ФЛУИДЕН ТРАНСПОРТ ПРИ НАЛИЧИЕ НА ДВУСТРАННО БЕЗКРАЙНИ KÁRMÁN'ОВИ УЛИЦИ ОТ ЛОГАРИТМИЧЕН ТИП. I

Иванка Христова и Иван Чобанов

1. Нека Oxy е правоъгълна дясно ориентирана Descartes' ова координатна система в равнината на идеален флуид, чието движение се управлява от комплексния потенциал

(1) $$f(z)=g(x,\ y)+ih(x,\ y)$$

при

(2) $$z=x+iy.$$

Ако $A_\nu\,(x_\nu\,,\ y_\nu\,)$ $(\nu=1,\ 2)$ са две различни точки в равнината Oxy нормалата $\bar{n}$ към отсечката $A_1\ A_2$ орентираме така, че за наблюдател, който гледа от A_1 към A_2, n да сочи от дясно на ляво. Ако векторът $\overline{A_1A_2}$ сключва ъгъл α с положителната посока на оста Ox при

(3) $$0\leqq\alpha<2\pi,$$

единичният вектор n^0 на n е

(4) $$\bar{n}^0=-\sin\alpha\, i+\cos\alpha\, j.$$

където $i,\ j$ са съответно единичните вектори на осите $Ox,\ Oy$. От израза

(5) $$\bar{v}=\dot{x}\,\bar{i}+\dot{y}\,\bar{j}$$

за скоростта v на произволна флуидна частица $(x,\ y)$ и от (4) следва, че ортогоналната проекция v_n на $\bar{v}$ върху $\bar{n}$ е

(6) $$v_n=-\sin\alpha\,\dot{x}+\cos\alpha\,\dot{y}.$$

Флуидният транспорт през отсечката A_1A_2 — количеството флуид, преминало през A_1A_2 — за време t_2-t_1 по дефиниция е

(7) $$Q(A_1,\ A_2;\ t_1,\ t_2)=\rho\int_{t_1}^{t_2}dt\int_0^L v_n\,dl$$

при (6), където ρ е плътността на хомогенния флуид, L е дължината на A_1A_2, а dl е елемент на дължина от A_1A_2.

При

(8) $$\alpha \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

от (7) и

(9) $$dl = \frac{dx}{\cos\alpha}$$

следва

(10) $$Q(A_1, A_2;\ t_1,\ t_2) = \frac{\rho}{\cos\alpha} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} v_n\, dx$$

при (6), където y в (6) се изразява чрез x посредством уравнението

(11) $$y = \operatorname{tg}\alpha\, x + a$$

на правата A_1A_2.

При

(12) $$\alpha = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

от (7) и

(13) $$dl = \sin\alpha\, dy$$

следва

(14) $$Q(A_1,\ A_2;\ t_1,\ t_2) = \rho \sin\alpha \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{y_1}^{y_2} v_n\, dy$$

при (6), където x в (6) има постоянната стойност x_1.

2. Съгласно дефиницията на понятието „комплексен потенциал" е в сила равенството

(15) $$\frac{dz}{dt} = \frac{df(z)}{dz}$$

при (1), (2). От (15), (1) и формулите на Cauchy-Riemann следва

(16) $$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial g}{\partial t} + i\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial y} - i\frac{\partial g}{\partial y}.$$

В случая (8) от (10), (6), (16) следва

(17) $$Q(A_1,\ A_2;\ t_1,\ t_2) = -\rho \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} \left(\operatorname{tg}\alpha \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial x}\right) dx,$$

където y е изразено чрез x посредством (11). Нека

(18) $$H(x) = h[x,\ y(x)]$$

при (11). От (18), (11) следва

$$\frac{dH}{dx}=\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial y}\frac{dy}{dx}=\frac{\partial h}{\partial x}+\operatorname{tg}\alpha\frac{\partial h}{\partial y}, \tag{19}$$

където навсякъде y е изразено чрез x посредством (11). От (17)—(19) следва

$$Q(A_1, A_2; t_1, t_2) = -\rho\int_{t_1}^{t_2}[h(x_2, y_2)-h(x_1, y_1)]\,dt. \tag{20}$$

В случая (12) от (14), (6), (16) следва

$$Q(A_1, A_2; t_1, t_2)=-\rho\int_{t_1}^{t_2}dt\int_{y_1}^{y_2}\frac{\partial h}{\partial y}\,dy, \tag{21}$$

където

$$h(x, y)=h(x_1, y). \tag{22}$$

Поради (22) от (21) следва

$$Q(A_1, A_2; t_1, t_2)=-\rho\int_{t_1}^{t_2}[h(x_1, y_2)-h(x_1, y_1)]\,dt. \tag{23}$$

Изразът (23) има вида на (20) поради равенството

$$x_1=x_2 \tag{24}$$

в случая (12).

3. В предишните ни работи [1] — [4] бе изследван флуидният транспорт при равнинно течение, в което е на лице двустранно безкрайна симетрична или шахматна Kármán'ова вихрова улица. Тук ще третираме същия въпрос при наличие в идеалния флуид на двустранно безкрайна улица от общ логаритмичен тип [5].

Спрямо неизменно свързаната със собственото движение на несмутения от наличието на сингулярната конфигурация флуид координатна система oxy афиксите на сингулярните точки на улицата са

$$z'_\nu=z'_0+2l_\nu, \tag{25}$$

$$z''_\nu=z''_0+2l_\nu, \tag{26}$$

($\nu=0, \pm1, \pm2, \cdots$). Движението на улицата се задава с

$$z'_0=d+ih-Ut, \quad z'_0=-d-ih-Ut, \tag{27}$$

където t означава времето, $2h$ — широчината на улицата, $2d$ — индекса на отместването на двете сингулярни редици спрямо друга по посока на оста ox, а U—скоростта на улицата (насочена от дясно на ляво)

спрямо координатната система oxy. Сингулярните точки (25), (26) са вихрови центрове (с циркулации — Γ са (25) и Γ за (26) при $\Gamma>0$) и същевременно положителни или отрицателни извори с интензитет I. Комплексният потенциал $f(z)$ на флуидното течение спрямо координатната система oxy е [5]:

$$f(z)=\frac{I}{2\pi}\ \ln\sin\frac{\pi}{2l}(z-z_0')\sin\frac{\pi}{2l}(z-z_0'') \tag{28}$$

$$+\frac{i\Gamma}{2\pi}\ \ln\frac{\sin\frac{\pi}{2l}(z-z_0')}{\sin\frac{\pi}{2l}(z-z_0'')}\ .$$

Поради

$$\ln z=\ln|z|+i\ \mathrm{Arg}\,z \tag{29}$$

на комплексния потенциал (28) може да се даде видът

$$f(z)=\frac{I}{2\pi}\Big\{\ln\Big|\sin\frac{\pi}{2l}(z-z_0')\sin\frac{\pi}{2l}(z-z_0'') \tag{30}$$

$$+\ i\ \mathrm{Arg}\Big[\sin\frac{\pi}{2l}(z-z_0')\sin\frac{\pi}{2l}(z-z_0'')\Big]\Big\}$$

$$+\frac{i\Gamma}{2\pi}\left[\ln\left|\frac{\sin\frac{\pi}{2l}(z-z_0')}{\sin\frac{\pi}{2l}(z-z_0'')}\right|+i\ \mathrm{Arg}\ \frac{\sin\frac{\pi}{2l}(z-z_0')}{\sin\frac{\pi}{2l}(z-z_0'')}\right].$$

От (27), (2) следва

$$\sin\frac{\pi}{2l}(z-z_0')=\sin\frac{\pi}{2l}[(x-d+Ut)+i(y-h)]. \tag{31}$$

$$\sin\frac{\pi}{2l}(z-z_0'')=\sin\frac{\pi}{2l}[(x+d+Ut)+i(y+h)]. \tag{32}$$

Но

$$\sin(\alpha+i\beta)^2=\frac{1}{2}(\mathrm{ch}\,2\beta-\cos 2\alpha). \tag{33}$$

От (31)—(33) следва

$$\left|\frac{\sin\frac{\pi}{2l}(z-z_0')}{\sin\frac{\pi}{2l}(z-z_0'')}\right|^2=\frac{\mathrm{ch}\frac{\pi}{l}(y-h)-\cos\frac{\pi}{l}(x-d+Ut)}{\mathrm{ch}\frac{\pi}{l}(y+h)-\cos\frac{\pi}{l}(x+d+Ut)}\ . \tag{34}$$

От (27) следва

$$\sin\frac{\pi}{2l}(z-z_0')\sin\frac{\pi}{2l}(z-z_0'') \tag{35}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\cos\frac{\pi}{2l}(z_0'-z_0'')-\cos\frac{\pi}{2l}(2z-z_0'-z_0'')\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos\frac{\pi}{l}(d+ih) - \cos\frac{\pi}{l}(x+Ut+iy)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos\frac{\pi d}{l}\operatorname{ch}\frac{\pi h}{l} - \cos\frac{\pi}{l}(x+Ut)\operatorname{ch}\frac{\pi y}{l}\right]$$

$$+ \frac{i}{2}\left[\sin\frac{\pi}{l}(x+Ut)\operatorname{sh}\frac{\pi y}{l} - \sin\frac{\pi d}{l}\operatorname{sh}\frac{\pi h}{l}\right].$$

От (35) и

(36) $$\operatorname{tg}\operatorname{Arg} z = \frac{y}{x}$$

следва

(37) $$\operatorname{tg}\operatorname{Arg}\left[\sin\frac{\pi}{2l}(z-z_0')\sin\frac{\pi}{2l}(z-z_0'')\right]$$

$$= \frac{\sin\frac{\pi}{l}(x+Ut)\operatorname{sh}\frac{\pi y}{l} - \sin\frac{\pi d}{l}\operatorname{sh}\frac{\pi h}{l}}{\cos\frac{\pi d}{l}\operatorname{ch}\frac{\pi h}{l} - \cos\frac{\pi}{l}(x+Ut)\operatorname{ch}\frac{\pi y}{l}}.$$

Нека

(38) $$\operatorname{Arctg}\frac{y}{x} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \varepsilon\pi,$$

където arctg означава главната стойност на аркус-тангенса, а

(39) $$\varepsilon = \begin{cases} -1 & (x<0,\ y<0), \\ 0 & (x>0), \\ 1 & (x<0,\ y>0). \end{cases}$$

От (37)—(39) следва

(40) $$\operatorname{Arg}\left[\sin\frac{\pi}{2l}(z-z_0')\sin\frac{\pi}{2l}(z-z_0'')\right]$$

$$= \operatorname{Arctg}\frac{\sin\frac{\pi}{l}(x+Ut)\operatorname{sh}\frac{\pi y}{l} - \sin\frac{\pi d}{l}\operatorname{sh}\frac{\pi h}{l}}{\cos\frac{\pi d}{l}\operatorname{ch}\frac{\pi h}{l} - \cos\frac{\pi}{l}(x+Ut)\operatorname{ch}\frac{\pi y}{l}}.$$

От (30), (34), (40) следва

(41) $$\operatorname{Jm} f(z) = \frac{l}{2\pi}\operatorname{Arctg}\frac{\sin\frac{\pi}{l}(x+Ut)\operatorname{sh}\frac{\pi y}{l} - \sin\frac{\pi d}{l}\operatorname{sh}\frac{\pi h}{l}}{\cos\frac{\pi d}{l}\operatorname{ch}\frac{\pi h}{l} - \cos\frac{\pi}{l}(x+Ut)\operatorname{ch}\frac{\pi y}{l}}$$

$$+ \frac{\Gamma}{4\pi}\ln\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(y-h) - \cos\frac{\pi}{l}(x-d+Ut)}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(y+h) - \cos\frac{\pi}{l}(x+d+Ut)}.$$

От (20), (23), (24), (41) следва, че флуидният транспорт през отсечката A_1A_2 за време t_2-t_1, при наличие в идеалния флуид на двустранно безкрайната Kármán'ова улица (25), (26) с обобщени сингулярности от логаритмичен тип, спрямо неизменно свързаната с несмутения от наличието на сингулярната конфигурация флуид координатна система oxy, е

(42)
$$Q(A_1, A_2; t_1, t_2)$$
$$= \frac{\rho l}{2\pi}\int_{t_1}^{t_2}\left[\operatorname{Arctg}\frac{\sin\frac{\pi}{l}(x_1+Ut)\operatorname{sh}\frac{\pi y_1}{l}-\sin\frac{\pi d}{l}\operatorname{sh}\frac{\pi h}{l}}{\cos\frac{\pi d}{l}\operatorname{ch}\frac{\pi h}{l}-\cos\frac{\pi}{l}(x_1+Ut)\operatorname{ch}\frac{\pi y_1}{l}}\right.$$
$$\left.-\operatorname{Arctg}\frac{\sin\frac{\pi}{l}(x_2+Ut)\operatorname{sh}\frac{\pi y_2}{l}-\sin\frac{\pi d}{l}\operatorname{sh}\frac{\pi h}{l}}{\cos\frac{\pi d}{l}\operatorname{ch}\frac{\pi h}{l}-\cos\frac{\pi}{l}(x_2+Ut)\operatorname{ch}\frac{\pi y_2}{l}}\right]dt$$
$$+\frac{\rho\Gamma}{4\pi}\int_{t_1}^{t_2}\left[\ln\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(y_1-h)-\cos\frac{\pi}{l}(x_1-d+Ut)}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(y_1+h)-\cos\frac{\pi}{l}(x_1+d+Ut)}\right.$$
$$\left.-\ln\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(y_2-h)-\cos\frac{\pi}{l}(x_2-d+Ut)}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(y_2+h)-\cos\frac{\pi}{l}(x_2+d+Ut)}\right]dt.$$

4. Да разгледаме системата уравнения

(43)
$$a=-\operatorname{th}\alpha,$$

(44)
$$b=\frac{\operatorname{sh}\beta\sin\gamma}{\operatorname{ch}\alpha},$$

(45)
$$c=-\frac{\operatorname{ch}\beta\cos\gamma}{\operatorname{ch}\alpha},$$

където a, b, c са дадени числа, а α, β, γ са неизвестни.

Уравнението (43) е равносилно с

(46)
$$e^{2\alpha}=\frac{1-a}{1+a}.$$

При

(47)
$$\frac{1-a}{1+a}>0,$$

т. е.

(48)
$$a^2<1,$$

равенството (46) е равносилно с

(49) $$\alpha = \ln\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}.$$

И така, необходимо и достатъчно условие, за да има решение α уравнението (43), е (48). При (48) единственото решение на (43) е (49).

От (49) следва

(50) $$\operatorname{ch}\alpha = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}} + \sqrt{\frac{1+a}{1-a}}\right),$$

т. е.

(51) $$\operatorname{ch}^2\alpha = \frac{1}{1-a^2}.$$

От (44) следва, че случаят

(52) $$b = 0$$

е равносилен с

(53) $$\operatorname{sh}\beta = 0$$

или

(54) $$\sin\gamma = 0.$$

От (45) следва, че случаят (52) е равносилен с

(55) $$\cos\gamma = -c\operatorname{ch}\alpha$$

при (53) и с

(56) $$\operatorname{ch}\beta = (\operatorname{csguc})\operatorname{ch}\alpha$$

при (54).

Равенството (55) е възможно при

(57) $$c^2\operatorname{ch}^2\alpha \leqq 1,$$

т. е. при

(58) $$0 \leqq 1 - a^2 - c^2$$

съгласно (51); равенството (56) е възможно при

(59) $$c^2\operatorname{ch}^2\alpha \geqq 1,$$

т. е. при

(60) $$1 - a^2 - c^2 \leqq 0$$

съгласно (51).

При (58) решенията на уравнението (55) се дават с

(61) $$\gamma = \operatorname{Arccos}\frac{-c}{\sqrt{1-a^2}}$$

съгласно (51); при (60) решенията на уравнението (56) се дават с

(62) $$e^{\beta} = (\operatorname{csguc})\operatorname{ch}\alpha \pm \sqrt{c^2\operatorname{ch}^2\alpha - 1}.$$

Подкоренната величина в (62) е винаги неотрицателна, тъй като неравенствата (60) и (59) са равносилни съгласно (51). Поради (51) на (62) може да се даде видът

(63) $$\beta = \ln\left(\frac{\operatorname{csg} uc}{\sqrt{1-a^2}} \pm \sqrt{\frac{a^2+c^2-1}{1-a^2}}\right).$$

Нека сега

(64) $$b \neq 0$$

и нека

(65) $$B = b \operatorname{ch}\alpha = \operatorname{sh}\beta \sin\gamma,$$

(66) $$C = -c \operatorname{ch}\alpha = \operatorname{ch}\beta \cos\gamma,$$

От (64) — (66) следва

(67) $$\frac{B^2}{\operatorname{sh}^2\beta} + \frac{C^2}{\operatorname{ch}^2\beta} = 1.$$

При

(68) $$u = \operatorname{ch}^2\beta$$

уравнението (67) е равносилно с

(69) $$u^2 - (B^2 + C^2 + 1)u + C^2 = 0,$$

т. е. с

(70) $$u_{1,2} = \frac{B^2+C^2+1 \pm \sqrt{(B^2+C^2+1)^2 - 4C^2}}{2}.$$

Величините (70) са винаги реални и различни. Наистина, неравенството

(71) $$(B^2+C^2+1)^2 - 4C^2 > 0$$

е равносилно с

(72) $$[(B+C)^2+1][(B-C)^2+1] > 0,$$

което е в сила за всички реални стойности на B и C.

Необходимо и достатъчно условие за (70) при (68) е

(73) $$B^2+C^2+1 \pm \sqrt{(B^2+C^2+1)^2 - 4C^2} \geq 2.$$

Неравенството

(74) $$B^2+C^2+1 + \sqrt{(B^2+C^2+1)^2 - 4C^2} \geq 2$$

е винаги изпълнено. Наистина, при

(75) $$1 - B^2 - C^2 < 0$$

то е очевидно вярно; при

(76) $$1 - B^2 - C^2 \geq 0$$

то е равносилно с очевидното

(77) $$B^2 \geq 0.$$

Неравенството

(78) $$B^2+C^2+1-\sqrt{(B^2+C^2+1)^2-4C^2}\geqq 2$$

е абсурдно. Наистина при

(79) $$B^2+C^2-1<0$$

то е очевидно невярно; при

(80) $$B^2+C^2-1\leqq 0$$

то е равносилно с очевидно невярното при (64) поради (65) неравенство

(81) $$B^2\leqq 0.$$

И така в (73) е възможен само знакът „плюс" и тогава от (68), (70) следва

(82) $$\operatorname{ch}^2\beta=\frac{B^2+C^2+1+\sqrt{(B^2+C^2+1)^2-4C^2}}{2}.$$

Поради (65), (66), (51) равенството (82) приема вида

(83) $$\operatorname{ch}\beta=\sqrt{\frac{b^2+c^2+1-a^2+\sqrt{(b^2+c^2+1-a^2)^2-4c^2(1-a^2)}}{2(1-a^2)}}$$

От (64)—(66) следва

(84) $$\frac{C^2}{\cos^2\gamma}-\frac{B^2}{\sin^2\gamma}=1.$$

При

(85) $$v=\cos^2\gamma$$

уравнението (84) е равносилно с

(86) $$v^2-(B^2+C^2+1)v+C^2=0.$$

Уравненията (69), (86) съвпадат и за (86) важи извършеният за (69) анализ при формална замяна на u с v.

Необходимо и достатъчно условие за (86) при (85) е

(87) $$B^2+C^2+1\pm\sqrt{(B^2+C^2+1)^2-4C^2}\leqq 2.$$

Сега в (87) е възможен само знакът „минус" и от (85), (86) следва

(88) $$\cos^2\gamma=\frac{B^2+C^2+1-\sqrt{(B^2+C^2+1)^2-4C^2}}{2}.$$

Поради (65), (66), (51) равенството (88) приема вида

(89) $$\cos\gamma=\pm\sqrt{\frac{b^2+c^2+1-a^2-\sqrt{(b^2+c^2+1-a^2)^2-4c^2(1-a^2)}}{2(1-a^2)}}$$

— резултат, който може да се получи и непосредствено от (66), (83) и (51).

5. Нека

(90) $$\varphi(x)=\operatorname{arc\,tg}\frac{a\sin x+b}{\cos x+c}$$

при (43)—(45), (48) и

(91) $$a^2-b^2-a^2c^2\neq 0.$$

От (91) следва

(92) $$a^2+b^2\neq 0.$$

Функцията (90) с (43) — (45), (48), (91) има период 2π, частично монотонна е в интервала $[0, 2\pi]$ и няма в него точки на прекъсване. Съгласно критерия на Dirichlet тя е развиваема в ред на Fourier:

(93) $$\varphi(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x),$$

където

(94) $$\pi a_0=\int_0^{2\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{a\sin\theta+b}{\cos\theta+c}d\theta,$$

(95) $$\pi a_\nu=\int_0^{2\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{a\sin\theta+b}{\cos\theta+c}\cos\nu\theta\,d\theta,$$

(96) $$\pi b_\nu=\int_0^{2\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{a\sin\theta+b}{\cos\theta+c}\sin\nu\theta\,d\theta$$

$(\nu=1, 2, \ldots)$.

За пресмятането на (94) първо извършваме интегриране по части:

(97) $$\pi a_0=\theta\operatorname{arc\,tg}\frac{a\sin\theta+b}{\cos\theta+c}\Big|_0^{2\pi}-I_0,$$

където

(98) $$I_0=\int_0^{2\pi}\theta\,\frac{a+ac\cos\theta+b\sin\theta}{(a\sin\theta+b)^2+(\cos\theta+c)^2}\,d\theta.$$

От (97) следва

(99) $$\pi a_0=2\pi\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{1+c}-I_0$$

при

(100) $$1+c\neq 0;$$

(101) $$\pi a_0 = -\pi^2 \operatorname{sgn} b - I_0$$

при (64) и

(102) $$1 + c = 0;$$

(103) $$\pi a_0 = \pi^2 \operatorname{sgn} a - I_0$$

при (52) и (102).

За пресмятането на (95) първо извършваме интегриране по части:

(104) $$\pi a_\nu = \frac{1}{\nu} \sin \nu\theta \operatorname{arc\,tg} \frac{a \sin \theta + b}{\cos \theta + c} \Bigg|_0^{2\pi} - A_\nu = A_\nu$$

($\nu = 1, 2, \ldots$), където

(105) $$A_\nu = \frac{1}{\nu} \int_0^{2\pi} \sin \nu\theta \frac{a + ac \cos \theta + b \sin \theta}{(a \sin\theta + b)^2 + (\cos\theta + c)^2} \, d\theta$$

($\nu = 1, 2, \ldots$).

За пресмятането на (96) също първо извършваме интегриране по части:

(106) $$\pi b_\nu = -\frac{1}{\nu} \cos \nu\theta \operatorname{arc\,tg} \frac{a \sin \theta + b}{\cos \theta + c} \Bigg|_0^{2\pi} + B_\nu = B_\nu$$

($\nu = 1, 2, \ldots$), където

(107) $$B_\nu = \frac{1}{\nu} \int_0^{2\pi} \cos \nu\theta \frac{a + ac \cos \theta + b \sin \theta}{(a \sin \theta + b)^2 + (\cos \theta + c)^2} \, d\theta$$

($\nu = 1, 2, \ldots$).

6. Знаменателите в десните страни на (98), (105), (107) се анулират точно когато едновременно

(108) $$a \sin \theta + b = 0,$$

(109) $$\cos \theta + c = 0.$$

Необходимо и достатъчно условие, за да съществува ъгъл θ със (108) (109) при

(110) $$a \neq 0$$

е

(111) $$\left(\frac{b}{a}\right)^2 + c^2 = 1,$$

което противоречи на (91). При

(112) $$a = 0$$

от (108) следва (52). Но условията (112), (52) противоречат на (92), т. е. пак на (91).

И така при (91) не съществува ъгъл θ със (108), (109), т. е. знаменателите на (98), (105), (107) не се анулират за никоя реална стойнойност на θ.

Поради (43) — (45) равенството

$$a^2-b^2-a^2c^2=0 \tag{113}$$

е равносилно със

$$\operatorname{sh}^4\alpha-(\operatorname{sh}^2\beta+\sin^2\gamma)\operatorname{sh}^2\alpha+\operatorname{sh}^2\beta\sin^2\gamma=0, \tag{114}$$

т. е. със

$$\operatorname{sh}^2\alpha=\operatorname{sh}^2\beta \tag{115}$$

или

$$\operatorname{sh}^2\alpha=\sin^2\gamma. \tag{116}$$

Условието (115) е равносилно със

$$\alpha=\pm\beta. \tag{117}$$

Условието (116) налага върху α ограничението

$$\operatorname{sh}^2\alpha\leq 1 \tag{118}$$

т. е.

$$\frac{1}{2}\ln(3-\sqrt{8})\leq\alpha\leq\frac{1}{2}\ln(3+\sqrt{8}). \tag{119}$$

При (119) условието (116) е равносилно със

$$\gamma=\pm\operatorname{Arc}\sin\operatorname{sh}\alpha. \tag{120}$$

7. За пресмятането на интеграла (98) ще разгледаме интеграла

$$I=\int_c F(z)\,dz, \tag{121}$$

където

$$F(z)=-\frac{\operatorname{Log} z}{z}\,\frac{a+ac\,\dfrac{z+z^{-1}}{2}+b\,\dfrac{z-z^{-1}}{2i}}{\left(a\,\dfrac{z-z^{-1}}{2i}+b\right)^2+\left(\dfrac{z+z^{-1}}{2}+c\right)^2} \tag{122}$$

$$=2i\operatorname{Log} z\,\frac{P_0(z)}{P_1(z)P_2(z)}$$

при

$$P_0(z)=(b+iac)z^2+2iaz+(-b+iac), \tag{123}$$

$$P_1(z)=(1+a)z^2+2(c+ib)z+1-a, \tag{124}$$

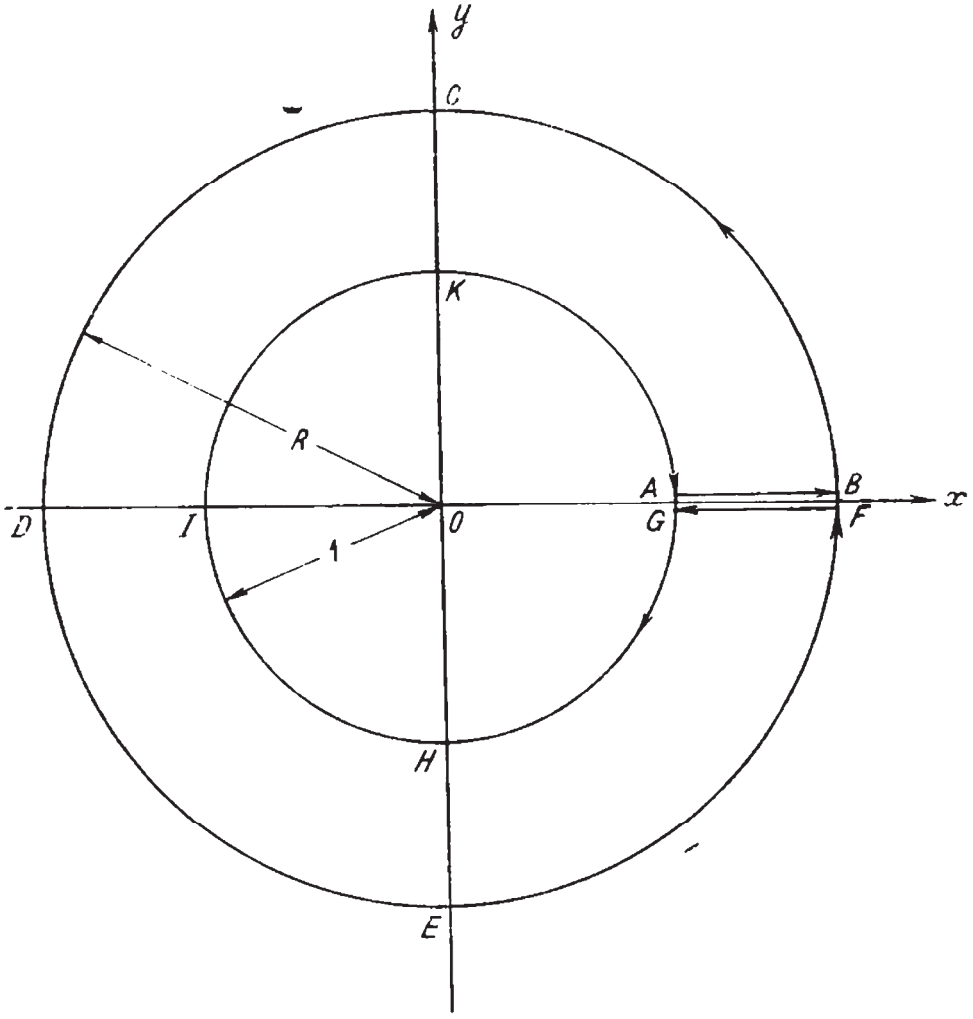
$$P_2(z)=(1-a)z^2+2(c-ib)z+1+a, \tag{125}$$

а C е представеният на фиг. 1 контур. При това $\operatorname{Log} z$ в (122) означава онзи клон на логаритмичната функция, за който

(126) $$0 \leqq \operatorname{Arg} z < 2\pi.$$

Полагаме

(127) $$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4,$$



Фиг. 1

където I_1 и I_3 са интегралите от $F(z)$ съответно по отсечките AB и FG, I_2 е интегралът от $F(z)$ по окръжността $BCDEF$ с радиус $R>1$, а I_4 е интегралът от $F(z)$ по окръжността $GHIKA$ с радиус 1.

От

(128) $$I_1 = 2i \int_1^R \ln x \, \frac{P_0(x)}{P_1(x)\, P_2(x)} \, dx,$$

(129) $$I_3 = 2i \int_1^R (\ln x + 2\pi i) \frac{P_0(x)}{P_1(x) P_2(x)} \, dx$$

следва

$$I_1+I_3=4\pi\int_1^R\frac{P_0(x)}{P_1(x)P_2(x)}\,dx. \tag{130}$$

От (121)—(126) следва

$$|I_2|\leq 2\pi R\max_{|z|=R}|F(z)|=4\pi R\max_{|z|=R}\left|\operatorname{Log} z\,\frac{P_0(z)}{P_1(z)P_2(z)}\right|. \tag{131}$$

От (29) следва

$$\max_{|z|=R}|\operatorname{Log} z|=\sqrt{\ln^2 R+4\pi^2}. \tag{132}$$

От (131), (132) и (123)—(125) следва

$$\lim_{R\to\infty}|I_2|=0. \tag{133}$$

От (98), (121), (122), (127) следва

$$I_4=-I_0. \tag{134}$$

От (127), (130), (133), (134) следва

$$I_0=4\pi\int_1^\infty\frac{P_0(x)}{P_1(x)P_2(x)}\,dx-2\pi i\,\Sigma\operatorname{Res}F(z), \tag{135}$$

където сумирането е разпространено върху онези полюси на $F(z)$, които са разположени извън единичната окръжност.

За намирането на последните трябва да решим уравненията от втора степен спрямо z:

$$(1+a)z^2+2(c+ib)z+1-a=0, \tag{136}$$

$$(1-a)z^2+2(c-ib)z+1+a=0, \tag{137}$$

съгласно (122) и (124), (125). От (136), (137) се вижда, че ако ζ е корен на (136), то $\bar{\zeta}^{-1}$ е корен на (137) и обратно. Поради това и от

$$|\zeta\,\bar{\zeta}^{-1}|=1 \tag{138}$$

следва, че от четирите нули на знаменателя $P_1(z)P_2(z)$ на $F(z)$ най-много две могат да се намират извън единичната окръжност. В т. 6 обаче бе установено, че при (91) знаменателят $P_1(z)P_2(z)$ на $F(z)$ няма нули върху единичната окръжност. И така $F(z)$ има точно два полюса извън единичната окръжност.

8. Нека $z_{1,\nu}$ и $z_{2,\nu}$ ($\nu=1, 2$) са съответно нулите на полиномите (124) и (125). От (136), (137) следва

$$z_{\mu,\nu}=\frac{-[c-i(-1)^\mu b]+\sqrt{[c-i(-1)^\mu b]^2+a^2-1}}{1-(-1)^\mu a} \tag{139}$$

(μ, $\nu=1$, 2), където корените се пресмятат по формулата

$$(140)\qquad \sqrt{p+iq}=\pm\left(\sqrt{\frac{p+\sqrt{p^2+q^2}}{2}}+i\,\mathrm{sgn}\,q\sqrt{\frac{-p+\sqrt{p^2+q^2}}{2}}\right).$$

От (139), (140) следва

$$(141)\qquad z_{\mu\nu}=\frac{-1}{1-(-1)^{\mu}a}\left\{\left[c+(-1)^{\nu}\sqrt{\frac{p+\sqrt{p^2+q_\mu^2}}{2}}\right]\right.$$

$$\left.+i\left[b+(-1)^{\nu}\,\mathrm{sgn}\,q_\mu\sqrt{\frac{-p+\sqrt{p^2+q_\mu^2}}{2}}\right]\right\}$$

(μ, $\nu=1$, 2), където

$$(142)\qquad p=a^2-b^2+c^2-1,\quad q_\mu=(-1)^{\mu+1}2bc\qquad(\mu=1,\ 2).$$

От изразите (141) със (142) става ясно, че оценката на модула на $z_{\mu\nu}$ (μ, $\nu=1$, 2) — дали е по-голям или по-малък от 1 — е свързана със значителни технически трудности. Ето защо ще решим този въпрос не въз основа на изразите (141) със (142), а по друг начин, изложен в следващата точка.

9. От (43) следва

$$(143)\qquad 1+a=\frac{e^{-\alpha}}{\mathrm{ch}\,\alpha},\quad 1-a=\frac{e^{\alpha}}{\mathrm{ch}\,\alpha}.$$

Като умножим с $\mathrm{ch}\,\alpha$ двете страни на (136), (137) и имаме пред вид (143), получаваме съответно

$$(144)\qquad e^{-\alpha}z^2-2(P+iQ)z+e^{\alpha}=0,$$

$$(145)\qquad e^{\alpha}z^2-2(P-iQ)z+e^{-\alpha}=0,$$

където е положено

$$(146)\qquad P=-c\,\mathrm{ch}\,\alpha,\quad Q=-b\,\mathrm{ch}\,\alpha.$$

От (146), (44), (45) следва

$$(147)\qquad P=\mathrm{ch}\,\beta\cos\gamma,\qquad Q=-\mathrm{sh}\,\beta\sin\gamma.$$

Нека $w_\nu(z)$ ($\nu=1$, 2) са функциите на z, определени съответно с равенствата

$$(148)\qquad e^{-\alpha}z^2+2w_1z+e^{\alpha}=0,$$

$$(149)\qquad e^{\alpha}z^2+2w_2z+e^{-\alpha}=0.$$

От (148), (149) следва

$$(150)\qquad w_1(z)=-\frac{1}{2}\left(e^{-\alpha}z+\frac{1}{e^{-\alpha}z}\right),$$

(151) $$w_2(z) = -\frac{1}{2}\left(e^{\alpha} z + \frac{1}{e^{\alpha} z}\right).$$

Нека

(152) $$z_1'' = \frac{e^{2\alpha}}{z_1'}.$$

От (150), (152) следва

(153) $$w_1(z_1') = w_1(z_1'').$$

И така, ако познаваме един корен z_1' на уравнението (148) при фиксирано w_1, вторият корен z_1'' на това уравнение се дава със (152). Двата корена съвпадат точно при

(154) $$w_1^2 = 1$$

и тогава

(155) $$z_1' = z_1'' = \pm e^{\alpha},$$

където знакът се определя от знака на w_1.

Аналогично заключение се прави и за уравнението (149): нека

(156) $$z_2'' = \frac{e^{-2\alpha}}{z_2'}.$$

От (151), (156) следва

(157) $$w_2(z_2') = w_2(z_2'').$$

И така, ако познаваме един корен z_2' на уравнението (149) при фиксирано w_2, вторият корен z_2'' на това уравнение се дава със (156). Двата корена съвпадат точно при

(158) $$w_2^2 = 1$$

и тогава

(159) $$z_2' = z_2'' = \pm e^{-\alpha},$$

където знакът се определя от знака на w_2.

Ако

(160) $$w_2 = \bar{w}_1$$

и

(161) $$e^{-\alpha}\zeta^2 + 2w_1\zeta + e^{\alpha} = 0,$$

то

(162) $$e^{\alpha}(\bar{\zeta}^{-1})^2 + 2\bar{w}_2\bar{\zeta}^{-1} + e^{-\alpha} = 0.$$

Следователно, ако при (160) ζ е корен на (148), другият корен на това уравнение е $e^{2\alpha}\zeta^{-1}$, а корените на уравнението (149) са

$$\bar{\zeta}^{-1} \text{ и } e^{-2\alpha}\bar{\zeta}.$$

И така достатъчно е да се намери само един корен на уравненията (148), (149), за да се познават по този начин всичките им корени.

Нека

(163) $$\zeta = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

е корен на уравнението (148). Заместваме (163) в (150) и получаваме

(164) $$\operatorname{Re} w_1 = -\frac{1}{2}\left(\frac{e^\alpha}{r} + \frac{r}{e^\alpha}\right)\cos\varphi,$$

(165) $$\operatorname{Im} w_1 = \frac{1}{r}\left(\frac{e^\alpha}{r} - \frac{r}{e^\alpha}\right)\sin\varphi$$

Нека

(166) $$r = e^\rho .$$

Тогава от (164), (165) следва

(167) $$\operatorname{Re} w_1 = -\operatorname{ch}(\alpha-\rho)\cos\varphi,$$

(168) $$\operatorname{Im} w_1 = \operatorname{sh}(\alpha-\rho)\sin\varphi.$$

При

(169) $$w_1 = -(P+iQ)$$

от (167), (168), (147) следва

(170) $$\operatorname{ch}(\alpha-\rho)\cos\varphi = \operatorname{ch}\beta\cos\gamma,$$

(171) $$\operatorname{sh}(\alpha-\rho)\sin\varphi = \operatorname{sh}\beta\sin\gamma.$$

От (170), (171) следва

(172) $$\alpha-\rho=\beta,\ \varphi=\gamma,$$

т. е

(173) $$\zeta = e^{\alpha-\beta}(\cos\gamma + i\sin\gamma)$$

съгласно (163).

И така едното решение на уравнението (144) при (147) е (173). Като съобразим направените по-горе бележки за корените на уравненията (161), (162) при (160), получаваме за корените на уравненията (144), (145) при (147) или, което е същото, за корените $z_{\mu\nu}$ (μ, $\nu=1$, 2) на уравненията (136), (137) при (43)—(45) изразите

(174) $$z_{\mu\nu} = \exp[(-1)^{1+\mu}\alpha + (-1)^\nu\beta][\cos\gamma + i(-1)^{\mu+\nu}\sin\gamma]$$

(μ, $\nu=1$, 2).

10. В настоящата точка ще пресметнем интеграла в дясната страна на (135):

$$I_5 = \int_1^\infty \frac{P_0(x)}{P_1(x)P_2(x)}\,dx \tag{175}$$

при (123)—(125). Нека тъждествено

$$\frac{P_0(x)}{P_1(x)P_2(x)} = \frac{Mx+N}{P_1(x)} + \frac{Px+Q}{P_2(x)}. \tag{176}$$

От (176) и (123)—(125) следва

$$\begin{aligned}(b+iac)x^2+2iax+(-b+iac)\\ =(Mx+N)[(1-a)x^2+2(c-ib)x+1+a]\\ +(Px+Q)[(1+a)x^2+2(c+ib)x+1-a].\end{aligned} \tag{177}$$

От (177) следва

$$(1-a)M+(1+a)P=0. \tag{178}$$

$$2(c-ib)M+2(c+ib)P+(1-a)N+(1+a)Q=b+iac, \tag{179}$$

$$(1+a)M+(1-a)P+2(c-ib)N+2(c+ib)Q=2ia, \tag{180}$$

$$(1+a)N+(1-a)P=-b+iac. \tag{181}$$

Нека Δ е детерминантата пред неизвестните M, P, N, Q на системата уравнения (178)—(181). Тогава

$$\Delta=-16(a^2-b^2-a^2c^2)\neq 0 \tag{182}$$

съгласно (91). Ако δ е съответната на M детерминанта на системата уравнения (178)—(181), образувана от коефициентите пред неизвестните и свободните членове, то

$$\delta=-8(a+1)(a^2-b^2-a^2c^2)i. \tag{183}$$

От (182), (183) следва

$$M=\frac{1+a}{2}i. \tag{184}$$

От (184), (178) следва

$$P=\frac{a-1}{2}i. \tag{185}$$

От (180), (184), (185) следва

$$(c-ib)N+(c+ib)Q=0. \tag{186}$$

От (186), (181) следва

$$N=\frac{-b+ic}{2}, \qquad Q=\frac{-b-ic}{2}. \tag{187}$$

От (184), (185), (187), (175), (176) следва

$$(188)\qquad I_5 = \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{(1+a)ix-b+ic}{P_1(x)}\,dx + \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{(a-1)ix-b-ic}{P_2(x)}\,dx$$

$$= \frac{1}{4i}\int_1^\infty \frac{-2(1+a)x-2(c+ib)}{P_1(x)}\,dx + \frac{1}{4i}\int_1^\infty \frac{2(1-a)x+2(c-ib)}{P_2(x)}\,dx$$

$$= \frac{i}{4}\int_1^\infty \frac{P_2'(x)}{P_1(x)}dx - \frac{i}{4}\int_1^\infty \frac{P_2'(x)}{P_2(x)}dx = \frac{i}{4}\,\mathrm{Log}\,\frac{P_1(x)}{P_2(x)}\Big|_1^\infty .$$

От (188) и (124), (125) следва

$$(189)\qquad I_5 = \frac{i}{4}\left[\ln\frac{1+a}{1-a} - \mathrm{Log}\,\frac{(1+c)+ib}{(1+c)-ib}\right]$$

$$= \frac{i}{4}\left[\ln\frac{1+a}{1-a} - i\,\mathrm{Arg}\,\frac{(1+c)+ib}{(1+c)-ib}\right].$$

Но

$$(190)\qquad \mathrm{Arg}\,\frac{(1+c)+ib}{(1+c)-ib} = \mathrm{Arg}\,[(1+c)+ib]^2$$

$$= 2\,\mathrm{Arg}[(1+c)+ib] = 2\left\{\mathrm{arc\,tg}\,\frac{b}{1+c} + \frac{\pi}{2}\,[1-\mathrm{sgn}\,(1+c)]\right\}$$

при (100) и

$$(191)\qquad \mathrm{Arg}\,\frac{ib}{-ib} = \pi.$$

От (189)—(191) и (46) следва

$$(192)\qquad I_5 = \frac{1}{2}\left\{\arg\frac{b}{1+c} + \frac{\pi}{2}\,[1-\mathrm{sgn}\,(1+c)] - i\,\alpha\right\}$$

при (100) и

$$(193)\qquad I_5 = \frac{\pi}{2} - i\,\frac{\alpha}{2}$$

при (102).

11. От (174) следва, че за пресмятането на сумата на резидуумите в дясната страна на (135) трябва да се разгледат отделно следните четири случая:

$$(194)\qquad 0<\alpha-\beta,\quad 0<\alpha+\beta;$$

$$(195)\qquad 0<\alpha-\beta,\quad \alpha+\beta<0;$$

$$(196)\qquad \alpha-\beta<0,\quad 0<\alpha+\beta;$$

$$(197)\qquad \alpha-\beta<0,\quad \alpha+\beta<0$$

поради

(198) $$\zeta_{11}=e^{\alpha-\beta}(\cos\gamma+i\sin\gamma),$$

(199) $$\zeta_{12}=e^{\alpha+\beta}(\cos\gamma-i\sin\gamma),$$

(200) $$\zeta_{21}=e^{-\alpha-\beta}(\cos\gamma-i\sin\gamma),$$

(201) $$\zeta_{22}=e^{-\alpha+\beta}(\cos\gamma+i\sin\gamma).$$

От (122)—(125) и (194)—(201) следва:

(202) $$\Sigma\operatorname{Res}F(z)=2i\left[\frac{\operatorname{Log}\zeta_{11}P_0(\zeta_{11})}{P_1'(\zeta_{11})P_2(\zeta_{11})}+\frac{\operatorname{Log}\zeta_{12}P_0(\zeta_{12})}{P_1'(\zeta_{12})P_2(\zeta_{12})}\right],$$

в случая (194),

(203) $$\Sigma\operatorname{Res}F(z)=2i\left[\frac{\operatorname{Log}\zeta_{11}P_0(\zeta_{11})}{P_1'(\zeta_{11})P_2(\zeta_{11})}+\frac{\operatorname{Log}\zeta_{21}P_0(\zeta_{21})}{P_1(\zeta_{21})P_2'(\zeta_{21})}\right],$$

в случая (195),

(204) $$\Sigma\operatorname{Res}F(z)=2i\left[\frac{\operatorname{Log}\zeta_{12}P_0(\zeta_{12})}{P_1'(\zeta_{12})P_2(\zeta_{12})}+\frac{\operatorname{Log}\zeta_{22}P_0(\zeta_{22})}{P_1(\zeta_{22})P_2'(\zeta_{22})}\right],$$

в случая (196) и

(205) $$\Sigma\operatorname{Res}F(z)=2i\left[\frac{\operatorname{Log}\zeta_{21}P_0(\zeta_{21})}{P_1(\zeta_{21})P_2'(\zeta_{21})}+\frac{\operatorname{Log}\zeta_{22}P_0(\zeta_{22})}{P_1(\zeta_{22})P_2'(\zeta_{22})}\right]$$

в случая (197).

От (124), (143), (198), (44), (45) следва

(206) $$P_1'(\zeta_{11})=2(1+a)\zeta_{11}+2(c+ib)$$
$$=2\left[\frac{e^{-\alpha}}{\operatorname{ch}\alpha}e^{\alpha-\beta}(\cos\gamma+i\sin\gamma)+\frac{-\operatorname{ch}\beta\cos\gamma+i\operatorname{sh}\beta\sin\gamma}{\operatorname{ch}\alpha}\right]$$
$$=\frac{2}{\operatorname{ch}\alpha}(-\operatorname{sh}\beta\cos\gamma+i\operatorname{ch}\beta\sin\gamma).$$

От (125), (143), (198), (44), (45) следва

(207) $$P_2(\zeta_{11})=\zeta_{11}[(1-a)\zeta_{11}+2(c-ib)+(1+a)\zeta_{11}^{-1}]$$
$$=\zeta_{11}\left[\frac{e^{\alpha}}{\operatorname{ch}\alpha}e^{\alpha-\beta}(\cos\gamma+i\sin\gamma)+\frac{e^{-\alpha}}{\operatorname{ch}\alpha}e^{-\alpha+\beta}(\cos\gamma-i\sin\gamma)\right.$$
$$\left.+2(c-ib)\right]=\frac{2\zeta_{11}}{\operatorname{ch}\alpha}\left[\operatorname{ch}(2\alpha-\beta)\cos\gamma\right.$$
$$\left.+i\operatorname{sh}(2\alpha-\beta)\sin\gamma-\operatorname{ch}\beta\cos\gamma-i\operatorname{sh}\beta\sin\gamma\right]$$
$$=\frac{4\zeta_{11}\operatorname{sh}(\alpha-\beta)}{\operatorname{ch}\alpha}(\operatorname{sh}\alpha\cos\gamma+i\operatorname{ch}\alpha\sin\gamma).$$

От (123), (43)—(45), (198) следва

$$(208)\qquad P_0(\zeta_{11})=\zeta_{11}[(b+iac)\zeta_{11}+2ia+(-b+iac)\zeta_{11}^{-1}]$$
$$=\zeta_{11}[(b+iac)e^{\alpha-\beta}(\cos\gamma+i\sin\gamma)+2ia$$
$$+(-b+iac)e^{-\alpha+\beta}(\cos\gamma-i\sin\gamma)]$$
$$=2\zeta_{11}[(b\cos\gamma-ac\sin\gamma)\operatorname{sh}(\alpha-\beta)+2ia$$
$$+i(b\sin\gamma-ac\cos\gamma)\operatorname{ch}(\alpha-\beta)]$$
$$=\frac{2\zeta_{11}}{\operatorname{ch}^2\alpha}\Big\{-\operatorname{sh}^2(\alpha-\beta)\sin\gamma\cos\gamma+i[-\operatorname{sh}\alpha\operatorname{ch}\alpha$$
$$+\operatorname{ch}(\alpha-\beta)(\operatorname{sh}\alpha\operatorname{ch}\beta\cos^2\gamma+\operatorname{ch}\alpha\operatorname{sh}\beta\sin^2\gamma)]\Big\}.$$

Но

$$(209)\qquad \operatorname{sh}\alpha\operatorname{ch}\beta\cos^2\gamma+\operatorname{ch}\alpha\operatorname{sh}\beta\sin^2\gamma$$
$$=\frac{1}{2}[\operatorname{sh}(\alpha+\beta)+\operatorname{sh}(\alpha-\beta)\cos 2\gamma].$$

$$(210)\qquad \operatorname{sh}(\alpha+\beta)\operatorname{ch}(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}(\operatorname{sh}2\alpha+\operatorname{sh}2\beta).$$

От (208)—(210) следва

$$(211)\qquad P_0(\zeta_{11})=\frac{\zeta_{11}\operatorname{sh}(\alpha-\beta)}{\operatorname{ch}^2\alpha}\{-\operatorname{sh}(\alpha-\beta)\sin 2\gamma$$
$$+i[\operatorname{ch}(\alpha-\beta)\cos 2\gamma-\operatorname{ch}(\alpha+\beta)]\}.$$

От (206)—(208) следва

$$(212)\qquad \frac{P_0(\zeta_{11})}{P_1'(\zeta_{11})P_2(\zeta_{11})}=\frac{-\operatorname{sh}(\alpha-\beta)\sin 2\gamma+i[\operatorname{ch}(\alpha-\beta)\cos 2\gamma-\operatorname{ch}(\alpha+\beta)]}{\gamma(-\operatorname{sh}\beta\cos\gamma+i\operatorname{ch}\beta\sin\gamma)(\operatorname{sh}\alpha\cos\gamma+i\operatorname{ch}\alpha\sin\gamma)}.$$

Аналогично на (206)—(208) се получава

$$(213)\qquad P_1'(\zeta_{12})=\frac{2}{\operatorname{ch}\alpha}(\operatorname{sh}\beta\cos\gamma-i\operatorname{ch}\beta\sin\gamma),$$

$$(214)\qquad P_2(\zeta_{12})=\frac{4\zeta_{12}\operatorname{sh}(\alpha+\beta)}{\operatorname{ch}\alpha}(\operatorname{sh}\alpha\cos\gamma-i\operatorname{ch}\alpha\sin\gamma),$$

$$(215)\qquad P_0(\zeta_{12})=\frac{\zeta_{12}\operatorname{sh}(\alpha+\beta)}{\operatorname{ch}^2\alpha}\{\operatorname{sh}(\alpha+\beta)\sin 2\gamma$$
$$+i[\operatorname{ch}(\alpha+\beta)\cos 2\gamma-\operatorname{ch}(\alpha-\beta)]\}$$

— резултати, които следват и от (206)—(208) с формална замяна на β с $-\beta$ и на γ с $-\gamma$, тъй като такава замяна води от (198) до (199), а на величините (44), (45) тя не се отразява.

От (213)—(215) или от (212) с посочената замяна следва

$$\frac{P_0(\zeta_{12})}{P_1'(\zeta_{12})\,P_2(\zeta_{12})}=\frac{\operatorname{sh}(\alpha+\beta)\sin 2\gamma+i[\operatorname{ch}(\alpha+\beta)\cos 2\gamma-\operatorname{ch}(\alpha-\beta)]}{\gamma(\operatorname{sh}\beta\cos\gamma-i\operatorname{ch}\beta\sin\gamma)(\operatorname{sh}\alpha\cos\gamma-i\operatorname{ch}\alpha\sin\gamma)}. \tag{216}$$

От (202), (212), (216) и

$$\operatorname{Log}\zeta_{11}=\alpha-\beta+i\gamma \tag{217}$$

съгласно (198) и

$$\operatorname{Log}\zeta_{12}=\alpha+\beta+i(2\pi-\gamma) \tag{218}$$

съгласно (199) следва

$$\Sigma\operatorname{Res}F(z)=-\frac{[\alpha-(\beta-i\gamma)]\,XZ+[\alpha+(\beta-i\gamma)+2\pi i]\,Y\bar{Z}}{4(\operatorname{sh}^2\alpha+\sin^2\gamma)(\operatorname{ch}\beta\sin\gamma+i\operatorname{sh}\beta\cos\gamma)} \tag{219}$$

при

$$X=\operatorname{sh}(\alpha-\beta)\sin 2\gamma-i[\operatorname{ch}(\alpha-\beta)\cos 2\gamma-\operatorname{ch}(\alpha+\beta)], \tag{220}$$

$$Y=\operatorname{sh}(\alpha+\beta)\sin 2\gamma+i[\operatorname{ch}(\alpha+\beta)\cos 2\gamma-\operatorname{ch}(\alpha-\beta)], \tag{221}$$

$$Z=\operatorname{sh}\alpha\cos\gamma-i\operatorname{ch}\alpha\sin\gamma. \tag{222}$$

От (220), (222) следва

$$XZ=2(\operatorname{sh}^2\alpha+\sin^2\gamma)(\operatorname{ch}\beta\sin\gamma+i\operatorname{sh}\beta\cos\gamma). \tag{223}$$

Тъй като $Y\bar{Z}$ се получава от XZ съгласно (220)—(222) чрез формална замяна на β с $-\beta$ и на i с $-i$, от (223) следва

$$XZ=Y\bar{Z}. \tag{224}$$

От (219), (223), (224) следва

$$\Sigma\operatorname{Res}F(z)=-(\alpha+\pi i) \tag{225}$$

в случая (194).

12. Сега сме в състояние да пресметнем a_0 в случая (194). Нека е в сила (102). От (135), (175), (225) следва

$$I_0=0. \tag{226}$$

От (226), (101) следва

$$a_0=-\pi\operatorname{sgn}b \tag{227}$$

при (64) и

$$a_0=\pi\operatorname{sgn}a \tag{228}$$

при (52).

Нека е в сила (100). От (135), (175), (225) следва

$$I_0 = 2\pi\left\{\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{1+c} - \frac{\pi}{2}[1+\operatorname{sgn}(1+c)]\right\}. \tag{229}$$

От (229), (99) следва

$$a_0 = \pi[1+\operatorname{sgn}(1+c)] = \begin{cases} 2\pi & (1+c>0), \\ 0 & (1+c<0). \end{cases} \tag{230}$$

От (227), (228), (230) следва окончателно

$$a_0 = \begin{cases} 2\pi & (1+c>0), \\ 0 & (1+c<0), \\ \left.\begin{array}{ll} -\pi\operatorname{sgn} b & (b\neq 0), \\ \pi\operatorname{sgn} a & (b=0) \end{array}\right\} & (1+c=0) \end{cases} \tag{231}$$

в случая (194).

13. В тази точка ще пресметнем стойностите на a_0 за случаите (195)—(197). При това се следва пътят, изложен в последните предишни точки, поради което се дават само крайните резултати.

От (124), (200), (143), (44), (45) следва

$$P_1(\zeta_{21}) = \frac{4\zeta_{21}\operatorname{sh}(\alpha+\beta)}{\operatorname{ch}\alpha}(\operatorname{sh}\alpha\cos\gamma + i\operatorname{ch}\alpha\sin\gamma). \tag{232}$$

От (125), (200), (143), (44), (45) следва

$$P_2'(\zeta_{21}) = \frac{-2}{\operatorname{ch}\alpha}(\operatorname{sh}\beta\cos\gamma + i\operatorname{ch}\beta\sin\gamma). \tag{233}$$

От (123), (200), (43)—(45) следва

$$P_0(\zeta_{21}) = \frac{\zeta_{21}\operatorname{sh}(\alpha+\beta)}{\operatorname{ch}^2\alpha}\{-\operatorname{sh}(\alpha+\beta)\sin 2\gamma + i[\operatorname{ch}(\alpha+\beta)\cos 2\gamma - \operatorname{ch}(\alpha-\beta)]\}. \tag{234}$$

От (232)—(234) следва

$$\frac{P_0(\zeta_{21})}{P_1(\zeta_{21})P_2(\zeta_{21})} = \frac{\operatorname{sh}(\alpha+\beta)\sin 2\gamma + i[\operatorname{ch}(\alpha-\beta) - \operatorname{ch}(\alpha+\beta)\cos 2\gamma]}{8(\operatorname{sh}\alpha\cos\gamma + i\operatorname{ch}\alpha\sin\gamma)(\operatorname{sh}\beta\cos\gamma + i\operatorname{ch}\beta\sin\gamma)}. \tag{235}$$

От (203), (212), (235), (217) и

$$\operatorname{Log}\zeta_{21} = -\alpha - \beta + i(2\pi - \gamma) \tag{236}$$

съгласно (200) следва

$$\Sigma\operatorname{Res}F(z) = \frac{(\alpha-\beta+i\gamma)XZ + [-\alpha-\beta+i(2\pi-\gamma)]Y\bar{Z}}{4(\operatorname{ch}\alpha\sin\gamma - i\operatorname{sh}\alpha\cos\gamma)(\operatorname{sh}^2\beta + \sin^2\gamma)} \tag{237}$$

при

(238) $$X=\operatorname{sh}(\alpha-\beta)\sin 2\gamma+i[\operatorname{ch}(\alpha+\beta)-\operatorname{ch}(\alpha-\beta)\cos 2\gamma],$$

(239) $$Y=\operatorname{sh}(\alpha+\beta)\sin 2\gamma+i[\operatorname{ch}(\alpha-\beta)-\operatorname{ch}(\alpha+\beta)\cos 2\gamma],$$

(240) $$Z=\operatorname{sh}\beta\cos\gamma+i\operatorname{ch}\beta\sin\gamma.$$

От (238), (240) следва

(241) $$XZ=-2(\operatorname{sh}^2\beta+\sin^2\gamma)(\operatorname{ch}\alpha\sin\gamma-i\operatorname{sh}\alpha\cos\gamma).$$

Тъй като YZ се получава от XZ съгласно (238)—(240) чрез формална замяна на β с $-\beta$ и умножение с -1, от (241) следва

(242) $$XZ=-Y\bar{Z}.$$

От (237), (241), (242) следва

(243) $$\Sigma\operatorname{Res}F(z)=-\alpha+i(\pi-\gamma)$$

в случая (195).

Нека е в сила (102). От (135), (175), (243), (193) следва

(244) $$I_0=2\pi(2\pi-\gamma).$$

От (244), (101), (103) следва

(245) $$a_0=2\gamma-\pi(4+\operatorname{sgn}b)$$

при (64), (102) и

(246) $$a_0=2\gamma+\pi(\operatorname{sgn}b-4)$$

при (52), (102).

Нека е в сила (100). От (135), (175), (243), (192) следва

(247) $$I_0=2\pi\operatorname{arctg}\frac{b}{1+c}+\pi^2[1-\operatorname{sgn}(1+c)]+2\pi(\pi-\gamma).$$

От (247), (99) следва

(248) $$a_0=2\gamma-\pi[3-\operatorname{sgn}(1+c)]$$
$$=\begin{cases}2(\gamma-\pi) & (1+c>0),\\ 2(\gamma-2\pi) & (1+c<0).\end{cases}$$

От (245), (246), (248) следва окончателно

(249) $$a_0=\begin{cases}2(\gamma-\pi) & (1+c>0),\\ 2(\gamma-2\pi) & (1+c<0),\\ \left.\begin{matrix}2\gamma-\pi(4+\operatorname{sgn}b) & (b\neq 0)\\ 2\gamma+\pi(\operatorname{sgn}a-4) & (b=0)\end{matrix}\right\} & (1+c=0)\end{cases}$$

в случая (195).

От (200), (201) се вижда, че ζ_{22} се получава от ζ_{21} чрез формална замяна на β с $-\beta$ и на γ с $-\gamma$. От (44), (45) личи, че тази замяна не се отразява върху стойностите на b и c. Поради това $P_0(\zeta_{22})$, $P_1(\zeta_{22})$ и $P_2(\zeta_{22})$ се получават съответно от $P_0(\zeta_{21})$, $P_1(\zeta_{21})$ и $P_2(\zeta_{21})$ чрез посочената замяна. Тогава от (235) следва

$$\frac{P_0(\zeta_{22})}{P_1(\zeta_{22})\,P_2'(\zeta_{22})} = \frac{\operatorname{sh}(\alpha-\beta)\sin 2\gamma - i\,[\operatorname{ch}(\alpha+\beta)-\operatorname{ch}(\alpha-\beta)\cos 2\gamma]}{8\,(\operatorname{sh}\alpha\cos\gamma - i\operatorname{ch}\alpha\sin\gamma)(\operatorname{sh}\beta\cos\gamma + i\operatorname{ch}\beta\sin\gamma)}. \tag{250}$$

От (204), (216), (250), (218) и

$$\operatorname{Log}\zeta_{22} = -\alpha+\beta+i\gamma \tag{251}$$

съгласно (201) следва

$$\Sigma\operatorname{Res}F(z) = -\frac{[\alpha+\beta+i(2\pi-\gamma)]\,XZ+(-\alpha+\beta+i\gamma)\,YZ}{4\,(\operatorname{ch}\alpha\sin\gamma+i\operatorname{sh}\alpha\cos\gamma)(\operatorname{sh}^2\beta+\sin^2\gamma)} \tag{252}$$

при

$$X = \operatorname{sh}(\alpha+\beta)\sin 2\gamma + i\,[\operatorname{ch}(\alpha+\beta)\cos 2\gamma - \operatorname{ch}(\alpha-\beta)], \tag{253}$$

$$Y = \operatorname{sh}(\alpha-\beta)\sin 2\gamma - i\,[\operatorname{ch}(\alpha+\beta) - \operatorname{ch}(\alpha-\beta)\cos 2\gamma], \tag{254}$$

$$Z = \operatorname{sh}\beta\cos\gamma + i\operatorname{ch}\beta\sin\gamma. \tag{255}$$

От (253), (255) следва

$$XZ = 2\,(\operatorname{ch}\alpha\sin\gamma + i\operatorname{sh}\alpha\cos\gamma)(\operatorname{sh}^2\beta+\sin^2\gamma). \tag{256}$$

Тъй като YZ се получава от XZ съгласно (254), (255) чрез формална замяна на β с $-\beta$ и умножаване с -1, от (256) следва (242).

От (252), (256), (242) следва

$$\Sigma\operatorname{Res}F(z) = -\alpha+i(\gamma-\pi) \tag{257}$$

в случая (196).

Нека е в сила (102). От (135), (175), (257), (193) следва

$$I_0 = 2\pi\gamma. \tag{258}$$

От (258), (101), (103) следва

$$a_0 = -2\gamma - \pi\operatorname{sgn} b \tag{259}$$

при (64), (102) и

$$a_0 = -2\gamma + \pi\operatorname{sgn} a \tag{260}$$

при (52), (102).

Нека е в сила (100). От (135), (175), (257), (192) следва

$$I_0 = 2\pi\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{1+c} + \pi^2[1-\operatorname{sgn}(1+c)] - 2\pi(\pi-\gamma). \tag{261}$$

От (261), (99) следва

(262) $$a_0=-2\gamma+\pi[1+\operatorname{sgn}(1+c)]$$
$$=\begin{cases}2(\pi-\gamma) & (1+c>0),\\ -2\gamma & (1+c<0).\end{cases}$$

От (259), (260), (262) следва окончателно

(263) $$a_0=\begin{cases}2(\pi-\gamma) & (1+c>0),\\ -2\gamma & (1+c<0),\\ \left.\begin{matrix}-2\gamma-\pi\operatorname{sgn} b & (b\neq 0)\\ -2\gamma+\pi\operatorname{sgn} a & (b=0)\end{matrix}\right\} & (1+c=0)\end{cases}$$

в случая (196).

От (205), (235), (250), (236), (251) следва

(264) $$\Sigma\operatorname{Res}F(z)=\frac{[-\alpha-\beta+i(2\pi-\gamma)]XZ+(-\alpha+\beta+i\gamma)YZ}{4(\operatorname{ch}\beta\sin\gamma-i\operatorname{sh}\beta\cos\gamma)(\operatorname{sh}^2\alpha+\sin^2\gamma)}$$

при

(265) $$X=\operatorname{sh}(\alpha+\beta)\sin 2\gamma+i[\operatorname{ch}(\alpha-\beta)-\operatorname{ch}(\alpha+\beta)\cos 2\gamma].$$

(266) $$Y=\operatorname{sh}(\alpha-\beta)\sin 2\gamma-i[\operatorname{ch}(\alpha+\beta)-\operatorname{ch}(\alpha-\beta)\cos 2\gamma],$$

(267) $$Z=\operatorname{sh}\alpha\cos\gamma-i\operatorname{ch}\alpha\sin\gamma.$$

От (265), (267) следва

(268) $$XZ=2(\operatorname{ch}\beta\sin\gamma-i\operatorname{sh}\beta\cos\gamma)(\operatorname{sh}^2\alpha+\sin^2\gamma).$$

Тъй като YZ се получава от XZ съгласно (265)—(267) чрез формална замяна на β с $-\beta$ и на i с $-i$, от (268) следва (224).

От (264), (268), (224) следва

(269) $$\Sigma\operatorname{Res}F(z)=-\alpha+\pi i.$$

Нека е в сила (102). От (135), (175), (269), (193) следва

(270) $$I_0=4\pi^2.$$

От (270), (101), (103) следва

(271) $$a_0=-\pi(4+\operatorname{sgn} b)$$

при (64), (102) и

(272) $$a_0=\pi(\operatorname{sgn} a-4)$$

при (52), (102).

Нека е в сила (100). От (135), (175), (269), (192) следва

(273) $$I_0=2\pi\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{1+c}+2\pi^2[2-\operatorname{sgn}(1+c)].$$

От (273), (99) следва

$$a_0=2\pi[\operatorname{sgn}(1+c)-2]=\begin{cases}-2\pi & (1+c>0),\\ -6\pi & (1+c<0).\end{cases} \tag{274}$$

От (271), (272), (274) следва окончателно

$$a_0=\begin{cases}-2\pi & (1+c>0).\\ -6\pi & (1+c<0),\\ -\pi(4+\operatorname{sgn} b) & (b\neq 0)\\ \pi(\operatorname{sgn} a-4) & (b=0)\end{cases}\quad (1+c=0) \tag{275}$$

в случая (197).

ЛИТЕРАТУРА

1. Долапчиев Бл., Чобанов Ив.: Флуиден транспорт, индуциран от карманови вихрови улици. I. Изв. Мат. инст. БАН, т. IV, кн. II (1960), 161—294.
2. Долапчиев Бл., Чобанов Ив.: Флуиден транспорт, индуциран от карманови вихрови улици. II. Год. на Соф. унив., Физ.-мат. фак., **53** (1958/59), кн. 1 (мат.) 37—89.
3. Dolaptschiew Bl., Tschobanow Iw.: Von Kármánstraßen induzierter Flüssigkeitstransport. Zeitschr. angew. Math. Mech., **41** (1961), 313—319.
4. Dolaptschiew B., Tschobanow I.: Flüssigkeitstransporte, induziert von Kármánstraßen. Appl. Mech. Proc. of the Tenth Internat. Congr. of Appl. Mech. Stresa (Italy), 1960, Amsterdam — New York, 1962.
5. Чобанов Ив.: Двустранно безкрайни Kármán'ови улици с обобщени сингулярности от логаритмичен тип. Год. на Соф. унив., Мат. фак., **61** (1966/1967), 107—184.

Постъпила на 26. XI. 1971 г.

FLÜSSIGKEITSTRANSPORT, INDUZIERT VON ZWEISEITIG UNENDLICHEN KÁRMÁNSTRAßEN MIT VERALLGEMEINERTEN SINGULARITÄTEN VON LOGARITHMISCHEM TYP. I

Iw. Hristowa u. Iw. Tschobanow

(ZUSAMMENFASSUNG)

In der vorliegenden Arbeit wird der Flüssigkeitstransport untersucht, den eine zweiseitig unendliche Kármánsche Straße mit verallgemeinerten Singularitäten von logarythmischem Typ [5] durch eine beliebige Strecke in der Ebene des Flüssigkeitsstromes induziert. Derselben Frage sind die

vorigen Arbeiten [1]—[4] gewidmet, im Falle aber, wenn es sich um eine Wirbelstraße handelt.

Wenn (25), (26) die Kármánsche Straße definieren, die sich nach (27) bewegt, ist (28) das komplexe Potential der Flüssigkeitsströmung. Der Flüssigkeitstransport durch die Strecke $A_\nu(x_\nu, y_\nu)$ ($\nu=1, 2$) während des Zeitintervalles t_2-t_1 wird dann durch (42) gegeben. Dieser Ausdruck verlangt die Untersuchung einer Funktion, die man aus (90) durch Integration bekommt, bei (43)—(45) und (91). Diese Funktion kann man durch Integration der Fourierischen Reihe erhalten, die die Entwicklung von (90) gibt, nämlich der Reihe (93), wo (94)—(96) gesetzt ist. Zur Bestimmung von (94) wird nach (97) das Integral (98) betrachtet. Zu diesem Zweck wird das Integral (121) berechnet, wo $F(z)$ mit (122) gegeben ist und C das Kontur bedeutet, welches auf Fig. 1 veranschaulicht ist. Es sollen die vier verschiedenen Fälle (194)—(197) untersucht werden. In diesen Fällen gelten bzw. die Gleichungen (231), (249), (263) und (275). In der Fortsetzung dieser Arbeit werden die anderen Koeffizienten (95), (96) der Reihe (93) berechnet und hydrodynamische Schlüsse gemacht.