangle^*$).

Используя совершенную нормальность пространства X, для каждого натурального k строим непрерывную функцию $f^k_{x_0}(x)$ со следующими свойствами: (i) $\frac{1}{k+1} \leqq f^k_{x_0}(x) \leqq \frac{1}{k}$,

$$(ii)\left(f^k_{x_0}\right)^{-1}\left(\frac{1}{k+1}\right) = \left[O^d_{\frac{1}{n_{k+1}(x_0)}} x_0\right] \left(f^k_{x_0}\right)^{-1}\left(\frac{1}{k}\right) = X \setminus \left\langle O^d_{\frac{1}{n_k(x_0)}} x_0 \right\rangle.$$

После этого искомую о-метрику ρ определяем следующим образом:

а) если $x \notin \left\langle O^d_{\frac{1}{n_1(x_0)}} x_0 \right\rangle$, полагаем $\rho(x_0, x) = 1$;

б) если $x \neq x_0$ и k—наибольшее натуральное число для которого $x \in \left\langle O^d_{\frac{1}{n_k(x_0)}} x_0 \right\rangle$, полагаем $\rho(x_0, x) = f^k_{x_0}(x)$;

в) если $x = x_0$, полагаем $\rho(x_0, x) = 0$.

Без труда проверяется, что $\tau_\rho = \tau_d$, что о-метрика ρ полунепрерывна и что она удовлетворяет условию (1).

Аналогичными рассуждениями убеждаемся, (что) то справедливо:

Предложение 2. Топология любого нормального пространства X с первой аксиомой счетности порождается полунепрерывной о-метрикой; причем, если ρ о-метрика, порождающая топологию пространства X, то существует полунепрерывная о-метрика ρ^*, также порождающая топологию пространства X и такая, что $\rho^*(x, y) \geqslant \frac{1}{2}\rho(x, y)$ для любых двух точек $x, y \in X$.

Из Предложения 2 и Леммы 5 легко следует:

Предложение 3. Если X—неметризуемый бикомпакт с первой аксиомой счетности, то для любой о-метрики ρ, порождающей топологию пространства X найдется последовательность точек $\{x_n \in X / n = 1, 2, \ldots\}$ такая, что $x_1 \neq x_2$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, x_1) = \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, x_2) = 0$.

Отметим, что пространство X можно предполагать финальнокомпактным пространством с первой аксимой счетности, неуплотняющимся на метрическое пространство.

Теорема 6 (Н. Соок [11]). Топология любого пространства с измельчающейся последовательностью открытых покрытий, квадрат которого нормален, порождается непрерывной симметрикой.

Доказательство. Пусть квадрат $X \times X$ пространства X с измельчающейся последовательностью открытых покрытий нормален и пусть d сильная симметрика, порождающая топологию пространства X и удов-

* $[A]$ означает замыкание множества A, а $\langle A \rangle = X \setminus [X \setminus A]$

летворяющая условию (АН) (такая существует по Теореме 2). Для каждой точки $x \in X$ фиксируем последовательность натуральных чисел $n_1(x) < n_2(x) < \ldots$, так, чтобы выполнялись неравенства:

$$\operatorname{diam}\left(O^d_{\frac{1}{n_k(x)}}x\right) \leq \frac{1}{k} \qquad (k=1,2,\ldots),$$

что возможно благодаря условию (АН). Обозначаем

$$U_k = \cup\left\{\left(O^d_{\frac{1}{n_k(x)}}\right)x \times \left(O^d_{\frac{1}{n_k(x)}}x\right) \mid x \in X\right\},$$ после чего, используя нормальность пространства $X \times X$, строим последовательность $\{V_k \mid k=1, 2\ldots\}$ открытых в $X \times X$ множеств так, чтобы выполнялись включения),

$$D(X) \subset V_{k+1} \subset [V_{k+1}]_{X\times X} \subset V_k \cap U_{k+1} \qquad (k=1,2,\ldots).$$

Из за совершенной нормальности пространства $X \times X$, для каждого натурального k существует непрерывная на $X \times X$ функция $f_k(x,y)$, такая, что $\frac{1}{k+1} \leq f_k(x,y) \leq \frac{1}{k}$, $f_k^{-1}\left(\frac{1}{k+1}\right) = [V_{k+1}]_{X\times X}$, $f_k^{-1}\left(\frac{1}{k}\right) = X \times X \setminus V_k$.

При помощи семейства функций $\{f_k \mid k=1,2,\ldots\}$ определяем на X о-метрику ρ следующим образом:

а) если $x=y$, то $\rho(x,y)=0$;

б) если $(x,y) \notin V_1$, то $\rho(x,y)=1$;

в) если k наибольшее натуральное число, для которого $(x,y) \in V_k$, то $\rho(x,y)=f_k(x,y)$.

Непосредственно проверяется, что о-метрика ρ непрерывна и что она порождает топологию пространства X. Поэтому топология пространства X порождается непрерывной симметрикой $b(x,y) = \max\{\rho(x,y), \rho(y,x)\}$.

Теорема 7. Если пространство X симметризуемо такой симметрикой ρ, что для каждого счетного замкнутого множества $F \subset X$ функция $f_F(x)=\rho(F,x)$ непрерывна на X, то X метризуемо, так как тогда ρ удовлетворяет условию (А).

Пример 3. Пример неметризуемого пространства X, Δ-метризуемого такой Δ-метрикой ρ, что для каждого замкнутого подмножества $F \subset X$ функция $f_F(x)=\rho(F,x)$ непрерывна.

Пусть $X=[0,1)$—полуоткрытый единичный отрезок. Определим на X о-метрику ρ по следующему правилу:

$$\rho(x,y)=\begin{cases} |x-y|, & \text{если } y \geq x; \\ 1, & \text{если } y < x. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что ρ — Δ-метрика и что (X,τ_ρ)-пространство стрелки. Пусть F—замкнуто в X и $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x, x_n)=0$.

Если $x \in F$, то $0 \leq \lim\limits_{n\to\infty} \rho(F, x_n) \leq \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x, x_n) = 0$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(F, x_n) = \rho(F, x)$.

Если $x \notin F$, то для некоторого $\varepsilon > 0$ $[x, x+\varepsilon) \cap F = \varnothing$, а начиная с некоторого m, $\rho(x, x_n) < \varepsilon$, т. е. $x_n \in [x, x+\varepsilon)$. Поэтому, для $n > m$, $\rho(F, x_n) \geq \rho(F, x)$. С другой стороны, т. к. ρ — Δ-метрика, $\rho(F, x_n) \leq \rho(F, x) + \rho(x, x_n)$. Следовательно, опять $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(F, x_n) = \rho(F, x)$.

Таким образом, замечание, сделанное в [1] непосредственно за формулировкой теоремы 6 не верно!

Теорема 8. Если пространство X Δ-метризуемо непрерывной Δ-метрикой, то X метризуемо.

Доказательство. Если p-непрерывная Δ-метрика на X, то метрика $\rho(x, y) = \max\{p(x, y), p(y, x)\}$ порождает топологию пространства X.

Лемма 6. Если пространство X симметризуемо непрерывной симметрикой ρ, то для каждого бикомпакта $F \subset X$ функция $f_F(x) = \rho(F, x)$ непрерывна на X.

Доказательство. Пусть $x_0 \in X$ и $\varepsilon > 0$. Допустим, что для каждого n существует точка x_n такая, что $\rho(x, x_n) < \frac{1}{n}$ и $\rho(F, x_n) > \rho(F, x) - \varepsilon$. Пусть для каждого n точка $y_n \in F$ выбрана так, что $\rho(F, x_n) > \rho(y_n, x_n) - \frac{1}{n}$ и пусть точка $y_0 \in F$ и подпоследовательность $\{y_{n_k} / k = 1, 2, \ldots\}$ последовательности $\{y_n / n = 1, 2, \ldots\}$ такова, что $\lim\limits_{k\to\infty} \rho(y_0, y_{n_k}) = 0$. Тогда $\rho(y_0, x) = \lim\limits_{k\to\infty} \rho(y_{n_k}, x_{n_k}) = \lim\limits_{k\to\infty} \left(\rho(y_{n_k}, x_{n_k}) - \frac{1}{n_k}\right) \geq \lim\limits_{k\to\infty} \rho(F, x_{n_k})$, в то время как для каждого k $\rho(F, x_{n_k}) < \rho(F, x_0) + \varepsilon = \rho(y_0, x)$.

Допустим, что для каждого n существует точка $x_n \in X$ такая, что $\rho(x, x_n) < \frac{1}{n}$ и $\rho(F, x_n) > \rho(F, x) + \varepsilon$. Пусть точка $y_0 \in F$ выбрана так, что $\rho(F, x_0) = \rho(y_0, x_0)$ (точка y_0 существует из-за непрерывности ρ и компактности F). Тогда, для каждого n $\rho(y_0, x_n) \geq \rho(F, x_n) > \rho(F, x) + \varepsilon = \rho(y_0, x) + \varepsilon$, что противоречит непрерывности ρ.

Пример 4. Пример неметризуемого, симметризуемого непрерывной симметрикой пространства X, представленного в виде $X = X_1 \cup X_2$, где X_1, счетно и всюду плотно, а X_2 дискретно в X.

Пусть $X' = E \cup E^1$. Для каждой $x \in X'$ пусть h_x обозначает ординату, а l_x—абсциссу точки x (в некоторой фиксированной ортогональной координатной системе, имеющей в качестве оси абсцисс прямую E^1). Определим на X' симметрику d по следующему правилу:

а) если $h = \max\{h_x, h_y\} > 0$, то $d(x, y) = |l_x - l_y| + |x - y|$;

б) если $h = 0$ и $x \neq y$, то $d(x, y) = 1 + |x - y|$;

в) если $x = y$, то $d(x, y) = 0$.

Непрерывность симметрики d следует непосредственно из ее определения. Топология τ_d (определенная симметрикой d в смысле п. 2). Определения (1) индуцирует на E обычную евклидову топологию, а на E^1 — дискретную топологию. Пространство (X', τ_d) связано, локально связано, сепарабельно, локально удовлетворяет второй аксиоме счетности, но второй аксиоме счетности не удовлетворяет. Пусть теперь $X = X_1 \cup X_2$ — подпространство простра ства X', где X_1 — подмножество множества E, состоящее из всех точек с рациональными координатами и $X_2 = E^1$. Легко видеть, пространство X (а следовательно и пространство X') не нормально.

§ 3. Пространства с измельчающимися последовательностями открытых покрытий

В силу Теоремы 2 и Леммы 2 пространства X', построенное в примере 4, обладает измельчающейся последовательностью покрытий.

В работе Джонса [12] доказано следующее утверждение:

В предположении, что $2^{\aleph} > 2^{\aleph^{\epsilon}}$, каждое нормальное сепарабельное пространство с измельчающейся последовательностью открытых покрытий метризуемо.

Таким образом, встала проблема: можно ли в цитированной теореме Джонса освободиться от предположения $2^{\aleph_1} > 2^{\aleph^{\epsilon}}$*. В связи с этим приведем следующую теорему.

Теорема 9. Каждое неметризуемое, регулярное, сепарабельное пространство X с измельчающейся последовательностью открытых покрытий содержит неметризуемое подпространство Z, представимое в виде $Z = Z_1 \cup Z_2$, где Z_1 счетно и всюду плотно в Z, а Z_2 дискретно в Z.

Доказательство. В качестве Z_2 возьмем множество, состоящее из точек дискретного семейства точек $\{x_\alpha / \alpha \in A\}$, которых нельзя отделить непересекающимися открытыми окрестностями (такое семейство существует, поскольку иначе, в силу сепарабельности, пространство X оказалось бы финальнокомпактным (см. [13]) и, значит, метризуемым). Пусть, еще, Z_1 — счетное, всюду плотное в X множество. Для завершения доказательства остается показать, что пространство $Z = Z_1 \cup Z_2$ не метризуемо. А это так, потому что, из за того, что Z_1 всюду плотно в X, точки множества Z_2 нельзя отделить в Z непересекающимися окрестностями.

Сейчас мы покажем, что в силу известной теоремы Урысона—Титце, цитированная в начале этого параграфа теорема Джонса является следствием Теоремы 9. Именно, обозначим через А класс нормальных, сепарабельных пространств X с измельчающейся последовательностью открытых покрытий, которых можно представить в виде $X = X_1 \cup X_2$, где X_1 счетно и всюду плотно в X, а X_2 дискретно в X. Очевидно, Теорема

* $\mathfrak{a}$ обозначает следующее за $\mathfrak{a}$ кардинальное число.

** В последнее время стало известно, что эта проблема решается отрицательно

9 сводит проблему о метризуемости нормальных сепарабельных пространств с измельчающимися последовательностями открытых покрытий к проблеме о метризуемости элементов класса А.

Теорема 10. Если $X \in$ А, то

1) $2^{|X|} \leq \mathfrak{c}^{\aleph_0}$;

2) X уплотняется в пространство иррациональных чисел.

Доказательство.

(1) Если $X_1 > \aleph_0$, то, очевидно, $|X| = |X_2|$.
Так как X_2 дискретно, на X_2 существует по крайней мере $2^{|X_2|}$ различных непрерывных вещественных функций и так как X_2 замкнуто в X, по теореме Урысона—Титце, каждая такая функция продолжается на все X. Нетрудно заметить, что сужения на X_1 продолжений двух различных таких функций различны между собой и, значит, на X_1 существует по крайней мере $2^{|X_2|}$ различных непрерывных вещественных функций. С другой стороны, пространство X_1 является пространством со счетной базой и, значит, на нем существует самое большое $2^{\mathfrak{c}}$ различных непрерывных функций. Таким образом, $2^{|X|} = 2^{|X_2|} \leq \mathfrak{c}^{\aleph_0}$. Поэтому, если $\mathfrak{c}^{\aleph_1} > \mathfrak{c}^{\aleph_0}$, то класс А состоит из счетных, значит метризуемых пространств.

(2) Так как X обладает измельчающейся последовательностью открытых покрытий, то (см. [3]) топология пространства X порождается симметрикой d, все шаровые окрестности точек относительно которой открыты в X. Пусть $X_1 = \{a_n, n = 1, 2, \ldots\}$ и $\varepsilon > 0$. Так как X совершенно нормально, то оно счетно паракомпактно (см. [14]) и, следовательно, в покрытие $\omega = \{O^d_\varepsilon a_n / n = 1, 2, \ldots\}$ можно вписать локально конечное покрытие $\gamma = \{u_n / n = 1, 2, \ldots\}$. Используя нормальность пространства X, в покрытие γ вписываем поиндексно замкнутое покрытие γ_1 $\{F_n / n = 1, 2, \ldots\}$. По (1) имеем $\operatorname{Ind} X = 0$, следовательно, для каждого n существует отрыто-замкнутое в X множество V_n такое, что $F_n \subset V_n \subset U_n$.

Определим по индукции множества H_n $(n = 1, 2, \ldots)$ следующим образом: $H_1 = V_1$, $H_{n+1} = V_{n+1} / \cup \cup \{H_k / k \leq n\}$.

Легко заметить, что покрытие $\gamma_3 = \{H_n / n = 1, 2, \ldots\}$ открыто-замкнуто и дискретно. Таким образом, для каждого $\varepsilon > 0$ пространство X допускает непрерывно слабое ε-отображение в счетное дискретное пространство: $f_\varepsilon : X \to Y_\varepsilon$.

Поэтому (см. [15]), естественное отображение $f : X \to \Pi \{Y^n / n = 1, 2, \ldots\}$ является уплотнением. Отметим, что отображение f / X_1 является гомеоморфизмом, а множество fX_2—замкнуто в fX.

§ 4. Пространства с равномерной базой

Определение 4. (П. С. Александров [16]). База $B = \{U_\alpha / \alpha \in A\}$ пространства X называется равномерной, если для каждой точки $x - X$ и для любой ее окрестности Ox, множество $M_{x,Ox} = \{\alpha \in A / x \in U_\alpha, U_\alpha \setminus O_x \neq \varnothing\}$ конечно.

В работе [16] установлено, что пространства с равномерной базой могут быть охарактеризованы как слабопаракомпактные пространства с измельчающейся последовательностью открытих покрытий, а также поставлен вопрос о метризуемости нормальных пространств с равномерной базой.

Р. Хис [17] показал, что если любое нормальное пространство с равномерной базой метризуемо, то тогда метризуемо и любое нормальное сепарабельное пространство с измельчающейся последовательностью открытых покрытий.

Основными результатами этого параграфа являются Теоремы 11, 12 и Следствие 3.

Теорема 11. Любое T_1-пространство X с равномерной базой Δ-метризуемо Δ-метрикой p, удовлетворяющей условиям:

а) для любых трех точек $x, y, z \in X$ имеет место неравенство (*) : $p(x,y) \leq \max\{p(x,z), p(z,y)\}$;

б) $\tau_p \subset \tau_q$, где q сопряженная к p Δ-метрике (т. е. $q(x,y) = p(y,x)$ для любых двух точек $x, y \in X$).

Теорема 12. Если X нормальное пространство с равномерной базой, то X о-метризуемо полунепрерывной о-метрикой ρ, удовлетворяющей следующему условию: $\rho(x,y) \leq 2 \max\{\rho(x,z), \rho(z,y)\}$ для любых трех точек $x, y, z \in X$.

Доказательство теоремы 11. Пусть B-равномерная база пространства X. Тогда (см. [16]), $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, где $B_n = \{U_\alpha^n / \alpha \in A_n\}$ есть точечноконечное покрытие пространства X, последовательность покрытий $\{B_n / n = 1, 2, \ldots\}$ измельчается и, для каждого n, B_{n+1} вписано в B_n. Для любой точки $x \in X$ и любого натурального числа n положим $O_n(x) = \cap \{U_\alpha^n \in B_n / x \in U_\alpha^n\}$ и введем на X о-метрику p по следующем правилу:

а) если $y \notin O_1(x)$, то $p(x,y) = 1$;

б) если $y \in O_n(x) \setminus O_{n+1}(x)$, то $p(x,y) = \frac{1}{2^n}$;

в) если $y = x$, то $p(x,y) = 0$.

Так как для каждого n имеют место включения $O_{n+1}(x) \subset O_{\frac{1}{2^n}}(x) \subset O_n(x)$, то о-метрика p порождает топологию пространства X. Так как для каждого n и для любых двух точек $x \in X$ и $y \in O_{n+1}(x)$ следует $O_{n+1}(y) \subset O_n(x)$, то p удовлетворяет условию (*) (и, следовательно, является Δ-метрикой).

Введем на X симметрику d по следующему правилу:

а) если $y \notin B_1 x = \cup \{U_\alpha^1 / x \in U_\alpha^1 \in B_1\}$, то $d(x,y) = 1$;

б) если $y \in B_n x \setminus B_{n+1} x$, то $d(x,y) = \frac{1}{2^n}$;

в) если $x = y$, то $d(x,y) = 0$.

Так как для каждой точки $x \in X$ и для каждого n имеют место

включения $B_{n+1}x \subset O^d_{\frac{1}{2^n}} x \subset B_n x$ и так как последовательность покрытий $\{B_n / n=1,2,\dots\}$ измельчается, то симметрика d порождает топологию пространства X. С другой стороны, для любых двух точек $x, y \in x$, очевидно выполняется неравенство $p(x,y) \geqq d(x,y)$. Следовательно, если $\lim\limits_{n\to\infty} q(x,x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} p(x_n,x) = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} d(x,x_n)=0$, откуда следует $\lim p(x,x_n)=0$. Это означает, что $\tau_p \subset \tau_q$.

Отметим, что описанная конструкция, ставящая в соответствие любой равномерной базе B Δ-метрику p, удовлетворяющую условиям теоремы 11, канонична.

Теперь, при помощи следующих двух лемм, получим из теоремы 11 следствие, дающее некоторую нетривиальную информацию даже в классе метрических пространств.

Лемма 7. Если как о-метрика p, заданная на множестве X, так и ее сопряженная q являются сильными о-метриками, то любое открытое в топологии τ_p (τ) множество U является множеством типа F_σ в топологии τ_q (τ_p).

Доказательство. Пусть U открыто в топологии τ_p. Тогда $U = \bigcup\{F_n / n=1,2,\dots\}$, где для каждого n $F_n = U \setminus O^q_{\frac{1}{n}} (X \setminus U)$ $X \setminus O^q_{\frac{1}{n}} (X \setminus U)$ и, очевидно, F_n—замкнуто в пространстве (X, τ_q)

Лемма 8. Если p есть Δ-метрика на множестве X и если топологии τ_p и τ_q (где $q(x,y)=p(y,x)$—сопряженная к p Δ-метрика) сравнимы по включению, то каждое из пространств (X,τ_p) и (X,τ_q) обладает измельчающейся последовательностью покрытий и хотя бы одно из них метризуемо метрикой $\rho(x,y)=\max\{p(x,y), q(x,y)\}$.

Доказательство. Пусть, например, $\tau_p \subset \tau_q$ Тогда, очевидно, пространство (X,τ_q) метризуемо метрикой $\rho(x,y)=\max\{p(x,y), q(x,y)\}$.

Для любых двух точек $x, y \in X$ положим $d(x,y)=\inf\{p(x,z) + p(z,y)\}$. Очевидно, $d(x,y) \leqq p(x,y)$. Кроме того, если $\lim\limits_{n\to\infty} d(x,y_n)=0$, из $\tau_p \subset \tau_q$ следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} p(x,y_n)=0$. Следовательно, симметрика d порождает топологию пространства (X,τ_p). Пусть теперь $x_0 \in X$ и $\varepsilon > 0$ Если $O^d_\eta x_0 \subset O^p_{\frac{\varepsilon}{2}} x_0$ и $x, y \in O^d_\eta x_0$, то $p(x_0,x)+p(x_0,y) < \varepsilon$, т. е. $d(x,y) < \varepsilon$. Следовательно, $\operatorname{diam}_d(O^d_\eta x_0) < \varepsilon$ и, по Теореме 2, пространство (X,τ_p) обладает измельчающейся последовательностью открытых покрытий.

Следствие 3. Если (X,B) — T_1-пространство с равномерной базой B, то на (X,B) уплотняется нульмерное (в смысле Ind) метрическое пространство X^0, причем при этом уплотнении любое открытое в X^0 множество переходит в множество типа F_σ. Соответствие $X^0 = X^0(B)$ однозначно.

Доказательство. Пусть $p=p(B)$ — Δ-метрика на пространстве

(X, B), удовлетворяющая условиям Теоремы 11. Тогда пространство $X^0=(X, \tau_q)$, где q—сопряженная к p-метрику, искомое. В самом деле, после Лемм 7 и 8, в проверки нуждается только нульмерность пространства X^0. Но $\operatorname{Ind} X^0=0$, так как метрика $\rho(x, y)=\max\{p(x, y), q(x, y)\}$, порождающая топологию пространства X^0, удовлетворяет условию (*) Теоремы 11.

Доказательство. Теоремы 12. Пусть $B=\cup\{B_n/n=1,2,\ldots\}$ — равномерная база пространства X где для каждого n B_n—точечно-конечное открытое покрытие пространства X и последовательность покрытий $\{B_n/n=1,2,\ldots\}$ измельчается. Построим последовательность открытых покрытий $\{\omega_n/n=1,2,\ldots\}$ по индукции: покрытие ω_1 поиндексно с замыканием вписано в B_1, т. е. если $B_1=\{U_\alpha^1/\alpha \in A_1\}$, то $\omega_1=\{V_\alpha^1/\alpha \in A_1\}$ и $[V_\alpha^1] \subset U_\alpha^1$ для каждого $\alpha \in A_1$. ω_2 поиндексно с замыканием вписано в $\omega_1 \wedge B_2$, где $\omega_1 \wedge B_2=\{U \cap V/U \in B_2, V \in \omega_1\}$, ω_3 поиндексно с замыканием вписано в $\omega_2 \wedge B_3$ и т. д. Отметим, что для каждого n покрытие ω_n точечно-конечно и последовательность покрытий $\{\omega_n/n=1,2,\ldots\}$ измельчается. Существование этой последовательности следует из точечной конечности покрытий B_n и нормальности пространства X.

Теперь для каждой точки $x \in X$ и для каждого n обозначим $O_n x=\cap\{V/x \in V \in \omega_n\}$. Ясно, что для каждого n и для каждой точки $x \in X$ выполнены включения $x \in O_{n+1} x \subset [O_{n+1} x] \subset O_n x$. Используя совершенную нормальность пространства X, для каждой точки $x_0 \in X$ и для каждого n строим функцию $f_{x_0}^n(x)$, удовлетворяющую условиям:

1) $f_{x_0}^n(x)$—непрерывна;

2) $\frac{1}{2^{n+1}} \leqq f_{x^0}^n(x) \leqq \frac{1}{2^n}$;

3) $(f_{x_0}^n)^{-1}\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)=[O_{n+1} x], (f_{x^0}^n)^{-1}\left(\frac{1}{2^n}\right)=X \setminus O_n x$.

Теперь определим о-метрику ρ следующим образом:

а) если $y \notin O_1 x$, то $\rho(x, y)=1$;

б) если $y \in O_n x \setminus O_{n+1} x$, то $\rho(x, y)=f_x^n(y)$;

в) если $y=x$, то $\rho(x, y)=0$.

Так как для любой точки $x \in X$ и для любого n выполняются включения $O_{n+1} x \subset O_{\frac{1}{2^n}}^\rho x \subset O_n x$, то о-метрика ρ согласуется с топологией пространства X. Из определения о-метрики ρ легко следует также ее полунепрерывность. Пусть теперь $x, y z$—три произвольно взятые точки пространства X и пусть

$$\frac{1}{2^{n+1}} \leqq \rho(x, y) \leqq \frac{1}{2^n}, \quad \frac{1}{2^{m+1}} \leqq \rho(y, z) \leqq \frac{1}{2^m},$$

где, например, $n \leq m$. Тогда из определения о-метрики ρ находим: $z \in O_m y \subset O_n y \subset O_n x$ и, следовательно, $\rho(x, z) < \frac{1}{2^n} \leq 2 \max\{\rho(x, y), \rho(y, z)\}$.

Теорема 12 доказана.

§ 5. Некоторые вопросы и замечания.

1. Как уже отмечалось в сноске на стр. 242, в литературе уже объявлено о существовании модели теории множеств, в которой условие $2^{\aleph_0} > 2^{\aleph_1}$ не выполнено, и в которой существуют неметризуемые нормальные, сепарабельные пространства с измельчающимися последовательностями открытых покрытий. Несмотря на это остаются открыты такие вопросы:

А. Метризуемо ли, в предположении $2^{\aleph_0} > 2^{\aleph_1}$ (или в предположении обобщеной континуум гипотезы), любое нормальное пространство с равномерной базой?

Б. Метризуемо ли любое пространство $X \in A$ (см. § 3), квадрат которого нормален?

В. Метризуемо ли любое пространство $X \in A$, которое симметризуемо непрерывной симметрикой?

Г. Метризуемо ли любое пространство $X \in A$, которое Δ-метризуемо?

Вопрос Г) не выглядит таким неестественным, если имеется ввиду одна теорема из [18], утверждающая, что любое, одновременно симметризуемое и Δ-метризуемое, пространство, обладает измельчающейся последовательностью покрытий.

Д. Еще: уплотняется ли любое нормальное (сепарабельное) сильносимметризуемое пространство на метрическое?

ЛИТЕРАТУРА

1. Недев, С. Й.: Непрерывные и полунепрерывные о-метрики. ДАН СССР, **193**, № (1970), 531—534.
2. Недев, С. Й.: Об обобщенно метризуемых пространствах. Докл. Болг. АН, **20**, № 6 (1967), 513—516.
3. Александров, П. С., Немыцкий, В. В: Условие метризуемости топологических пространств и аксиома симметрии. Математ. сб., 3 **45**, № 3 (1938), 663—672.
4. Архангельский, А. В.: Поведение метризуемости при факторных отображениях. ДАН СССР, **132**, № 3 (1960), 247—250.
5. Архангельский, А. В.: Отображения и пространства. УМН, **21**, в. 4 (1966), 133—184.
6. Александров, П. С. Урысон, П. С.: Необходимое и достаточное условие, для того, чтобы топологическое пространство было метризуемо. В книге: П. С. Урысон. Труды по топологии и другим областям математики, т. 2, М. — Л., 1951.
7. Недев, С Й.: О-метризуемые пространства. Труды Моск. Мат. Общества, **24** (1971).
8. Bing, R. H. à Metrization of topological spaces. Canad. J. Math., **3**, № 2 (1951), 175—186.
9. Архангельский, А. В.: О внешних базах множеств, лежащих в бикомпактах. ДАН СССР, **132**, № 3 (1960), 495—496.

10. Кофнер, Я. А.: Об одном новом классе пространств и некоторых задачах из теории симметризуемости. ДАН СССР, **187**, № 2 (1969), 270—273.
11. Cook, H. Cartesian products and continuous semi-metrics. Arizona Topology Conference, Ariz. State Univ., Tempe, Arizona, 1968.
12. Jones, F. B.: Concerning normal and completely normal spaces. Bull. Amer. Math. Soc., **43** (1937), 671 — 690.
13. Недев, С. Й.: Симметризуемые пространства и финальная компактность. ДАН СССР, **175**, № 3 (1967), 532 — 534.
14. Dowker, c. h.: On countably paracompact spaces. Canad. J. Math., **3** (1951), 219—224.
15. Недев, С. Й.: Симметризуемые пространства и ε-отображения. ДАН СССР, **173**, № 3 (1967), 523—525.
16. Александров, П. С.: О метризации топологических пространств, Бюлл. Польской. АН, сер. мат., 8, № 3 (1960), 135—140.
17. Heath, R, W.: On certain first countable spaces. Topol. Seminar, Wisconsin, 1965. Princeton, N. J Univ. Press, 1966, 103—113.
18. Недев, С. Й., Чобан, М. М.: К теории симметризуемых пространств I. Вестник МГУ, сер. мат., 1971 (в печати).

Постъпила на 16. XI. 1971 г.

ON THE CONTINUOUS AND SEMI-CONTINUOUS O-METRICS

S. I. Nedev

(SUMMARY)

The greater part of the paper is devoted to the proofs of the assertions formulated in [1]. The Propositions 1, 2 and 3, the Theorem 10 and the Corollary 3 are published for the first time.

Definition 1. The topological space X is called o-metrizable by the o-metrics ρ, iff ρ is a nonnegative function on the square $X \times X$ and satisfies tre following conditions:

1) $\rho(x,y)=0$ iff $x=y$;

2) if $F \subset X$, then F is closed in X iff for every $x \in F$

$$\rho(x,F)=\inf\{\rho(x,y)\ \ y \in F\} > 0.$$

If the function ρ is symmetric, it is called a symmetrics and the space X — symmetrizable. If the function ρ satisfies the triangle inequality it is called a Δ-metrics and the space X — Δ-metrizable. If ρ is a symmetric and a Δ-metrics in the same time it is called a metrics and a space X — metrizable.

If the map ρ: $X \times X \to E^1$ (E^1 — the space of the real numbers) is continuous then ρ is called semi-continuous o-metrics.

If for every point $x_0 \in X$ the function $f_{x_0}(x)=\rho(x_0,x)$ is continuous then ρ is called semi-continuous o-metric.

Some properties are studied of the spaces which are o-metrizable by continuous and semi-continuous o-metrics, some suffficient conditions for continuous and semi-continuous o-metrization are obtained. Some related questions are discussed, for example, the developable space metrization problem. Many examples are given.