УПОРЯДОЧЕННЫЕ ПОЛУГРУППЫ И ГРУППЫ ВТОРОГО И ТРЕТЬЕГО РОДА

К. Ж. Тодоров

§ 1. Упорядоченные полугруппы второго и третьего рода

1.1. Во многих случаях, когда возникает необходимость рассмотрения тех или иных алгебраических систем, в них естественным образом обнаруживается отношение порядка, игнорировать которое бывает либо нецелесообразно, либо просто невозможно. В последние годы вместе с исследованиями упорядоченных алгебраических систем (см., например [4], там же имеются дальнейшие указания на литературу), проявился интерес и к исследованию таких алгебраических систем, при которых порядок не является двусторонне стабильным. Алгебраические системы с порядком, не являющиеся упорядоченными, исследовались Артином [5] — для поля, Кокориным и Конторовичем [1], Клиффордом [7] — для групп, Клиффордом [6], Кеймелем [8] — для полугрупп.

В качестве первых примеров полугрупп с порядком, не являющиеся упорядоченными, можно рассматривать мультипликативная полугруппа всех целых чисел, мультипликативная полугруппа всех действительных чисел, обе с их естественным порядком, полугруппа монотонных — изотонных и антитонных преобразований, полугруппа всех преобразований, обе с поточечным порядком.

1. 2. Пусть полугруппа A упорядочена порядком $\leqq$. Обозначим через:

$$C^{(l)}=\{x\in A:(a,\ b\in A)\ (a\leqq b)\longrightarrow(xa\leqq xb)\};$$

$$J^{(l)}=\{x\in A:(a,\ b\in A)\ (a\leqq b)\longrightarrow(xb\leqq xa)\};$$

$$C^{(r)}=\{x\in A:(a,\ b\in A)\ (a\leqq b)\longrightarrow(ax\leqq bx)\};$$

$$J^{(r)}=\{x\in A:(a,\ b\in A)\ (a\leqq b)\longrightarrow(bx\leqq ax)\};$$

$$R^{(l)}=C^{(l)}\cap J^{(l)};\qquad R^{(r)}=C^{(r)}\cap J^{(r)};$$

$$Z^{(l)}=\{z\in A:(a,\ b\in A)\longrightarrow(za=zb)\};$$

$$Z^{(r)}=\{z\in A:(a,\ b\in A)\longrightarrow(az=bz)\}.$$

Множество всех элементов полугруппы A ($\leqq$), не вошедшие в $C^{(l)} \cup J^{(l)*}$, $C^{(r)} \cup J^{(r)}$, обозначим соответственно через $N^{(l)}$, $N^{(r)}$, т. е

$$A = C^{(l)} \cup J^{(l)} \cup N^{(l)} = C^{(r)} \cup J^{(r)} \cup N^{(r)}.$$

Непосредственно видно, что ([3; 130] — умножение подмножеств):

(а) $C^{(l)}C^{(l)} \subset C^{(l)}$, $\quad C^{(r)}C^{(r)} \subset C^{(r)}$;

(б) $J^{(l)}J^{(l)} \subset C^{(l)}$, $\quad J^{(r)}J^{(r)} \subset C^{(r)}$;

(в) $J^{(l)}C^{(l)} \subset J^{(l)}$, $\quad C^{(l)}J^{(r)} \subset J^{(r)}$;

$C^{(l)}J^{(l)} \subset J^{(l)}$, $\quad J^{(r)}C^{(r)} \subset J^{(r)}$.

1.3. Определение. Полугруппу A, упорядоченную нетривиальным порядком $\leqq$, будем называть полугруппой с упорядоченностью.

Полугруппу с упорядоченностью A ($\leqq$), для которой хотя бы одно из ее подмножеств $C^{(l)}$, $J^{(l)}$ не пусто, будем называть упорядоченной слева полугруппой третьего рода, а сам порядок — порядком третьего рода слева.

Упорядоченную слева полугруппу третьего рода A ($\leqq$), для которой $N^{(l)} = \varnothing$, будем называть упорядоченной слева полугруппой второго рода, а сам порядок — порядком второго рода слева.

Аналогичным образом можно определить упорядоченные справа полугруппы третьего и второго рода.

1.4. Согласно условию 1.2 (б), если множество $J^{(l)}$ не пусто, то и множество $C^{(l)}$ будет непустым подмножеством полугруппы A ($\leqq$).

По определению, любую упорядоченную слева полугруппу третьего рода можно представить в виде $A = C^{(l)} \cup J^{(l)} \cup N^{(l)}$, а любую упорядоченную слева полугруппу второго рода в виде $A = C^{(l)} \cup J^{(l)}$.

Замечание. В подавляющем числе случаев высказывание, справедливое относительно $C^{(l)}$, $J^{(l)}$ и т. п. из 1.2, справедливо также и относительно $C^{(r)}$, $J^{(r)}$ и т. п. В дальнейшем, для краткости записи, будем формулировать только утверждения относительно $C^{(l)}$, $J^{(l)}$ и т. п. Случаи, когда это не так, будут специально отмечаться.

1.5. В работах [1], [6–8] авторы исследуют только упорядоченные одновременно слева и справа полугруппы второго рода: $A = C^{(l)} \cup J^{(l)} = C^{(r)} \cup J^{(r)}$. Следующие примеры (см. также § 3) показывают существование полугрупп с упорядоченностью, не принадлежащих к указанным классам.

Пусть $B = \{1, 2, \ldots\}$ есть мультипликативная полугруппа натуральных чисел с ее естественным порядком. Рассмотрим надполугруппу A полугруппы B, содержащую помимо B два элемента u и v. Умножение в A, помимо правила умножения в B, определяются условиями

1) $un = u$, $\quad vn = u$, если n четно;

2) $un = u$, $\quad vn = v$, если n нечетно;

* Элементы множеств $C^{(l)}$, $J^{(l)}$ называют соответственно консервьори, инверсьори слева [6].

3) $uv=v$, $vu=u$, $u^2=u$, $v^2=v$;
4) $nu=u$, $nv=v$, $(n \in B)$, [9; 526].

Линейный порядок в полугруппе A определим, прибавляя к соотношениям предшествования в полугруппе B, и следующие два соотношения: $u<v<1$. Так как $Au=u$, то $u \in Z^{(r)} \subset C^{(r)}$. При умножении слева на u соотношение $u<v$ отображается на себя, а соотношение $v<1$ отображается на соотношение $v>u$. Следовательно, $u \in C^{(r)} \cap N^{(l)}$.

Пусть S_Ω — полугруппа всех преобразований частично упорядоченного множества Ω ($\leqq'$) упорядочена поточечным порядком $\leqq$: $(a, b \in S_\Omega)$ $(a \leqq b) \rightleftarrows (\forall \xi \in \Omega)$ $(a\xi \leqq' b\xi)$. При этом порядке полугруппа S_Ω не является линейно упорядоченной.

Нетрудно показать, что в полугруппе S_Ω: (а) $C^{(r)}=S_\Omega$; (б) элемент $a \in S_\Omega$ принадлежит полугруппе $C^{(l)}$ тогда и только тогда, когда a — изотонное преобразование; (в) элемент $b \in S_\Omega$ принадлежит к множеству $J^{(l)}$ тогда и только тогда, когда b — антитонное преобразование.

1.6. Из 1.2 непосредственно видно, что в любой упорядоченной слева полугруппе третьего рода подмножество $C^{(l)}$ есть полугруппа.

В упорядоченной слева полугруппе второго рода A ($\leqq$) подмножество $C^{(l)}$ является нормальной полугруппой, а $J^{(l)}$, если оно не пусто — нормальным комплексом.

1.7. Можно доказать, имея ввиду 1.2 (а) — (в), что подмножество $R^{(l)}=C^{(l)} \cap J^{(l)}$ упорядоченной слева полугруппой второго рода A, если оно не пусто, является двусторонним идеалом как полугруппы A, так и ее подполугруппы $C^{(l)}$.

1.8. По определению 1.3, упорядоченная слева полугруппа третьего рода A есть множество, в котором действие и порядок определены так, чтобы множество $C^{(l)}$ оказалось не пустым. Представляет интерес такой вопрос: если в множестве A определен один из двух предикатов — действие или порядок, определит другой так, чтобы множество A превратилось в упорядоченную полугруппу третьего рода.

На любом упорядоченном множестве A можно определить действие так, чтобы оно превратилось в упорядоченную полугруппу второго рода. Для этой цели фиксируем элемент c_0 из упорядоченного множества A и действие определим, полагая $ab=c_0$, для всех $a, b \in A$. В этом случае имеем $A=C^{(l)}=C^{(r)}=Z^{(l)}=Z^{(r)}$.

Предложение. В каждой неединичной полугруппе A существует порядок третьего рода.

Доказательство. Пусть полугруппа A имеет идемпотент i. Порядок $\leqq$ определим, полагая: $i \leqq x$ для всех $x \in A$ и других нетривиальных соотношений в полугруппе A нет. Очевидно, $i \in C^{(l)} \cap C^{(r)}$.

Если полугруппа A не обладает идемпотентами, порядок $\leqq$ определим, полагая: для какого-нибудь $x \in A$

$$x<x^2<x^3< \ . \ . \ .$$

и для всех $a \in A$ $a \leqq a$. В этом случае $x \in C^{(l)} \cap C^{(r)}$.

1.10. В любой моногенной полугруппе A, не принадлежащей к классу конечных моногенных полугрупп типа (h, d), где d — нечетное число а также и в любой бесконечной циклической группе существует такой линейный порядок второго рода, что $J \neq \emptyset$, $C \neq \emptyset$

$$A = J \cup C, \qquad J \cap C = \emptyset.$$

(Здесь положено $J = J^{(l)} = J^{(r)}$, $\quad C = C^{(l)} = C^{(r)}$).

Доказательство. Если полугруппа $A\,(a) = [a]$ является моногенной полугруппой бесконечного типа, множества C и J определим, полагая

$$C = \{a^{2k}\}, \qquad J = \{a^{2k-1}\} \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Очевидно, $C \cap J = \emptyset$. Пусть для элементов b, c полугруппы A имеем $b = a^{k_1}$, $c = a^{k_2}$. Порядок $\leqq$ в полугруппе A определим, считая $b < c$ если $b \in J$ и $c \in C$, или если $b, c \in C$ и $k_1 < k_2$, или если $b, c \in J$ и $k_2 < k_1$ Легко видеть, что $C = C^{(l)} = C^{(r)}$, $J = J^{(l)} = J^{(r)}$.

Аналогичным образом определяется порядок и в остальных случаях.

1.11. Пусть в полугруппе A для каждой пары элементов a и b таких, что a делится на b слева и b делится на a слева, следует, что $a = b$. Тогда в полугруппе A существует порядок второго рода слева такой, что $A = C^{(l)}$.

Доказательство. Пусть полугруппа A обладает единицей e. Будем считать $a \leqq b$ тогда и только тогда, когда b делится на a слева: $b = ax$. Если полугруппа A не обладает единицей, таким же образом определим порядок в полугруппе $A' = A \cup \{e\}$ с внешне присоединенной единицей e. При определенном таким образом порядке имеем:

$$(\forall a, b, c \in A)\ (a \leqq b) \longrightarrow (\exists x \in A : b = ax) \longrightarrow (cb = cax)$$
$$\longrightarrow (ca \leqq cb) \longrightarrow (C^{(l)} = A).$$

Полугруппы с указанными свойствами были объектом специальных исследований, например, в работе [9].

1.12. Определение (см. [6]). Элементы множества $Z^{(l)}$ из 1.2 называют левыми нулевыми элементами полугруппы A.

1.13. Укажем на некоторые элементарные свойства элементов из $Z^{(l)}$.

а) В любой полугруппе с упорядоченностью A имеем $Z^{(l)} \subset R^{(l)}$; если порядок полугруппы A линеен, то $Z^{(l)} = R^{(l)}$.

б) (см. [6] лемму 2). Элемент z есть левый нулевой элемент полугруппы A тогда и только тогда, когда для всех элементов $b \in A$, $zb = z^2$, т. е. $zA = \{z^2\}$.

в) (см. [6], л. 2) Полугруппа A содержит левый нулевой элемент тогда и только тогда, когда содержит левый нуль. Элемент z является левым нулевым элементом полугруппы A только тогда, когда z^2 есть левый нуль полугруппы A.

Доказательство.

$$(\forall a \in A)\ (\forall z \in Z^{(l)})\ (za = z^2) \longrightarrow (z^2 a = z.za = z.z^2 = z^2).$$

Обратно, каждый левый нуль полугруппы A является и ее левым нулевым элементом.

г) Если множество $Z^{(l)}$ не пусто, то оно является двусторонним идеалом полугруппы A.

Доказательство. Пусть $z \in Z^{(l)}$, a, b, $c \in A$. Тогда $za = z^2 \in Z^{(l)}$, (см. б) и в)). Из равенства $zc = zb$ следует $a(zc) = a(zb)$, т. е. $(az)c = (az)b$. Согласно определению множества $Z^{(l)}$ элемент az принадлежит $Z^{(l)}$.

д) Если полугруппа A обладает правой единицей, то множество $Z^{(l)}$ не содержит элементов, отличных от левых нулей.

Доказательство. Согласно б), если e_1 есть правая единица полугруппы A и $z \in Z^{(l)}$, то $z^2 = ze_1 = z$. Благодаря в) из последнего равенства заключаем, что z есть левый нуль полугруппы A.

Следствие. Если полугруппа A обладает 0 и правой единицей, то $Z^{(l)} = \{0\}$.

е) Пусть в полугруппе с упорядоченностью A существует элемент $z \in Z^{(l)} \cap Z^{(r)}$ (тогда z^2 является двусторонним нулем 0) и a, $b \in A$ Тогда $ab = 0$ в каждом из следующих случаях:

(I) $a \leq z \leq b$ и а) $a \in C^{(l)}$, $b \in C^{(r)}$; б) $a \in J^{(l)}$, $b \in J^{(r)}$;

(II) $b \leq z$, $a \leq z$, или $z \leq a$, $z \leq b$ и а) $a \in C^{(l)}$, $b \in J^{(r)}$;

б) $a \in J^{(l)}$, $b \in C^{(r)}$.

Докажем (I) а). По условию $a \leq z$, $b \in C^{(r)}$, следовательно, $ab \leq zb$ Также, из $z \leq b$ и $a \in C^{(l)}$ следует, что $az \leq ab$. Так как (см. в))

$$0 = z^2 = az \leq ab \leq zb = z^2 = 0,$$

то $ab = 0$.

Аналогичным образом доказываются и остальные случаи.

ж) Пусть A — полугруппа с упорядоченностью, обладающая нулем 0, $z_i \in Z^{(l)} \cup Z^{(r)}$ $(i = 1, 2)$, $c \in A$ и $z_1 \leq c \leq z_2$. Обозначим через $L^{(l)} = C^{(l)} \cup J^{(l)}$, $K^{(r)} = C^{(r)} \cup J^{(r)}$. Тогда, если $z_i \in Z^{(l)}$ $(i = 1, 2)$, то $cK^{(r)} = 0$; если $z_i \in Z^{(r)}$ $(i = 1, 2)$, то $L^{(l)}c = 0$.

Доказательство. Согласно б) и в), для каждого элемента $z \in Z^{(l)} \cup Z^{(r)}$ имеем $z^2 = 0$, а благодаря б) для $p \in C^{(r)}$, $z_i \in Z^{(l)}$ $(i = 1, 2)$ имеем $0 = z_1^2 = z_1 p \leq cp \leq z_2 p = z_2^2 = 0$, т. е. $cC^{(r)} = 0$. Также проверяется и, что $cJ^{(r)} = 0$, Из равенств $cC^{(r)} = 0$ и $cJ^{(r)} = 0$ следует, что $cK^{(r)} = 0$.

Аналогичным образом рассматривается и второй случай.

1.14. Пусть упорядоченная слева полугруппа второго рода A обладает единицей e и подмножество $J^{(l)}$ содержит обратимый элемент g. Тогда подмножества $C^{(l)}$ и $J^{(l)}$, а также $C^{(l)} \setminus R^{(l)}$ и $J^{(l)} \setminus R^{(l)}$, равномощны.

Доказательство. Любой делитель a единицы e не принадлежит идеалу $R^{(l)} = C^{(l)} \cap J^{(l)}$ (см. 1.7), так как из равенства $e = ax$, или $e = ya$, получилы бы неверное следствие $e \in R^{(l)}$. Отображение $\varphi_1(p) = pg$ $(p \in C^{(l)})$ является 1.1 отображением множества $C^{(l)}$ на множество $J^{(l)}$. Так как $R^{(l)}$ есть двусторонний идеал, то $\varphi_1(R^{(l)}) = R^{(l)}g \subset R^{(l)}$, и если $p \in C^{(l)} \setminus R^{(l)}$, то $pg \notin R^{(l)}$ — иначе из равенства $p = pg.g^{-1}$ получили бы, что $p \in R^{(l)}$.

1.15. Пусть A — упорядочена слева полугруппа второго рода с единицей e и для елементов $a, b \in A$ имеем $a>e$, $ab=e$. Тогда, если $a \in C^{(l)}$, то e не $<b$; если $a \in J^{(l)}$, то b не $<l$.

Доказательство. Из соотношения $e<a$ следует, что $a \neq e$, а из равенства $ab=e$ — что $b \neq e$. В первом случае, из предположения $e<b$ следовало бы, что $a \leqq ab$. Последное соотношение, ввиду того, что $ab=e$, противоречит соотношению $a>e$.

Аналогичным образом доказывается и второй случай.

1.16. Теорема. Пусть полугруппа A с единицей e обладает гомоморфизмом на циклическую группу второго порядка $\{e', a'\}$, подмножества C, J являются полными прообразами e' и a' соответственно при этом гомоморфизме и пусть множество J содержит обратимый элемент, принадлежащий центру полугруппы A. Тогда любой согласованный с действием слева нетривиальный порядок в полугруппе C может быт продолжен до порядка полугруппы A, так что $C=C^{(l)}$, $J=J^{(l)}$.

Доказательство. Пусть a обратимый элемент множества J, принадлежащий центру полугруппы A, и ρ — порядок ее подполугруппы C согласованный с действием слева. Нетрудно заметить, что и $a^{-1} \in J$. Определим преобразование φ полугруппы A, полагая: $\varphi(x)=xa^{-1}$ $(x \in A)$ и бинарное отношение $\bar{\rho}$, полагая:

1) $(\forall p_1, p_2 \in C)\ \{[(p_1, p_2) \in \rho] \rightarrow [(p_1, p_2) \in \bar{\rho}]\}$;

2) $(\forall q_1 \in J)\ (\forall p_2 \in C)\ ((q_1, p_2) \in \bar{\rho})$;

3) $(\forall q_1, q_2 \in J)\ [(q_1, q_2) \in \bar{\rho}]$, если $(\varphi(q_2), \varphi(q_1)) \in \rho$.

Рефлексивность, антисиметричность и транзитивность отношения $\bar{\rho}$ следуют из этих же свойств отношения ρ. Таким образом, $\bar{\rho}$ является продолжением порядка подполугруппы C до порядка полугруппы A. Пусть $(x, y) \in \bar{\rho}$ и 1) $p \in C$. Тогда, если $x, y \in C$, или $x \in J$, $y \in C$, то из определения отношения ρ и множеств C, J следует, что $(px, py) \in \bar{\rho}$. Кроме того

$$(\forall x, y \in J)\ [(x, y) \in \bar{\rho}] \rightarrow [(ya^{-1}, xa^{-1}) \in \rho]$$
$$\rightarrow [(pya^{-1}, pxa^{-1}) \in \rho] \rightarrow [(px, py) \in \bar{\rho}].$$

2) $q \in J$. Тогда $qa \in C$ и

$$(x, y \in C)\ [(x, y) \in \bar{\rho}] \rightarrow [(x, y) \in \rho] \rightarrow [(qax, qay) \in \rho]$$
$$\rightarrow [(qxa, qya) \in \rho] \rightarrow [(qy, qx) \in \bar{\rho}].$$
$$[(x \in J)\ (y \in C)] \rightarrow [(qx \in C)\ (qy \in J)] \rightarrow [(qy, qx) \in \bar{\rho}].$$
$$(x, y \in J)\ [(x, y) \in \bar{\rho}] \rightarrow [(ya^{-1}, xa^{-1}) \in \rho] \rightarrow$$
$$[(qaya^{-1}, qaxa^{-1}) \in \rho] \rightarrow [(qy, qx) \in \rho] \rightarrow [qy, qx) \in \bar{\rho}].$$

Из 1) и 2) заключаем, что $C=C^{(l)}$, $J=J^{(l)}$.

1.17. Понятия „нормальный комплекс“ и „нормальная подполугруппа“ были впервые введены и рассматрены Е. С. Ляпиным [3; 375].

Из общей теории полугрупп и п. 1.6 следует, что если полугруппа $A=C^{(l)}\cup J^{(l)}$ и $C^{(l)}\cap J^{(l)}=\varnothing$, то существует гомоморфизм полугруппы A на циклическую группу второго порядка. Обратно, если существует гомоморфизм полугруппы A на циклическую группу второго порядка, тогда полугруппа A можно представить, согласно 1.16, в виде объединения непересекающихся подмножеств C и J таких, что их элементы удовлетворяют условиям (а) — (в) из 1.2.

§ 2. Упорядоченные группы второго и третьего рода

2.1. В работах [1] и [6] авторы рассматривают упорядоченные группы C второго рода одновременно слева и справа, т. е. $G=C^{(l)}\cup J^{(l)}=C^{(r)}\cup J^{(r)}$. Укажем на некоторые элементарные примеры упорядоченных групп третьего рода, не принадлежащих к указанным классам.

Группу G, мощностью не менее трех, упорядочим, считая для какого-нибудь $g_1\in G\setminus\{e\}$, где e единица группы G, $e<g_1$ и $g\leq g$ для всех элементов группы G. Имеем $C^{(l)}=C^{(r)}=\{e\}$ и если $g_1^2=e$, то $J^{(l)}=J^{(r)}=\{g_1\}$, $N^{(l)}=N^{(r)}=G\setminus\{e, g_1\}$; если $g_1^2\neq e$, то $J^{(l)}=J^{(r)}=\varnothing$, $N^{(l)}=N^{(r)}=G\setminus\{e\}$

Циклическую группу G порядка $n\geq 3$, упорядочим линейно $e<x<x^2<\ .\ .\ .\ <x^n$. В этом случае, если n конечно, то $C^{(l)}=C^{(r)}=\{e\}$ $N^{(l)}=G\setminus\{e\}$; если n бесконечно, то $C^{(l)}=G$.

2.2. Пусть G — упорядоченная слева группа второго рода. Тогда:

1) если $J^{(l)}\neq\varnothing$, то $J^{(l)}$ является классам смежности по нормальному делителю $C^{(l)}$ (см. п. 1.6 и 1.14);

2) если $C^{(l)}\neq G$, то множество $R^{(l)}=C^{(l)}\cap J^{(l)}$ — пусто (см. п. 1.7 и [2; 198]);

3) Подмножество P всех положительных элементов [4; 25], принадлежащих группе G, удовлетворяет следующим условиям:

а) P есть подполугруппа группы G, содержащая единицу e группы G;

б) Если элемент g группы G и его обратный g^{-1} принадлежат к полугруппе P, то g равно e;

в) Если порядок группы G такой, что:

(α) $C^{(l)}\subset C^{(r)}$, тогда полугруппа P инвариантна относительно внутренних автоморфизмов, порожденных элементами множества $C^{(l)}$;

(β) $J^{(l)}\subset J^{(r)}$, тогда полугруппа P инвариантна относительно внутренних автоморфизмов, порожденных элементами множества $J^{(l)}$;

(γ) $C^{(l)}=C^{(r)}$ и $J^{(l)}=J^{(r)}$, тогда полугруппа P инвариантна относительно внутренних автоморфизмов, порожденных элементами группы G.

Доказательство. Докажем 3 в) (α). Пусть $C^{(l)}\subset C^{(r)}$. Для любого элемента $g\in G$ и любого соотношения $x<y$ имеем $x=g^{-1}(gx)<g^{-1}(gy)=y$. Отсюда, так как единица e принадлежит подгруппе $C^{(l)}$, то g и g^{-1} принадлежат одновременно либо к $C^{(l)}$, либо к $J^{(l)}$.

Так что, имеем

$$(\forall s\in P)\ (\forall p\in C^{(l)})\longrightarrow(p^{-1}sp\in C^{(l)}),$$

$$(e\leq s)\longrightarrow(e\leq p^{-1}sp)\longrightarrow(p^{-1}sp\in P).$$

Также доказываются и остальные два предложения.

2.3. Как следует из п. 2.2 в любой простой группе [2] нельзя ввести порядок второго рода слева, при котором $C^{(l)} \neq G$. Поэтому, интересно узнать, можно ли в любой непростой группе G ввести нетривиальный порядок с указанными свойствами? Согласно 2.2, в частности нужно узнать, когда группа G обладает нормальным делителем индекса два. Обозначим через G^n нормальный делитель группы G порожденный элементами вида g^n для каждого $g \in G$ и фиксированного натурального числа n.

Предложение. Группа G не обладает нормальным делителем индекса два тогда и только тогда, когда $G = G^2$.

Доказательство. Допустим, что группа $G = G^2$ обладает нормальным делителем H индекса два: $G \setminus H = \{e, a\}$, и $a \in a$. Тогда в группе G должен существовать элемент x такой, что $x^2 = a$. Предположим, что $x \in H$, тогда и $a = x^2 \in H$; если $x \in aH$, то опять $a = x^2 \in H$. Полученное противоречие показывает, что группа $G = G^2$ не обладает нормальным делителем индекса два. Предположим, что $G \neq G^2$. Тогда $G/G^2 = \coprod \{a_i\}$ [2; 146], где $a_i^2 = e$. Обозначим через $H = \coprod_{i \in J \setminus \{1\}} \{a_i\}$. Очевидно, $(G/G^2)/H = \{e, a_1\}$, т. е. в этом случае группа G обладает нормальным делителем индекса два.

2.4. Теорема. Пусть группа G удовлетворяет следующим условиям:

1) Обладает нормальным делителем C индекса два;

2) Нормальный делитель C содержит неединичную подполугруппу P, содержащую единицу e группы G;

3) Если элемент g из группы G и его обратный g^{-1} принадлежат полугруппе P, то g равно e.

Тогда существует такой порядок второго рода слева группы G что $C = C^{(l)}$, $J^{(l)} = G/C$ и элемент g из группы G будет положительным элементом группы G тогда и только тогда, когда $g \in P$.

Доказательство. Обозначим через $J = qC$, где $q \notin C$, смежный класс по нормальному делителю C. Определим бинарное отношение ρ следующим образом: будем считать, что для элементов a, b из группы G имеем $(a, b) \in \rho$ каждый раз, когда выполняется одно из следующих условий:

1) $a \in J, \quad b \in C$;

2) $a, b \in C$ и $a^{-1}b \in P$;

3) $a, b \in J$ и $b^{-1}a \in P$.

Нетрудно проверить, что ρ является отношением частичного порядка $\leqq$ в группе G. Покажем, что относительно этого порядка $C \subset C^{(l)}$. Пусть $x \leqq y$ и $p \in C$. Тогда имеем

1) $(x \in J)\ (y \in C)\ (p \in C) \rightarrow (px \in J)\ (py \in C) \rightarrow (px \leqq py)$;

2) $(x, y \in C)\ (x \leqq y) \longrightarrow (x^{-1}y \in P) \longrightarrow [(px)^{-1}\ (py) \in P] \longrightarrow (px \leqq py)$;

3) $(x, y \in J)\ (x \leqq y) \longrightarrow (y^{-1}x \in P) \longrightarrow [(py)^{-1}\ (px) \in P] \longrightarrow (px \leqq py)$.

Дуальным образом доказывается, что $J \subset J^{(l)}$. Из $C \subset C^{(l)}$, $J \subset J^{(l)}$, $J \cap C = \varnothing$, следует, что $C = C^{(l)}$ и $J = J^{(l)}$.

Остальная часть доказательства теоремы следует из определения отношения ρ и то, что $e \in C$.

2.5. Теорема. Пусть группа G удовлетворяет условиям 1) —3) теоремы 2.4 и одно и только одно из условий 4): Полугруппа P инвариантна относительно внутренних автоморфизмов группы G, порожденных — а) элементами подгруппы C; б) элементами множества J; в) всеми элементами группы G.

Тогда порядок группы G можно определит так, что соответственно выполнялось одно и только одно из утверждений: α) $C = C^{(l)} \subset C^{(r)}$; β) $J = J^{(l)} \subset J^{(r)}$; γ) $C = C^{(l)} = C^{(r)}$ и $J = J^{(l)} = J^{(r)}$ и элемент g будет положительным элементом группы G тогда и только тогда, когда $g \in P$.

Доказательство. Если полугруппа P инвариантна относительно внутренних автоморфизмов группы G, порожденных элементами подгруппы C, к доказательству теоремы 2.4 нужно доказать еще включения $C^{(l)} \subset C^{(r)}$. Пусть $x \leqq y$ какое-нибудь соотношение предшествования. Тогда, если:

1) $(x \in J)\ (y \in C)\ (\forall p \in C) \longrightarrow (xp \in J)\ (vp \in C) \longrightarrow (xp \leqq yp)$;

2) $(x, y \in C)\ (\forall p \in C) \longrightarrow (x^{-1}y \in P) \longrightarrow (p^{-1}x^{-1}yp \in P)$
$\longrightarrow ((xp)^{-1}\ (yp) \in P) \longrightarrow (xp \leqq yp)$;

3) $(x, y \in J)\ (\forall p \in C) \longrightarrow (y^{-1}x \in P) \longrightarrow (p^{-1}y^{-1}xp \in P)$
$\longrightarrow ((yp)^{-1}\ (xp) \in P) \longrightarrow (xp \leqq yp)$.

Аналогичным образом доказывается и остальная часть теоремы

2.6. Определение. U — направленным (l—направленным) подмножеством упорядоченного множества A ($\leqq$) назовем подмножество M, в котором для любых элементов $a, b \in M$ существует такой элемент $c \in M$, что $a \leqq c$, $b \leqq c$ ($c \leqq a$, $c \leqq b$).

Будем говорит, что M — направленное подмножество множества A, если оно одновременно — u — и l — направленное.

Предложение. Пусть G — упорядоченная слева группа второго рода: $G = C^{(l)} \cup J^{(l)}$ при которой $C^{(l)} = C^{(r)} = C$. Тогда, если подгруппа C содержит такой элемент $a \geqq e$, что множество его верхних граней $U(a)$ порождает C, то C и $J^{(l)}$ являются направленными подмножествами группы G и $q < p$ для любых сравнимых элементов p из C и q из $J^{(l)}$.

Обратно, если $C = C^{(l)} = C^{(r)}$ и $J^{(l)}$ являются направленными подмножествами (2.6) упорядоченной слева группы второго рода G, то при любом элементе $a \in C$ каждый элемент $b \in C$, может быть записан в виде $b = yz^{-1}$, где $y, z \in U(a)$, а при любом элементе $q \in J^{(l)}$ каждый элеменет $c \in J^{(l)}$ — в виде $c = qyz^{-1}$, где $y, z \in U(a)$.

Доказательство. Если $C=G$, то группа G является упорядоченной и утверждение верно [4; 23]. Пусть $C \neq G$. Так как $U(e)=a^{-1}U(a)$ (из $a \in C$ следует, что и $a^{-1} \in C$), достаточно проверить первую часть утверждения при $a=e$ То, что подгруппа C является направленной, можно доказать способом, указанным при доказательстве соответствующего утверждения для упорядоченных групп [4; 23], рассматривая C как упорядоченную группу. Так как подгруппа C порождается $U(e)$, то она является выпуклой. Предположим, что для некоторых элементов $p \in C$, $q \in J^{(l)}$ имеем $p<q$. Отсюда находим, что $e<q^{-1}p$, т. е., $q^{-1}p \in U(e) \cap J^{(l)} \subset C \cap J^{(l)} = \emptyset$. Полученное противоречие показывает, что C и $J^{(l)}$ являются выпуклыми подмножествами группы C и для любых сравнимых элементов $p \in C$, $q \in J^{(l)}$, имеем $q<p$.

Если элемент $p \in C$ является верхней гранью элементов $q_1^{-1}q_2 \in C$ (q_1, $q_2 \in J^{(l)}$) и единицы e, тогда $q_2 \geqq q_1 p$ и $q_1 \geqq q_1 p$, т. е., $q_1 p$ есть нижняя грань элементов q_1, q_2: аналогичным образом находим, что если p_2 есть нижняя грань элементов $q_1^{-1}q_2$ и e, то $q_1 p_2$ есть верхняя грань элементов q_1, $q_2 \in J^{(l)}$.

Обратно (см. [4; 23]), если C — направленная подгруппа группы G и $d \in C$ — верхняя грань элементов e, $b \in C$, тогда элементы $y=da$ и $z=(b^{-1}d)a$ принадлежат к пересечению $U(a) \cap C$ и $b=yz^{-1}$ имеет указанный вид. При любом элементе $q \in J^{(l)}$, для каждого $c \in J^{(l)}$ — $q^{-1}c \in C$. Следовательно, $q^{-1}c=yz^{-1}$ и $c=qyz^{-1}$.

2.8. Ввиду полученных результатов (2.2—2.5) и общей теории упорядоченных групп вполне естественным является следующее

Определение. Положительным конусом упорядоченной слева группы G второго рода назовем множеством всех положительных элементов группы G.

2.9. Результаты, полученные в п. 2.3—2.5, дают достаточные условия для того, чтобы в непростой группе G определить порядок второго рода слева. Из п. 2.2—2.4 следует, что: подмножество P группы G является положительным конусом некоторого частичного порядка второго рода слева тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет следующим условиям:

(α) $P \cap P^{-1}=e$ $\qquad (P^{-1}=\{p^{-1},\ p \in P\})$;

(β) $PP \subset P$.

Если, кроме того (см. 2.2—2.5), P удовлетворяет и условию

(γ_1) $x^{-1}px \subset P$ для всех элементов x нормального делителя $C^{(l)}$ индекса два, то $C^{(l)} \subset C^{(r)}$ и обратно, если $C^{(l)} \subset C^{(r)}$, то $x^{-1}Px \subset P$ для всех $x \in C^{(l)}$; или

(γ_2) $x^{-1}Px \subset P$ для всех элементов x множества $J^{(l)}$, то $J^{(l)} \subset J^{(r)}$ и обратно, если $J^{(l)} \subset J^{(r)}$, то $x^{-1}Px \subset P$, для всех $x \in J^{(l)}$; или

(γ_3) $x^{-1}Px \subset P$ для всех элементов группы G, то $C^{(l)}=C^{(r)}$, $J^{(l)}=J^{(r)}$ и обратно, если $C^{(l)}=C^{(r)}$ и $J^{(l)}=J^{(r)}$, то $x^{-1}Px \subset P$ для всех элементов $x \in G$.

2.10. Из общей теории упорядоченных групп [4; 26] и п. 2.7 непосредственно вытекает следующее

Предложение. (а) Подмножества $C=C^{(l)}=C^{(r)}$ и $J^{(l)}$ упорядоченной слева группы второго рода G тогда и только тогда будут направленными подмножествами, когда полугруппа P (2.8) порождает подгруппы C.

(б) Подмножества $C=C^{(l)}=C^{(r)}$ и $J^{(l)}$ упорядоченной слева группы второго рода G тогда и только тогда будут подструктурами, когда положительный конус P (2.8) является подструктурой относительно индуцированного порядка и порождает подгруппы C.

(в) Подмножества $C=C^{(l)}=C^{(r)}$ и $J^{(l)}$ упорядоченной слева группы G второго рода тогда и только тогда будут линейно упорядоченными когда $P\cup P^{-1}=G$, где $P^{-1}=\{p^{-1},\ p\in P\}$.

2.11. Для упорядоченных слева групп второго рода, как и в случае для упорядоченных групп [4; 28], можно показать, что всякий положительный конус P упорядоченной слева группы второго рода не содержит ни одного обобщенно периодического элемента отличного от единицы e. Поэтому, в группе G, в которой каждый элемент обобщенно периодичен (в частности, периодическая группа) всякий положительный конус упорядоченной слева группы второго рода состоит лишь из одной единицы e, т. е., такая группа допускает только тривиальный порядок.

Если полугруппа P является положительным конусом упорядоченной слева группы второго рода G и группа $\tilde{G}$ содержит группу G, тогда P будет положительным конусом группы $\tilde{G}$ тогда и только тогда, когда группа $\tilde{G}$ обладает нормальным делителем индекса два содержащий полугруппу P.

2.12. Положительным конусом P упорядоченной слева группы второго рода G, как это видно из п. 2.9, является полугруппа с (двусторонним) сокращеннием и внешне присоединенной единицей.

Теорема. Пусть полугруппа P удовлетворяет следующим условиям:

(1) в полугруппе P справедлив закон сокращения;

(2) полугруппа P содержит нейтральный элемент e;

(3) из $ab=e$ $(a,\ b\in P)$ следует $a=b=e$;

(4) для любых элементов $a,\ b\in P$ всегда найдутся такие элементы $u,\ v\in P$, что $au=bv$. Тогда полугруппа P является положительным конусом некоторой частично упорядоченной слева группы второго рода G.

Доказательство. Обозначим через Q такое множество равномощно полугруппе P, что $P\cap Q=\varnothing$. Пусть φ — 1.1-значное соответствие полугруппы P на $Q: Q=\varphi(P)$. Условимся, для каждого элемента $a\in P$ его образ при соответствии φ обозначать через $a'=\varphi(a)$, а для каждого $b\in Q$ его прообраз при соответствии φ обозначать — $b: b=\varphi(\bar{b})$. В множестве $P'=P\cup Q$ определим действие умножения. Пусть $a,\ b\in P'$. Если $a,\ b$ оба содержатся в полугруппе P, причем $ab=c$, то и в P'

полагаем $ab=c$; если же $a, b \in Q$, то в P' полагаем $ab=a\bar{b}$; если же $a \in P$, $b \in Q$, то в P' полагаем $ab=\varphi(a\bar{b})$, $ba=\varphi(ba)$.

Из этого определения видно, что произведение элементов из P' принадлежит к множеству Q тогда и только тогда, когда оно содержит нечетное число сомножителей из Q. Это показывает, что из равенства $ab=cd$ и $ab \in Q$ следует $cd \in Q$ и что один (и только один) из сомножителей каждого произведения ab и cd принадлежат множеству Q.

Легко проверяется, что из ассоциативности действия в полугруппе P следует ассоциативность действия в множестве P'. Для определенности, пусть $a, b, c \in Q$, тогда

$$a(bc)=a(b\bar{c})=\varphi(a(b\bar{c}))=\varphi((ab)\bar{c})=(ab)\bar{c}=(ab)c.$$

Для элементов $a \in P$, $b, c \in Q$, имеем

$$a(bc)=a(b\bar{c})=(a\bar{b})c=\varphi(a\bar{b})\ \varphi(\bar{c})=(a\ \varphi(b))c=(ab)c.$$

Остальные случаи проверяются аналогичным образом.

В полугруппе P' справедлив закон сокращения. Пусть $a, b, c \in P'$ и $ab=ac$. Тогда, в случае $a \in P$, $b \in P$, а следовательно, и $c \in P$ (как и в случае $a \in Q$, $b \in Q$, а следовательно и $c \in Q$), справедливость закона в полугруппе P' непосредственно следует из справедливости его в полугруппе P. В случае $a \in P$, $b \in Q$, откуда и $c \in Q$, из равенства $ab=ac$ в полугруппе P' следует $ab=ac$ в полугруппе P, т. е. $b=c$, следовательно и $b=c$. Доказательство для случая $a \in Q$, $b \in P$ и $c \in Q$ аналогично предыдущему случаю.

Полугруппа P' удовлетворяет условию (4) из формулировки теоремы. Действительно, для элементов a, b из полугруппы P это следует из условия теоремы. Пусть $a \in P$, $b \in Q$. Тогда для элементов $a, \bar{b} \in P$, согласно условию (4), существуют элементы $u, v \in P$ такие что $au=bv$. Отсюда непосредственно видно, что $au'=bv$ для элементов $v \in P$, $u'=\varphi(u) \in Q$. Аналогично доказывается и случай когда $a, b \in Q$.

Рассмотрим полугруппу $T_{P'}$ всех частичных взаимно однозначных преобразований полугруппу P'. Каждому элементу $a \in P'$ сопоставим частичное преобразование s_a множества P' такое, что $\Pi_1^{s_a}=P'$, $s_a x=ax$ $(x \in P')$. Так как полугруппа P' есть полугруппа с сокращеннием, преобразование s_a есть взаимно однозначно. В подполугруппе L полугруппы $T_{P'}$, порожденной элементами s_a и им обратными s_a, рассмотрим отношение конгруентности n [3; X,2.6]: $x \sim y\ (n)$, $(x, y \in L)$, если для элементов $x, y \in L$ найдется такой элемент $t \in L$, что x и y являются его продолжениями. Факторполугруппа L/n является группой [3; X, 2.6] Естественный гомоморфизм L на L/n обозначим через χ. Рассмотрим отображение ψ полугруппы P' в L: $\psi(a)=s_a\ (a \in P')$. Можно показать [3; X, 2.7], что ψ есть гомоморфизм полугруппы P' в L, а произведени $\xi=\chi\psi$ есть изоморфизм полугруппы P' в группу L/n.

Рассмотрим подмножество C полугруппы L, содержащее все эле-

менты $s_a \in L$ такие, что $s_a P \subset P$ и $s_a Q \subset Q$. Очевидно, $\psi(P) \subset C$. Вместе с каждым элементом s_a множество C содержит и его обратный $\bar{s}_a$. Следовательно, C/n есть подгруппа группы L/n. Нетрудно заметить, что C/n есть нормальный делитель индекса два: к смежному классу $K=(L/n)\setminus(C/n)$ принадлежат все те элементы $\chi(c) \in L/n$ для которых $cP \subset Q$ и $cQ \subset P$.

Согласно теореме 2.2 в группе L/n можно установить порядок второго рода слева с положительным конусом $\xi(P)$.

Если полугруппа P, удовлетворяя условиям (1) — (3) теоремы, удовлетворяет и коммутаторному условию, аналогичным образом можно показать существование порядка второго рода слева группы L/n с положительным конусом $\xi(P)$ при котором $L/n = C^{(l)} \cup J^{(l)} = C^{(r)} \cup J^{(r)}$ и $C^{(l)} = C^{(r)}$, $J^{(l)} = J^{(r)}$.

§ 3. Примеры

3.1. Пусть A — мультипликативная полугруппа всех целых или рациональных, или же действительных чисел, а отношение порядка $\leqq$ имеет обычный смысл. Тогда A является линейно упорядоченной полугруппой второго рода одновременно слева и справа: $A = C \cup J$, где C — множество неотрицательных, а J — множество отрицательных чисел.

Положительный конус группы всех рациональных, или же действительных чисел, отличных от нуля, есть полугруппа всех рациональных, или же действительных чисел, не меньше единицы.

3.2. Пусть L — аддитивная группа всех целых чисел. Ее порядок определим согласно рис. 1.,

. . 3 1 —1 —3 . . . . . —4 —2 0 2 . . .

Рис. 1

где „предшествует“ совпадает с „левее“. Обозначим через C множество всех четных, через L — множество всех нечетных чисел группы L. Относительно так определенного порядка имеем $C = C^{(l)} = C^{(r)}$, $J = J^{(l)} = J^{(r)}$. Положительным конусом группы L является множество всех неотрицательных четных чисел.

3.3. Пусть R — мультипликативная группа отличных от нуля комплексных чисел $a+bi$.

а) Порядок $\leqq_1$ в группе R определим, считая $z_1 \leqq z_2$ ($z_j = a_j + b_j i \in R$, $j=1, 2$) тогда и только тогда, когда $a_1 \leqq a_2$ и $b_1 \leqq b_2$. Имеем $C^{(l)} = C^{(r)} = \{(a>0, 0)$, $J^{(l)} = J^{(r)} = \{(a<0, 0)$.

3.4. Пусть M — мультипликативная полугруппа матриц n-го порядка над полем действительных чисел. Порядок $\leqq_1$ в полугруппе M определим, считая для $a=(a^i{}_j)$, $b=(b_{ij})$ из M $a \leqq b$ тогда и только тогда, когда $a_{ij} \leqq b_{ij}$ ($i, j=1, \ldots, n$). В этом случае можно установить, что $C^{(l)} = C^{(r)} = \{(x_{ij}) : x_{ij} \geqq 0\}$, $J^{(l)} = J^{(r)} = \{(y_{ij}) : y_{ij} \leqq 0\}$ ($i, j=1, \ldots, n$), $M = C^{(l)} \cup J^{(l)} \cup N^{(l)}$.

3.5. Пусть M — группа действительных матриц вида

$$m=\begin{pmatrix} k & a & c \\ 0 & k & b \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} \qquad (k\neq 0)$$

относительно обычного умножения матриц. Порядок $\leqq_1$ в группе M определим, считая

$$m_1=\begin{pmatrix} k_1 & a_1 & c_1 \\ 0 & k_1 & b_1 \\ 0 & 0 & k_1 \end{pmatrix} \leqq_1 \begin{pmatrix} k_2 & a_2 & c_2 \\ 0 & k_2 & b_2 \\ 0 & 0 & k_2 \end{pmatrix}=m_2$$

тогда и только тогда, когда либо $k_1<k_2$; либо $k_1=k_2$ и $a_1<a_2$; либо $k_1=k_2$, $a_1=a_2$ и $b_1<b_2$; либо $k_1=k_2$, $a_1=a_2$, $b_1=b_2$ и $c_1\leqq c_2$.

Можно показать, что

$$C^{(l)}=C^{(r)}=\{m\in M: k>0\},$$
$$J^{(l)}=J^{(r)}=\{m\in M: k<0\}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Конторович, П. Г., Кокорин, А. И.: Об одном типе частично упорядоченных групп. Математические записки, Уральский гос. унив., 3 (1962), № 3, 39—44.
2. Курош, А. Г.: Теория групп. Москва, 1967.
3. Ляпин, Е. С.: Полугруппы. Москва, 1960.
4. Фукс, Л.: Частично упорядоченные алгебраические системы. Москва, 1965.
5. Artin, E.: Geometric algebra. New-York, 1957.
6. Clifford A. H.: Ordered comm. semigroups of the second kind. Proc. Amer. Math Soc., 9 (1958), 682—687.
7. Clifford, A. H.: Partially ordered groups of the second and third kind. Proc. Amer. Math. Soc., 17 (1966), 218—222.
8. Keimel, Kl.: Demi-groups partiallement ordonnées des deuxième et troisième espece. Atti. Acad. naz. Licei. Rend. Cl. sci. fis. mat. et. natur., 44 (1968), 1, 21—33.
9. Tully, E. J.: A class of nat. partly ordered comm. arch. semigroups with max. condition. Proc. Amer. Math. Soc., 17 (1963), 1133—1139.

Постъпила на 16. XI. 1971 г.

ORDERED SEMIGROUPS AND GROUPS OF THE SECOND AND THIRD KIND

K. Todorov

(SUMMARY)

We shall call a semigroup A ($\leqq$) a left ordered semigroup of the third kind if $C^{(l)}\cup J^{(l)}\neq\emptyset$ (1.2). A left ordered semigroup of the third

kind $A(\leqq)$ for which $N^{(l)}=\varnothing$ (1.2) will be called a left ordered semigroup of the second kind.

One can similarly define right ordered semigroups of the third and second kind.

In [1, 6-8] the authors investigate semigroups of the second kind simultaneously ordered on the left and the right. Examples from 1.5, 2.1, and § 3 show the existence of ordered semigroups of the third kind not belonging to the classes mentioned above.

Elements of the set $Z^{(l)}$ are called [6] left zero elements of the semigroup A. The semigroup A contains a left zero element if and only if it contains a left zero. The element z of A is a left zero element only if z^2 is a left zero of A. If $Z^{(l)}\neq\varnothing$, then it is a twosided ideal of A; the set $Z^{(l)}$ does not contain any elements different from left zeros if A possesses a right unity.

In each non-unity semigroup $A(\leqq)$ there exists an order of the third kind.

Let A with the identity element e possesses a homomorphism on the second order cyclic group $\{e', a'\}$, the subsets C, J being full inverse images of e' and a' respectively under this homomorphism; and let the set J contains an inverted element belonging to the centre of A. Then any non-trivial order in the subgroup C concordant with an operation on the left may be extended to the order of the semigroup so that $C=C^{(l)}$, $J=J^{(l)}$.

Let G be a left ordered group of the second kind: $G=C^{(l)}\cup J^{(l)}$. Then $C^{(l)}$ is a normal subgroup of index 2; the subset P of all the positive elements [4; 25] belonging to G satisfies the following requirements: (a) P is a sub-semigroup of G containing the identity element e of the group G; (b) if the element g from G and its inverse g^{-1} belong to the semigroup P, then g equals e; (c) if the order of the group G is such that: (α) $C^{(l)}\subset C^{(r)}$, then the semigroup P is invariant under the inner automorphisms generated by the elements of $C^{(l)}$; (β) $J^{(l)}\subset J^{(r)}$, then the semigroup P is invariant under the inner automorphisms generated by the elements of $J^{(l)}$; (γ) $C^{(l)}=C^{(r)}$ and $J^{(l)}=J^{(r)}$, then the semigroup P is invariant under the inner automorphisms generated by the elements of G.

The group G does not possess an invariant subgroup of index 2 if and only if $G=G^2$ where G^2 denotes the invariant subgroup of G generated by the elements g^2 $(g\in G)$.

Let G satisfies the following conditions:

1) It possesses an invariant subgroup C of index 2;

2) C contains a non-unity sub-semigroup P containing the identity element e of G;

3) If the element g of G and its inverse g^{-1} belong to the semigroup P, then g equals e.

Then there exists such an order of the second kind on the left of G that $C=C^{(l)}$, $J^{(l)}=G/C$ and the element g of G will be a positive element of G if and only if $g\in P$.

Let G satisfies 1) — 3) and

4) P is invariant under the inner automorphisms of G generated by the elements of C, or by the elements of $J^{(l)}$ or by all the elements of G.

Then the order in the group G can be defined in such a way that $C=C^{(l)}\subset C^{(r)}$, or $J^{(l)}\subset J^{(r)}$, or $C^{(l)}=C^{(r)}$ and $J^{(l)}=J^{(r)}$ and the element g of G will be a positive element of G if and only if $g\in P$.

Let us call the set of all the positive elements of G a positive cone of the left ordered group G of the second kind.

Let semigroup P satisfy the following requirements;

(1) in P the reduction law is true;

(2) P contains a neutral element e;

(3) from $ab=e$ $(a, b\in P)$ follows $a=b=e$;

(4) for any elements $a, b\in P$ there can always be found such elements $u, v\in P$ that $au=bv$.

Then the semigroup P is a positive cone of a partially left ordered group G of the second kind.