НЯКОЛКО БЕЛЕЖКИ ВЪРХУ GIBBS-APPELL'ОВАТА ФОРМА НА УРАВНЕНИЯТА НА ДИНАМИКАТА НА ХОЛОНОМНИТЕ И НЕХОЛОНОМНИТЕ МАТЕРИАЛНИ СИСТЕМИ

Бл. Долапчиев

The Gibbs-Appell equations are clearly, explained, and illustrated by a number of concrete applications. The author believes that in general the importance of this subject has been underestimated, and that its difficulty has been overestimated.

L. A. PARS

В своето капитално съчинение „A treatise on Analytical Dynamics" авторът на горната констатация, която сме избрали за мото на настоящото разглеждане, завършва главата върху Гибс-Апеловите уравнения със следния параграф:

„The theorem proved above that $\mathfrak{C}-\sum_{s=1}^{k} Q_s \ddot{q}_s$ is a minimum for the actual motion, contains more than sufficient information to establish the equations of motion. The first-order conditions for a stationary value will suffice, and these give the equations

$$\text{(I)} \qquad \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \ddot{q}_r} = Q_r, \qquad r = 1, 2, \ldots, k.$$

These are the Gibbs-Appell equations. They are the equations that we should have obtained from the fifth form of the fundamental equation

$$\text{(II)} \qquad \sum_{r=1}^{N} m_r \ddot{x}_r \Delta \ddot{x}_r - \sum_{s=1}^{k} Q_s \Delta \ddot{q}_s = 0,$$

if we had worked with infinitesimal, instead of finite, variations. They were first discovered by Willard Gibbs in 1879, and studied in detail by

Appell twenty years later. It is clear that, so far as the equations of motion are concerned, terms in $\mathfrak{C}$ that do not contain a $\ddot{q}_r$ can be omitted altogether. To complete the scheme of differential equations we must add the $n-k\,(=l+p)$ geometrical equations

$$\text{(III)} \qquad \dot{q}_r = \sum_{s=1}^{k} \beta_{rs}\, \dot{q}_s + \beta_r, \qquad r = k+1,\ k+2, \ldots, n,$$

derived from

$$dq = \sum_{s=1}^{k} \beta_{rs}\, dq_s + \beta_r\, dt.$$

The Gibbs-Appell equations provide what is probably the [symplest and most comprehensive form of the equations of motion so far discovered. They are of superlatively simple form, they apply with equal facility to holonomic and to nonholonomic systems alike, and quasi-coordinates may be used freely] (к. м.).

The technique required in using the equations is as follows. We begin by noticing the number k of freedoms of the system, and express the so-called „kinetic energy of the accelerations", $\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{N} m_r \ddot{x}_r^2$, in terms of $\ddot{q}$'s. We thus obtain the fonction $\mathfrak{C}$. In general q's and $\dot{q}$-'s other than the k chosen ones will appear in $\mathfrak{C}$, but it is essential that only $\ddot{q}$'s should appear. The k chosen q's may be Lagrangian coordinates or quasi-coordinates, whichever is more convenient. Then we consider the work done by the given forces in a virtual displacement, and express it in the form $\sum_{s=1}^{k} Q_s\, \delta q_s$.

The equations of motion are given by (I), and the $(n-k)$ geometrical equation (III) complete the scheme of differential equations which determines the n variables $q_1, q_2, \ldots, q_n$ as functions of t."

Приведеният цитат, представящ целият заключителен параграф върху Гибс—Апеловите уравнения, съдържа почти всичко, което се отнася до резултатите на горните двама видни автори — Гибс и Апел,— но не съдържа нищо, което се отнася до резултатите на други автори, преди, а особено след тях. А знае се, че уравненията на Чаплигин, несъдържащи неопределените множители на Лагранж, които фигурират в уравненията на Раус, а съдържат само кинетичната енергия, както уравненията на Лагранж от втори род, са едни от първите теоретични и едни от годните практични уравнения, нашироко прилагани особено в съветската литература; знае се също така, че П. В. Воронец е един

от основоположниците на механиката на нехолономните системи, който пръв в световната литература установи динамическите уравнения на движение на нехолономните системи в холономни и нехолономни координати; при това е известно, че уравненията на Чаплигин могат да бъдат изведени от тия на Воронец като частен случай, което важи и за намерените от Георг Хамел уравнения в квази-координати — наречени от него „уравнения на Ойлер—Лагранж", които впрочем са еквивалентни на уравненията на Воронец; че на последния се дължи също така обобщението на принципа на Хамилтон—Остроградски с произволен брой степени на свобода, изразявайки го в холономни и нехолономни координати. Да не говорим по-нататък в по-ново време за изследванията в областта на нехолономната механика на Н. Г. Четаев, на В. В. Добронравов, на Ив. Ценов и др. За сметка на горното обаче в цитирания заключителен параграф авторът Л. А. Парс не пропуща да отбележи — и с пълно право — за приоритета на бележития У. Гибс, което и оправдава наименованието на апеловите уравнения като „уравнения на Гибс—Апел" с един интервал от време на тяхното установяване от тези автори, възлизащ на повече от двадесет години.

Но защо се натъкваме за лишен път в един европейски курс по механика на факта, че главата, посветена на уравненията на нехолономните материални системи, завършва с Апел? Струва ни се, че отговорът на този въпрос се съдържа в курсивирания от нас текст на приведения цитат. Според Парс уравненията на Гибс—Апел са „вероятно най-простата и най-обхващаща форма на уравненията на движение измежду всички други, намерени досега"! И за да подкрепи това свое становище, с което Парс се ангажирва твърде много, той посвещава цялата следваща глава на „приложения на Гибс—Апеловите уравнения".

Не тъй постъпват авторите Ю. И. Неймарк и Н. А. Фуфаев на монографията „Динамика неголономных систем", излязла само две години по-късно от „Трете по аналитична динамика" на Парс. В тази монография, посветена на изложението на въпросите на механиката на системите с линейни нехолономни връзки, в която се дава дълбок анализ на широк кръг въпроси, особено на принципиално новия въпрос за коректността на математическия модел в механиката на нехолономните системи, довеждащ до „излишно песимистични изводи" (Новоселов, В. С.), а приложенията, особено върху малките колебания и устойчивостта на нехолономните системи, върху пътевата устойчивост и върху процесите в електромагнитните системи, са извършени, като се използват почти всички видове познати до днес уравнения на нехолономната динамика, като Раус, Чаплигин, Апел, Воронец, Гапонов и др., в зависимост от характера на проблема, без да дават предимство относно „простота и обхватност" на кои да са от тези уравнения.

Като се присъединяваме към ангажираността на Парс някои от формите на уравненията на аналитичната динамика на холономните и нехолономните механични системи да се считат за най-прости и най-обхващащи както по отношение тяхното построение, така и досежно

приложението им, в настоящото разглеждане обаче ние си поставяме за цел да направим няколко бележки както относно получаването, така и относно приложението именно на Гибс—Апеловите уравнения, съпоставяйки ги с друга форма уравнения, неизползуваща твърде комплицираната „енергия на ускорението", нямаща никакъв механичен смисъл. Тъй както за холономните механични системи и до днес се използуват уравненията на Лагранж от втори род, а не тези на Гибс—Апел, към които се прибягва, когато системите са нехолономни, така и при наличие на друга форма, „тъй проста и обхващаща" като Гибс—Апеловата форма, но неизползуваща енергията на ускорението, а отново кинетичната енергия, то не би трябвало да се твърди тъй категорично, както прави Парс, че Гибс—Апеловите уравнения са предпочитаните уравнения в динамиката на нехолономните системи; както „редуцираните уравнения на Нилсен", прилагани многократно от нас с явно предимство, така и тези на Ценов са форми, също претендиращи за простота.

Първата бележка, която предлежи да направим, ще се отнася до похвата, който Апел прилага за *извеждането* на своите уравнения, който похват *съществено* използува условието, щото неинтегрируемите диференциални връзки (нехолономните връзки) да бъдат *линейни*.

Наистина, ако разглежданата механична система, състояща се от N-те материални точки $P_\nu(m_\nu)$, с радиус-вектори $\bar{r}_\nu$ $(\nu=1, 2, 3, \ldots, N)$, е сведена към лагранжовите обобщени координати $q_\varkappa$ $(\varkappa=1, 2, 3, \ldots, k)$, т. е. имаме

$$OP_\nu \equiv \bar{r}_\nu = \bar{r}_\nu \quad (t, \ldots, q_\varkappa, \ldots,) \qquad (\nu=1, 2, \ldots, N) \quad (\varkappa=1, 2, \ldots, k) \tag{1}$$

лесно намираме N-те диференциала и N-те вариации

$$d\bar{r}_\nu = \frac{\partial \bar{r}_\nu}{\partial t} dt + \sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{\partial \bar{r}_\nu}{\partial q_\varkappa} dq_\varkappa \qquad (\nu=1, 2, \ldots, N), \tag{2}$$

$$\delta \bar{r}_\nu = \sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{\partial \bar{r}_\nu}{\partial q_\nu} \delta q_\varkappa \qquad (\nu=1, 2, \ldots, N). \tag{3}$$

Като са дадени r-те нехолономни връзки

$$\sum_{\varkappa=1}^{k} A_{\rho\varkappa}\, dq_\varkappa + A_\rho\, dt \qquad (\rho=1, 2, \ldots, r), \tag{4}$$

лесно написваме и r-те условия върху вариациите на обобщените координати

$$\sum_{\varkappa=1}^{k} A_{\rho\varkappa}\,\delta q_{\varkappa}=0 \qquad (\rho=1,2,\ldots,r). \tag{5}$$

И тъй узнава се от (2), (3) и (4), (5), че k-те диференциала $d\bar{r}_\nu$ и k-те вариации $\delta\bar{r}_\nu$ са подчинени съответно на r връзки, така че броят на степените на свобода на разглежданата материална система е $k-r=l$. Като елиминираме тези r диференциала и r вариации, вследствие *линейността* на (4) и (5), която Апел изисква (той работи с координати), ще получим съответно

$$d\bar{r}_\nu=\sum_{\lambda=1}^{l} a_{\nu\lambda}\,dq_\lambda+a_\nu\,dt \qquad (\nu=1,2,\ldots,N). \tag{6}$$

$$\delta\bar{r}_\nu=\sum_{\lambda=1}^{l} a_{\nu\lambda}\,\delta q_\lambda \qquad (\nu=1,2,\ldots,N) \tag{7}$$

(останалите обобщени координати тук сме означили с q_λ, гдето $\lambda=1,2,3,\ldots,l$; що се отнася до векторите $a_{\nu\lambda}$ и a_ν, гдето $\nu=1,2,3,\ldots N$ те са функции на времето t и на всички обобщени координати $q_\varkappa$, гдето $\varkappa=1,2,3,\ldots,k$, тъй както са функции на тях и коефициентите $A_{\rho\varkappa}$ и A_ρ, гдето $\rho=1,2,3,\ldots,r$, а така също $\frac{\partial\bar{r}_\nu}{\partial q_\varkappa}$ и $\frac{\partial\bar{r}_\nu}{\partial t}$, гдето $\varkappa=1,2,3,\ldots,k$, фигуриращи в (2) и (3), чрез които е реализирана въпросната елиминация).

По такъв начин намираме ония независими вариации $\delta\bar{r}_\nu$, които са нужни на Апел при използуването на принципа на Даламбер—Лагранж а именно

$$\sum_{\nu=1}^{N}(\bar{F}_\nu-m_\nu\ddot{\bar{r}}_\nu)\,.\,\delta\bar{r}_\nu=0. \tag{8}$$

Внесем ли (7) в (8), получаваме

$$\sum_{\nu=1}^{N}(\bar{F}_\nu-m_\nu\ddot{\bar{r}}_\nu)\,.\sum_{\lambda=1}^{l}\bar{a}_{\nu\lambda}\,\delta q_\lambda=0, \tag{9}$$

или

$$\sum_{\lambda=1}^{l}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\ddot{\bar{r}}_\nu\,.\,\bar{a}_{\nu\lambda}\,\delta q_\lambda=\sum_{\lambda=1}^{l}\sum_{\nu=1}^{N}\bar{F}_\nu\,.\,a_{\nu\lambda}\,\delta q_\lambda. \tag{10}$$

И сега полагаме

$$Q_\lambda = \sum_{\nu=1}^{N} F_\nu \,.\, a_{\nu\lambda} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, l), \tag{11}$$

означаващи обобщените сили, отнесени към обобщените координати q_λ.

Да разделим по-нататък (6) с dt и да диференцираме още веднаж; намираме последователно

$$\dot{r}_\nu = \sum_{\lambda=1}^{l} a_{\nu\lambda}\, \dot{q}_\lambda + a_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N) \tag{12}$$

и

$$\ddot{r}_\nu = \sum_{\lambda=1}^{l} a_{\nu\lambda}\, \ddot{q}_\lambda + \cdots \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N), \tag{13}$$

като в (13) сме се спрели само на производни на q_λ от втори ред.

От (13) определяме

$$\frac{\partial \ddot{r}_\nu}{\partial \ddot{q}_\lambda} = a_{\nu\lambda} \qquad \begin{matrix}(\nu = 1, 2, \ldots N) \\ (\lambda = 1, 2, \ldots, l),\end{matrix} \tag{14}$$

които внасяме в лявата страна на (10). Едно очевидно преобразуване ни води до израза

$$\sum_{\lambda=1}^{l}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \ddot{r}_\nu \cdot \frac{\partial \ddot{r}_\nu}{\partial \ddot{q}_\lambda} = \sum_{\lambda=1}^{l}\sum_{\nu=1}^{N} \frac{m_\nu \ddot{r}_\nu^{\,2}}{2}. \tag{15}$$

Като означим с

$$S = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{m_\nu \ddot{r}_\nu^{\,2}}{2} \tag{16}$$

така наречената „енергия на ускорението“, която Парс означава (в чест на Гибс) с $\mathfrak{S}$, окончателно намираме

$$\sum_{\lambda=1}^{l} \left(\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_\lambda} - Q_\lambda \right) \delta q_\lambda = 0. \tag{17}$$

Пред вид независимостта на вариациите δq_λ достигаме до познатите уравнения на Апел за движението на нехолономните системи:

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_\lambda} = Q_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, l). \tag{18}$$

Резюмирайки след тази процедура, в едно от по-новите издания на Traité de Mécanique rationelle, Paul Appell в том II пише: „On voit que pour les (уравненията (18), б. м.) écrire, il suffit de calculer la seule fonction S et de l'exprimer de façon qu'elle ne contienne plus d'autres dérivées deuxièmes que celles des paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_k$ dont les variations sont regardées comme arbitraires. Il peut arriver que cette fonction S, calculée en fonction de $q_1, q_2, \ldots, q_{k+p}$ contienne leurs dérivées premières $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_{k+p}$ et leurs dérivées deuxièmes $\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \ddot{q}_3, \ldots, \ddot{q}_{k+p}$; les relations

$$
\text{(IV)}\quad
\begin{aligned}
dq_{k+1} &= \alpha_1\, dq_1 + \alpha_2\, dq_2 + \alpha_3\, dq_3 + \cdots + \alpha_k\, dq_k + \alpha\, dt,\\
dq_{k+2} &= \beta_1\, dq_1 + \beta_2\, dq_2 + \beta_3\, dq_3 + \cdots + \beta_k\, dq_k + \beta\, dt,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
dq_{k+p} &= \lambda_1\, dq_1 + \lambda_2\, dq_2 + \lambda_3\, dq_3 + \cdots + \lambda_k\, dq_k + \lambda\, dt,
\end{aligned}
$$

divisées par dt donnent $q'_{k+1}, q'_{k+2}, \ldots, q'_{k+p}$ en fonction linéaire de $q'_1, q'_2, \ldots, q'_k$ et, en les derivant par rapport au temps, on obtient de même $q''_{k+1}, q''_{k+2}, \ldots, q''_{k+p}$ en fonction linéaire de $q''_1, q''_2, \ldots, q''_k$; on peut donc toujours faire en sorte que la fonction S ne contienne plus d'autres dérivées deuxièmes que $q''_1, q''_2, \ldots q''_k$; elle contient d'ailleurs ces quantités au deuxiémes degré. Une fois la fonction S ainsi préparée, on peut écrire les équations (18). Ces équations jointes aux conditions (IV) forment un système de $k+p$ équations définissant $q_1, q_2, \ldots, q_{k+p}$ en fonction du temps.

Le mouvement est donc caractérisé par la connaissance de la fonction S qu'on appelle l'énergie d'accélération du système et par les quantités $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ calculées comme dans les équations de Lagrange.

La fonction S est du deuxième degré en $\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \ldots \ddot{q}_k$, Il suffit évidemment de calculer dans S les termes contenant les dérivées secondes des paramètres, car les autres ne donnent rien quand on prend les dérivées partielles par rapport à $\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \ldots, \ddot{q}_k$.

И тъй, изложената по-горе процедура за намиране уравненията на движение на нехолономните системи, следвана от Апел, се основава съществено на приемането, че неинтегрируемите диференциални връзки са линейни. Без тази линейност не бихме могли да извършим елиминацията на r-те диференциала и r-те вариации, за да дойдем до енергията на ускорението и нейното деривиране относно обобщените ускорения, които трябва да са независими, каквито са смисълът и съдържанието на лявата страна на уравненията (18). Но препоръчаният от Апел ход, който трябва да се следва, сочи, че за да получим този смисъл и съдържание, т. е. да напишем уравнения, които да се отнасят до нехолономни системи, е достатъчно да напишем енергията на ускорението, в която да се извършат такива процедури, които да я освободят от зависимите обобщени ускорения. С други думи, подсказва се на възможността енергията на ускорението да бъде получена и по друг на-

чин, а не чрез казаната елиминация, изискваща линейните връзки. А такава възможност, както се знае, съществува. За целта е напълно достатъчно например да се използува не принципът на Даламбер—Лагранж, а тоя на Гаус.

Наистина сега имаме от този принцип

$$\sum_{\nu=1}^{N}(F_\nu - m_\nu \ddot{r}_\nu) \cdot \delta \ddot{r}_\nu = 0, \tag{19}$$

гдето $\delta t = 0$, $\delta r_\nu \delta = \dot{r}_\nu = 0$, $\delta \ddot{r}_\nu \neq 0$. Нужни ни са вариациите на обобщените ускорения само, т. е. $\delta \ddot{r}_\nu$. Като разделим (2) на dt и извършим повторно деривиране, получаваме

$$\ddot{r} = \sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{\partial r_\nu}{\partial q_\varkappa} \ddot{q}_\varkappa + \cdots, \tag{20}$$

откъдето написваме и

$$\delta \ddot{r}_\nu = \sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{\partial r_\nu}{\partial q_\varkappa} \delta \ddot{q}_\varkappa \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N). \tag{21}$$

Внесем ли (21) в (19), непосредствено преобразуваме лявата страна на (19), държейки сметка от (20), че

$$\frac{\partial \ddot{r}_\nu}{\partial \ddot{q}_\varkappa} = \frac{\partial r_\nu}{\partial q_\varkappa}, \tag{22}$$

вследствие на което отново намираме формата

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_\varkappa} = Q_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k), \tag{23}$$

важаща само за холономни системи.

За да важи и за нехолономни системи, е необходимо спазването на посочената процедура на Апел. Тя не изисква обаче линейност относно обобщените скорости на нехолономните връзки, каквато предполагат и Апел, а даже и Парс, въпреки че последният сочи на връзката на уравненията (23) на Гибс—Апел с принципа на Гаус.

Така идваме до втората бележка, която се налага да направим при прилагането на по-нататъшната процедура, а именно че е достатъчно за написването на уравненията (18), важащи за нехолономните системи, не извеждането им по посочения от Апел начин, който използува линейни относно обобщените скорости връзки, а линейност на нехолономните връзки относно обобщените ускорения или нелинейност относно обобщените скорости, тъй като чрез еднократно деривиране те стават

линейни относно обобщените ускорения. Това не значи, разбира се, че ако в даден проблем (а повечето срещащи се проблеми са от този вид) нехолономните връзки са линейни, че не можем да използуваме уравненията на Гибс—Апел, а значи, че нито за тяхното намиране, нито за тяхното приложение линейността е необходима. И ако съществува такава друга форма на уравненията на динамиката на холономните и нехолономните системи, за която линейните връзки относно производните или диференциалите на обобщените координати ще бъдат достатъчни за написване на уравненията на движение на нехолономните системи, то тогава с предложената от Апел процедура се извършват на два пъти два празни хода: единият при определяне на коефициентите $\bar{a}_{\nu\lambda}$, a_ν, а другият при прилагането на формата (23), т. е. и при съставяне на уравненията на движение, и при тяхното прилагане. А такава форма съществува.

Съгласно казаното дотук естественото изискване за преминаване от уравненията (23), изведени за холономните системи, към уравненията (18), важащи за нехолономните системи, е да са ни дадени линейните връзки

$$\sum_{\varkappa=1}^{k} B_{\rho\varkappa}\, d\dot{q}_\varkappa + B_\rho\, dt = 0 \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, r), \tag{24}$$

които позволяват намирането на зависимите обобщени ускорения

$$\ddot{q}_\rho = \sum_{\lambda=1}^{l} \beta_{\rho\lambda}\, \ddot{q}_\lambda + \beta_\rho \qquad (\rho = l+1, l+2, \ldots, l+r = k), \tag{25}$$

предлежащи за внасяне в (23), с което формата (18) по-точно ще се напише във вида

$$\frac{\partial S^*}{\partial \ddot{q}_\lambda} = Q^*_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, l), \tag{26}$$

където звездичката означава, че в енергията на ускорението S фигурират само независимите обобщени ускорения. Тогава (26) и (24, 25) определят напълно исканото движение.

Същото щеше да важи и ако беше дадена нехолономната нелинейна зависимост относно обобщените скорости,

$$\Phi_\rho(t, \ldots, q_\varkappa, \ldots, \dot{q}_\varkappa, \ldots) = 0 \qquad \begin{matrix}(\rho = 1, 2, \ldots, r),\\ (\varkappa = 1, 2, \ldots, k),\end{matrix} \tag{27}$$

която се свежда отново до необходимата линейна зависимост относно обобщените ускорения (25). Но и нелинейната зависимост относно обобщените ускорения

$$\Psi_\rho(t, \ldots, q_\varkappa, \ldots, \dot{q}_\varkappa, \ldots, \ddot{q}_\varkappa, \ldots) = 0 \qquad \begin{matrix}(\rho = 1, 2, \ldots, r),\\ (\varkappa = 1, 2, \ldots, k)\end{matrix} \tag{28}$$

се оказва използваема, ако се прибегне до линейна зависимост не спрямо вторите производни на обобщените координати, а спрямо техните диференциали, както това бе посочено от Ценов. Наистина сега ще имаме

$$d\Psi_\varrho = \sum_{\varrho=1}^{r} \frac{\partial \Psi_\varrho}{\partial \ddot{q}_\varkappa} d\ddot{q}_\varkappa + \cdots = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k), \tag{29}$$

Третата бележка, на която вече сме се спирали в други наши работи, се отнася до привеждане уравненията на Гибс—Апел в стационарен вид чрез полагането

$$R = S - \sum_{\varkappa=1}^{k} Q_\varkappa \ddot{q}_\varkappa. \tag{30}$$

За да получи условието

$$\frac{\partial R}{\partial \ddot{q}_\varkappa} = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k), \tag{31}$$

очевидно Апел приема, че

$$\frac{\partial}{\partial \ddot{q}_\mu} \sum_{\varkappa=1}^{k} Q_\varkappa \ddot{q}_\varkappa = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, k). \tag{32}$$

което е необходимо и достатъчно условие към очевидното условие (23), за да важи (31). Очевидно, че достатъчно условие за тая цел е обобщените сили да не зависят от ускорението или все едно поради $Q_\varkappa = \sum_{\nu=1}^{N} F_\nu \cdot \frac{\partial r_\nu}{\partial q_\varkappa}$ вместо

$$\frac{\partial Q_\varkappa}{\partial \ddot{q}_\mu} = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, k) \tag{33}$$

е достатъчно

$$\frac{\partial F_\nu}{\partial \ddot{q}_\mu} = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, k) \tag{34}$$

Не са ли изпълнени тези условия (32) или (33, 34), ние не бихме могли да достигнем до (31). Как бихме постъпили тогава?

От казаното дотук се вижда, че формите на Гибс—Апел (23) и (18) са действително едни и същи независимо от тяхното получаване, т. е. независимо от степента (реда) на връзките, щом се следва процедурата, изложена както от Апел, така и от Парс за преминаване от холономни към нехолономни връзки. Следователно твърдението на Парс, което цитирахме курсивирано, що се отнася до вида на тези уравнения, дей-

ствително е форма най-проста и обхващаща, но не и що се отнася до нейното приложение поради наличието на функцията S.

Вече е показано обаче за пръв път от Ценов, а сетне и от Манжерон—Делеану и от нас, че подобни прости и по-обхващащи форми като тая на Гибс—Апел също съществуват, и при тях отново участвува само кинетичната енергия и някаква нейна разновидност. При това ние подробно сме се спрели на оная форма, която е с един ред по-ниска от тази на Апел—Ценов, следователно за нея напълно е достатъчна линейността на нехолономните връзки, а при работа с диференциалите—даже и нелинейността относно обобщените скорости.

Уравненията, годни за свеждане към формата (23), а оттам и към (18), са тези на Jacob Nielsen и на Иван Ценов, а именно

$$\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_\varkappa} - 2\frac{\partial T}{\partial q_\varkappa} = Q_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k) \tag{35}$$

и съответно

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \ddot{T}}{\partial \ddot{q}_\varkappa} - 3\frac{\partial T}{\partial q_\varkappa}\right) = Q_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k), \tag{36}$$

гдето формата (35) не е нищо друго освен „развити“ уравненията на Лагранж от втори род форма, следваща непосредствено, и като се излезе от принципа на Журден, тъй както формата (36) следва непосредствено от принципа на Гаус. Както вече се спомена, и двете форми следват от наречените от нас „обобщени уравнения на Лагранж“:

$$\frac{1}{n}\left(\frac{\partial \overset{(n)}{T}}{\partial \overset{(n)}{q}_\varkappa} - (n+1)\frac{\partial T}{\partial q_\varkappa}\right) = Q_\varkappa \qquad \begin{matrix}(n = 1, 2, \ldots) \\ (\varkappa = 1, 2, \ldots, k),\end{matrix} \tag{37}$$

получени от „обобщения принцип на Даламбер—Лагранж“:

$$\sum_{\nu=1}^{N} (F_\nu - m_\nu \ddot{r}_\nu) \cdot \delta \overset{(n)}{r}_\nu = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{38}$$

гдето сега важи $\delta t = 0$, $\delta r_\nu = \delta \dot{r}_\nu = \delta \ddot{r}_\nu = \cdots = \delta \overset{n-1}{\overline{r}}_\nu = \overline{0}$, $\delta \overset{(n)}{r}_\nu \neq 0$. Очевидно формите на Нилсен и Ценов се появяват от (38) съответно при $n = 1$ и $n = 2$.

За да се приведат всички тези форми във вида „Гибс—Апел“, заслугата се пада най-първо на Ценов, който наред с кинетичната енергия

$$T = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{m_\nu \dot{r}_\nu^2}{2} = T(t, \ldots, q_\varkappa, \ldots, \dot{q}_\varkappa, \ldots) \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots), \tag{39}$$

въведе още една функция

(40) $$T_0 = T(t, \ldots, q_\varkappa, \ldots, \dot{q}_\varkappa, \ldots) \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, q),$$

която не е вече T, защото в T_0 липсват обобщените скорости, по-скоро временно те са фиксирани, както това е отбелязано в (40) с подчертаване на $\dot{q}$-те. И понеже имаме, че

(41) $$\overset{(n)}{T}_0 = \sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{\partial T}{\partial q_\varkappa} \overset{(n)}{q}_\varkappa + \cdots \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

то непосредствено следва лемата:

(42) $$\frac{\partial \overset{(n)}{T}}{\partial \overset{(n)}{q}_\varkappa} = \frac{\partial T}{\partial q_\varkappa}, \qquad \begin{matrix} (n = 1, 2, \ldots), \\ (\varkappa = 1, 2, \ldots). \end{matrix}$$

Но това даде възможност за въвеждане както в уравненията на Нилсен (35), така и в тия на Ценов (36) на функцията

(43) $$R_1 = \dot{T} - 2\dot{T}_0,$$

съответно на функцията

(44) $$R_2 = \frac{1}{2}(\ddot{T} - 3\ddot{T}_0),$$

вследствие на което сега тези форми (35) и (36) се написват в „Гибс—Ценов“ вид

(46) $$\frac{\partial R_1}{\partial \dot{q}_\varkappa} = Q_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$$

и

(47) $$\frac{\partial R_2}{\partial \ddot{q}_\varkappa} = Q_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k).$$

Функциите R_1 и R_2 са именно ония функции — подобни на „енергията на ускорението“ S, които позволяват процедурите, изложени от Апел и Парс, за да се премине от холономни към неколономни системи, без предварителното изискване при извеждането им какъв да бъде редът на нехолономните връзки, а, наопаки, указващи за този ред: при Нилсен—линейни връзки, а при Ценов — нелинейни относно обобщените скорости; или при Нилсен нелинейни относно обобщените скорости, а при Ценов — нелинейни относно обобщените ускорения.

Като въведем и сега „стационарния“ вид чрез

$$K_1 = R_1 - \sum_{\varkappa=1}^{k} Q_\varkappa \dot{q}_\varkappa, \tag{48}$$

откъдето

$$\frac{\partial K_1}{\partial \dot{q}_\varkappa} = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k) \tag{49}$$

и чрез

$$K_2 = R_2 - \sum_{\varkappa=1}^{k} Q_\varkappa \ddot{q}_\varkappa, \tag{50}$$

откъдето

$$\frac{\partial K_2}{\partial \ddot{q}_\varkappa} = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k), \tag{51}$$

уравненията на нехолономните материални системи ще бъдат

$$\frac{\partial K_1^*}{\partial \dot{q}_\lambda} = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, l = k - r) \tag{52}$$

и

$$\frac{\partial K_2^*}{\partial \ddot{q}_\lambda} = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, l = k - r), \tag{53}$$

където звездата и сега означава, че във функциите K_1 и K_2 сме изпъдили чрез съответните линейни връзки зависимите обобщени скорости или обобщени ускорения. Прибягването към едните или другите уравнения (към „редуцираните уравнения на Нилсен“ или към „редуцираните уравнения на Ценов“) (52) и (53) ще се обуславя, разбира се, и от закона на приложените сили, както по това вече направихме съответната бележка.

Да се върнем сега към становището на Парс, че уравненията (23), (18) на Гибс—Апел са „най-прости и най-обхващащи“. Вижда се от токущо изведеното, че основанията за това важат с не по-малка сила и за уравненията (46), (47) и (52), (53) не само поради един и същия вид, но и поради по-простите функции R_1 и R_2 в сравнение с функцията S.

За илюстрация на нашето становище ще съпоставим два от примерите, които въвежда Парс, от една страна, по неговата процедура чрез „Гибс-Апеловата“ форма, а, от друга, чрез „редуцирана Нилсенова форма“, която ние най-често сме използували в различните наши приложения.

В гл. XIII „Приложения на Гибс-Апеловите уравнения“, § 13.1, Парс разглежда като пример движението на точка върху равнина: „Като първо просто приложение на Гибс-Апеловите уравнения ние ще из-

ползуваме уравненията за изследване движението на точката в равнината, използувайки координатите r, q, където

(13.1.1) $$r^2 = x^2 + y^2, \quad dq = xdy - ydx.$$

Тук r е Лагранжова координата, q — квази-координата. Имаме

(13.1.2) $$r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y}, \quad \dot{q} = x\dot{y} - y\dot{x},$$

откъдето

(13.1.3) $$r^2\dot{r}^2 + \dot{q}^2 = r^2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2).$$

По-нататък

(13.1.4) $$r\ddot{r} + \dot{r}^2 = x\ddot{x} + y\ddot{y} + \dot{x}^2 + \dot{y}^2,$$

откъдето, използувайки (13.1.3), имаме

(13.1.5) $$x\ddot{x} + y\ddot{y} = r\ddot{r} - \frac{\dot{q}^2}{r^2}.$$

Но също

(13.1.6) $$x\ddot{x} - y\ddot{y} = \ddot{q},$$

тогава от (13.1.5) и (13.1.6)

(13.1.7) $$r^2(\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2) = \ddot{q}^2 + \left(r\ddot{r} - \frac{\dot{q}^2}{r^2}\right)^2.$$

Така най-после

(13.1.8) $$G = \frac{1}{2}m(\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2) = \frac{1}{2}m\left\{\left(\ddot{r} - \frac{\dot{q}^2}{r^3}\right)^2 + \frac{\ddot{q}^2}{r^2}\right\}.$$

Тъй като членът, несъдържащ компонентите на ускорението, може да бъде изпуснат от G, ние можем да напишем вместо (13.1.8)

(13.1.9) $$G = \frac{1}{2}m\left(\ddot{r}^2 - \frac{2}{r^3}\dot{q}^2\ddot{r} + \frac{1}{r^2}\ddot{q}^2\right).$$

Формулата за G може да бъде намерена по-бързо и по-лесно, като забележим, че радиалната компонента на ускорението е

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \ddot{r} - \frac{\dot{q}^2}{r^3},$$

а трансверзалната компонента е $\ddot{q}/r$, което води до същия резултат.

Ако радиалната и трансверзалната компонента на силата са R, S, работата, дадена с виртуални премествания, е

(13.1.10) $$R\delta r + \frac{S}{r}\delta q$$

и Гибс-Апеловите уравнения на движението са

$$m\left(\ddot{r}-\frac{\dot{q}^2}{r^3}\right)=R,\quad m\ddot{q}=rS, \tag{13.1.11}$$

които са, разбира се, познати от елементарни съображения."

Имайки пред вид, че полярните компоненти на скоростта са $\dot{r}$ и $r\dot{\varphi}$, за кинетичната енергия имаме

$$2T=m(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2) \tag{54}$$

а за функцията на Ценов

$$2T_0=m(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2). \tag{55}$$

Чрез еднократни деривирания намираме съответно

$$\dot{T}=m(\dot{r}\ddot{r}+r\dot{r}\dot{\varphi}^2+r^2\dot{\varphi}\ddot{\varphi}) \tag{57}$$

и

$$\dot{T}_0=mr\dot{r}\dot{\varphi}^2, \tag{58}$$

откъдето функцията R_1 има вида

$$R_1=\dot{T}-2\dot{T}_0=m(\dot{r}\ddot{r}+r\dot{r}\dot{\varphi}^2+r^2\dot{\varphi}\ddot{\varphi}-2r\dot{r}\dot{\varphi}^2). \tag{59}$$

Прочее уравненията на Нилсен са:

$$\frac{\partial R_1}{\partial \dot{r}}=m(\ddot{r}+r\dot{\varphi}^2-2r\dot{\varphi}^2-2r\dot{\varphi}^2)=m(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2)=R, \tag{60}$$

$$\frac{\partial R_1}{\partial \dot{\varphi}}=m(2r\dot{r}\dot{\varphi}+r^2\ddot{\varphi})=rS, \tag{61}$$

в които чертицата под обобщените скорости е отпаднала.

Лесно се вижда, че уравненията (13.1.11) не са нищо друго освен нашите уравнения (60) и (61). Наистина от (13.1.1) имаме

$$\dot{q}=r^2\dot{\varphi}\ \text{ и }\ \ddot{q}=2r\dot{r}\dot{\varphi}+r^2\ddot{\varphi},$$

които, внесени в (13.1.11), водят до (60) и (61).

Вторият пример, който Парс разглежда, е търкалянето на сфера върху въртяща се равнина или върху фиксирана повърхнина (§ 13.5 и § 13.7) — случаи на нехолономни връзки, които ние вече сме разглеждали.

Сравнението на тези разглеждания очевидно е пак в полза на „редуцираните уравнения на Нилсен и тези на Ценов".

ЛИТЕРАТУРА

1. Pars, L. A.: A Treatise on analytical dynamics. Heinemann, London, 1965.
2. Appell, P.: Traité de mécanique rationelle. Gauthier—Villars, Paris, 1924.

3. Ценов, И.: Върху една нова форма на уравненията на аналитичната динамика и някои приложения на тези уравнения. Изв. Мат. инст. БАН, т. I (1954), 91—134.
4. Nielsen, J.: Vorlesungen über elementare Mechanik. Berlin, 1935.
5. Dolaptschiew, Bl.: Über die „verallgemeinerten" Gleichungen von Lagrange und deren Zusammenhang mit dem „verallgemeinerteten" Prinzip von D'Alembert. Journ. für die reine u. angew. Math., **226** (1966), 103—107.
6. Долапчиев, Бл.: Примери за приложения на редуцираните уравнения на Нилсен върху нехолономни механични системи. Год. на Соф. унив., Мат. фак., **62** (1967/68), 87—110.
7. Долапчиев, Бл.: Други примери за приложение на редуцираните уравнения на Нилсен върху нехолономни механични системи. Год. на Соф. унив., Мат. фак., **64** (1969/70),

Постъпила на 13. XII. 1971 г.

EINIGE BEMERKUNGEN ÜBER DIE GIBBS-APPELL'SCHE FORM DER GLEICHUNGEN DER DYNAMIK FÜR HOLONOME UND NICHTHOLONOME MATERIELLE SYSTEME

Bl. Dolaptschiew

(ZUSAMMENFASSUNG)

Den Anlaß für diesen Aufsatz hat eine Behauptung on L. A. Pars in dessen Treatise on analytical dynamis gegeben, daß die Gibbs-Appell'schen Gleichungen unter den bis heute bekannten Bewegungsgleichungen wahrscheinlich die einfachste und die umfassendste Form haben. Die erste Bemerkung bezieht sich auf das Verfahren von Appell für die Ableitung der letzteren Gleichungen, welchen die Linearität nach den verallgemeinerten Geschwindigkeiten der differentiellen nichtintegrierbaren (nicht-holonomen) Bindungen verlangt. Wären die Gibbs-Appell'schen Gleichungen nicht direkt für nicht-holonome mechanische Systeme, sondern für holonome Systeme, und nicht durch das Prinzip von D'Alembert, sondern durch das Gauss'sche Prinzip abgeleitet, so hätte diese Forderung ausgefallen; trotzdem verlangt sowohl Appell als auch Pars immer noch diese Linearität, obwohl zur Anwendung der Form $\partial S/\partial \ddot{q}_\varkappa = Q_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, 3, \ldots, k$) diese Bedingung (die linearen Bindungen) nicht mehr notwendig ist. Es werden sonst zweimal zwei leere Gänge gemacht: einer bei Aufstellung der nicht-holonomen Bewegungsgleichugen, der zweite bei ihren Verwendungen. In letzterem besteht übrigens unsere zweite Bemerkung. Die dritte Bemerkung betrifft nun die Beschränkung des Kräftegesetzes, nämlich, daß die Kräfte höchstens von den verallgemeinerten Geschwindigkeiten, nicht aber von den verallgemeinerten Beschleunigungen abhängen. Indem man außerdem beachtet, daß es noch andere Formen für die Bewegungsgleichungen existieren, wie die Form von Nielsen und diejenige von Tzenoff, und überhaupt die „verallgemeinerten

Gleichungen von Lagrange" da sind, die in Verbindung mit dem „verallgemeinerten Prinzip von D'Alembert" stehen, folgt, daß die Behauptung von Pars nicht stichhaltig ist. In der Tat, reduziert man die soeben erwähnten Formen durch die bekannte Funktion von Tzenoff T_0 (die kinetische Energie T, in welcher die verallgemeinerten Geschwindindigkeiten $\dot{q}$ vorlaüfig fixiert sind), erhält man eine Form, die ähnlich der Gibbs-Appell'schen Form ist — so einfach und umfassend wie die „Energie der Beschleunigung", aber nicht so kompliziert wie sie. Diese „reduzierten Gleichungen von Nielsen" haben dabei eine Ordnung der Ableitungen niedriger als die Ordnung in den Gibbs-Appell'schen Gleichungen. Ausserdem passen die verallgemeinerten Gleichungen zu jedem Gesetz der Bindungen und zu jedem Kräftegesetz, wie wir dies schon gezeigt haben.