КОГОМОЛОГИИ БИКОМПАКТНЫХ A-AR И A-ANR ПРОСТРАНСТВ

Генчо Скордев

В [8] Ногучи определил A-AR (A-ANR) пространств в классе метрических компактов — аппроксимативные абсолютные ретракты и аппроксимативные абсолютные окрестностные ретракты.

Целью настоящей заметки является рассмотрение A-AR и A-ANR в классе бикомпактов и изучение их гомологических свойств. Мы пользуемся когомологиями Гротендика — Годемана [3], [5]. Напомним, что в классе бикомпактов когомологии Гротендика — Годемана естественно изоморфны когомологиями Александрова — Чеха [3]. До сих пор при изучении гомологических свойств ретрактов и аппроксимативных ретрактов пользовались гомологиями Вьеториса. Нам кажется более удобным использовать когомологии Александрова — Чеха в связи с представимостью этого когомологического функтора [1], [7].

Введем несколько определений и обозначений.

Пусть Y-топологическое пространство и $\omega = \{V_\alpha\}$ открытое покрытие пространства Y, а f и g-отображения Y в Y. Будем говорить, что f и g подчинены ω, если для любой точки $y \in Y$ существует элемент покрытия $V_{\alpha(y)}$ такой, что $f(y)$ и $g(y)$ содержатся в $V_{\alpha(y)}$.

Пусть X — бикомпакт и $i: X \to Y$, гомеоморфизм „в". Будем говорить, что X есть аппроксимативный ретракт пространства Y, относительно гомеоморфизма i, если для всякого конечного открытого покрытия $\omega = \{V_1, \ldots, V_s\}$ пространства X, существует непрерывное отображение $r_\omega: Y \to X$, такое, что $r_\omega \circ i$ и $\mathrm{id}\,(i(X))$ подчинены покрытию $i\omega = \{iV_1, \ldots, iV_s\}$ (здесь $\mathrm{id}\,(i(X))$ есть тождественное отображение $i(X)$ в $i(X)$).

Будем говорить, что бикомпакт X есть аппроксимативный абсолютный ретракт (A-AR), если X есть аппроксимативный ретракт для всякого Y и любого i.

Отметим, что тихоновское произведение A-AR есть снова A-AR.

Предложение 1. Если бикомпакт X есть A-AR, а π — абелевая группа, то пространство X ациклично с коэффициентами π.

В случае компактов, для гомологии Вьеториса это доказано в [6].

Пусть X бикомпакт и $i: X \to Y$, гомеоморфизм „в". Будем говорить, что X есть аппроксимативный окрестностный ретракт пространства Y, относительно i, если существует окрестность U множества

чению. Рассмотрим следующий прямой спектр группы — если $\{g_1, \ldots, g_s\} \in F(\pi)$, через $(g_1, \ldots, g_s)$ обозначим подгруппу группы π, порожденную элементами $g_1, \ldots, g_s$. Гомоморфизмы прямого спектра $\{(g_1, \ldots, g_s)\}$ определяются естественными вложениями.

Имеем $\pi = \lim\limits_{\rightarrow} \{(g_1, \ldots, g_s)\}$ и $\widetilde{H}^*(X, (g_1, \ldots, g_s)) = O$ (приведенные группы когомологии). Так как когомологии Александрова — Чеха непрерывны в классе компактных пространств [4], то имеем

$$\widetilde{H}^i(X, \pi) = \lim_{\rightarrow} \widetilde{H}^i(X, (g_1, \ldots, g_s)) = O.$$

Предложение 1 доказано.

Следствие. Если бикомпакт X есть Λ-AR пространство, то связное пространство.

Докажем предложения 2. Для этого нам понадобится следующая

Лемма 3. Пусть U_i открытые и выпуклые подмножества локально выпуклого пространство E. Пространство $U = \bigcup\limits_{i=1}^{k} U_i$ имеет конечнопорожденные когомологии, если группа коэффициентов конечнопорождена и почти все группы U когомологии равны нулю.

Будем доказывать эту лемму индукцией по числу k.

Если $k = 1$ — выпуклое множество U_1 стягивается в точку, следовательно, $\widetilde{H}^i(U_1, G) = O$ (G — произвольная абелевая группа). Пусть лемма верна для k слагаемых и $U = \bigcup\limits_{i=1}^{k+1} U_i$, $U_1, \ldots, U_{k+1}$, открытые и выпуклые подмножества пространства E.

Рассмотрим триаду $(U, \bigcup\limits_{i=1}^{k} U_i, U_{k+1})$. Имеем точную последовательность Мейера — Вьеториса [5].

$$H^n(U_{k+1} \cap \bigcup_{i=1}^{k} U_i, \pi) \to H^n(U, \pi) \to H^n(U_{k+1}, \pi) \oplus H^n(\bigcup_{i=1}^{k} U_i, \pi).$$

Пусть π — конечнопорождена. По предложению индукции имеем, что группы $H^n(\bigcup\limits_{i=1}^{k} U_i, \pi)$ конечнопорождены и для почти всех n равны нулю. Так как пересечение двух открытых и выпуклых множеств в E есть снова открытое и выпуклое множество, то $H^n(U_{k+1} \cap \bigcup\limits_{i=1}^{k} U_i, \pi)$ — конечнопорождены и равны нулю для почти всех n. Следовательно $H^n(U, \pi)$ — конечнопорождена и почти для всех n равна нулю. Лемма доказана.

Докажем теперь предложения 2.

Пусть Z — бикомпакт. Рассмотрим множество всех непрерывных отображений Z в R (R — множество вещественных чисел). Обозначим это множество через $C(Z, R)$. В $C(Z, R)$ введем топологию равномерной сходимости. Относительно этой топологии $C(Z, R)$ есть банаховое

пространство. Пусть E есть пространство всех линейных непрерывных функционалов на E. В E введем слабую топологию. Естественное вложение $i: Z \to E$,

$$i(x)(f) = f(x), \quad f \in C(Z, R)$$

есть гомеоморфизм.

Итак можем считать, что пространство X вложено в локально выпуклое пространство E при помощи гомеоморфизма $i: X \to E$. Так как X есть A-ANR пространство, то существует открытое множество U в пространстве E, такое, что X является аппроксимационным ретрактом U. Для всякой точки x пусть U_x открытое и выпуклое множество в E, такое, что $x \in U_x$ и $U_x \subset U$. Так X бикомпакт, то существуют точки $x_1, \ldots, x_k$, принадлежащие X, такие, что $X \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i}$. Пусть $V = \bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i}$. Множество V содержится в U и, следовательно, X является аппроксимационным ретрактом пространства V.

Пусть π — конечнопорожденная группа.

По лемме 3, $H^n(V, \pi)$ конечнопорождены для всех n и равны нулю для почти всех n. По предложению 0 группа $H^n(X, \pi)$ есть эпиморфный образ группы $H^n(V, \pi)$. Предложение 2 доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бартик, В.: Когомологии Александрова—Чеха и отображения в полиэдры Эйленберга—Маклейна. Мат. сб., 76 (1968), 231—238.
2. Борсук, К.: Теория ретрактов. Москва, 1971.
3. Годеман, Р.: Алгебраическая топология и теория пучков, Москва, 1961.
4. Стинрод, Н., Эйленберг, С.: Основания алгебраической топологии. Москва, 1958.
5. Bredon, G.: Sheaf theory. New York, 1966.
6. Gmurczyk, A.: on approximative retracts. Bull. Acad. Polon. Sci., ser. Math., Astr., Phys., 16 (1968), 9 — 14.
7. Huber, P.: Homotopical cohomology and Čech cohomology. Math. Ann., 144 (1961),...
8. Noguchi, H.: A generalisation of ANR. Kodai Math. Sem. Rep. Tokyo, 1 (1953), 20 — 26.

Постъпила на 15. II. 1972 г.

COHOMOLOGY OF BICOMPACT A-AR AND A-ANR SPACES

G. S. Skordev

(SUMMARY)

Let X be a compact space and $H^*(X)$ Čech cohomology with rational coefficients.

If X is A-AR (A-ANR) space then $H^*(X) = 0$ ($\dim H^*(X) < \infty$).