ВЪРХУ ЧИСЛЕНОТО АПРОКСИМИРАНЕ НА ТОЧКОВОТО МНОЖЕСТВО „КРЪСТ“

Николай Кюркчиев и Светослав Марков

Да означим с K множеството, състоящо се от всички точки на отсечките $[-1, 1]$ и $[-i, i]$, и да разгледаме задачата за апроксимиране на K с полиноми от степен n относно хаусдорфово разстояние.

Хаусдорфовото разстояние [1] се дефинира за един широк клас точкови съвкупности, в частност съдържащ K. Тук няма да напомняме как се дефинира това разстояние, защото решението на тази задача може да се формулира в термините на равномерната апроксимация по следния начин:

Измежду всички полиноми от степен n да означим с $A_n(x; \alpha)$ нечетния полином със старши коефициент 1, който най-малко се отклонява от константата 0 в интервалите $[-1, -\alpha]$ и $[\alpha, 1]$, където $\alpha \in (0, 1)$. Нека това отклонение е $L_n(\alpha)$. Такъв полином съществува [2]. По-нататък ще считаме n фиксирано. Полиномът

$$P_\alpha(x) = \frac{\alpha A_n(x; \alpha)}{L_n(\alpha)}$$

има отклонение α във всеки един от интервалите $[-1, -\alpha]$ и $[\alpha, 1]$ и удовлетворява диференциалното уравнение (вж. [2] и фиг. 1 за вида на полинома и смисъла на означенията β и γ)

$$(1) \qquad \frac{P_\alpha'(x)}{\sqrt{\alpha^2 - P_\alpha^2(x)}} = \frac{x^2 - \gamma^2}{\sqrt{(1 - x^2)(x^2 - \alpha^2)(x^2 - \beta^2)}}.$$

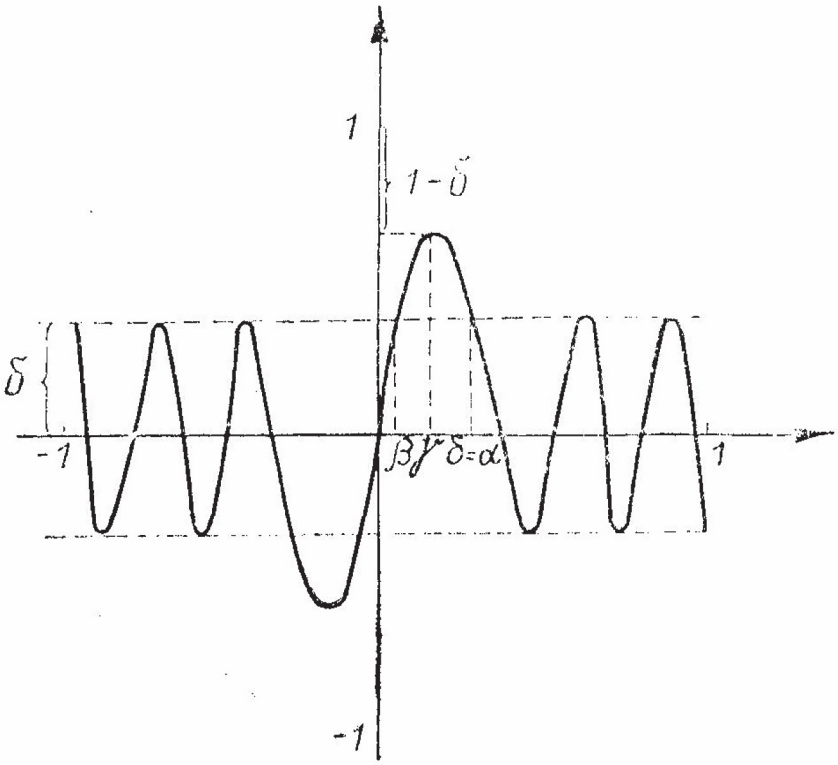
Да означим с δ тази стойност на α, която удовлетворява уравнението

$$(2) \qquad \max_{x \in [-1, 1]} |P_\alpha(x)| = 1 - \alpha.$$

Това уравнение има единствено решение в интервала $(0, 1)$, което следва от факта, че за всяко фиксирано n с растенето на α от нула до единица лявата част $\max_{x \in [-1, 1]} |P_\alpha(x)| - P_\alpha(\gamma)$ расте монотонно, започвайки от нула (δ). При тези означения може лесно да се докаже, като се има пред вид дефиницията на хаусдорфово разстояние [1], че полиномът $P_\delta(x)$ дава решението на поставената в началото задача, а δ е хаусдорфовото приближение на множеството K с полиноми от степен n.

Доколкото полиномите $P_n(x)$ са известни в експлицитен вид [2], трудността се състои само в определянето на δ.

По-нататък ще изложим един метод за пресмятане на δ, при който няма да използуваме експлицитния вид на $P_n(x)$, а някои по-прости връзки.



Фиг. 2

Като интегрираме уравнение (1) в интервалите $[0, \beta]$ и $[\beta, \alpha]$, ще получим две връзки между α, β и γ, които заедно с връзката (2) ги определят напълно.

В интервала $[0, \beta]$ след последователно прилагане на субституциите

$$x^2 = u \tag{3}$$

$$u = \frac{\beta^2 t^2}{1 - \beta^2 + \beta^2 t^2}$$

получаваме

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^\beta \frac{(\gamma^2 - x^2)\, dx}{\sqrt{(\beta^2 - x^2)(\alpha^2 - x^2)(1 - x^2)}}$$

$$= \frac{1 - \gamma^2}{\alpha\sqrt{1 - \beta^2}} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}}$$

$$= \alpha\sqrt{1-\beta^2}\int_0^1 \frac{dt}{(1-\beta^2+\beta^2 t^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}.$$

Като означим пълните елиптични интеграли съответно от първи и трети род с

$$K(k) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$

$$\Pi(\nu, k) = \int_0^1 \frac{dt}{(1+\nu t^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$

достигаме до следната връзка между величините β, γ и α:

$$\Pi(\nu, k) = (1-\gamma^2)\,K(k) - \frac{\pi\alpha}{2n}\sqrt{1-\beta^2}, \tag{4}$$

където

$$k^2 = \frac{\beta^2(1-\alpha^2)}{\alpha^2(1-\beta^2)},$$

$$\nu = \frac{\beta^2}{1-\beta^2}.$$

В интервала $[\beta, \alpha]$ диференциалното уравнение (1) изглежда така

$$n(\gamma^2-x^2)\sqrt{P^2(x)-\alpha^2} = P'(x)\sqrt{(1-x^2)(x^2-\beta^2)(\alpha^2-x^2)}. \tag{5}$$

Да интегрираме в граници от β до α

$$0 = \int_\beta^\alpha \frac{dP(x)}{\sqrt{P^2(x)-\alpha^2}} - n\int_\beta^\alpha \frac{(\gamma^2-x^2)\,dx}{\sqrt{(x^2-\beta^2)(\alpha^2-x^2)(1-x^2)}}.$$

С помощта на субституциите

$$x^2 = u$$

$$u = \frac{\beta^2\alpha^2}{\alpha^2-(\alpha^2-\beta^2)x^2}, \tag{6}$$

приложени последователно към горния интеграл, получаваме

$$0 = \gamma^2\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k_1^2t^2)}} - \beta^2\int_0^1 \frac{dt}{(1+\nu_1 t^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k_1^2t^2)}}.$$

Така достигаме до втора връзка между β, γ и α,

$$\gamma^2 K(k_1) - \beta^2 \Pi(\nu_1, k_1) = 0, \tag{7}$$

където

$$k_1^2 = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2(1 - \beta^2)},$$

$$\nu_1 = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2}.$$

За всяко $x \in [\beta, \alpha]$ е в сила

$$\ln \frac{P(x)}{\alpha} = \sqrt{\left|\frac{P(x)}{\alpha}\right|^2 - 1} = n \int_\beta^x \frac{(\gamma^2 - x^2)\, dx}{\sqrt{(x^2 - \beta^2)(\alpha^2 - x^2)(1 - x^2)}}.$$

Оттук за стойността на полинома $P_n(x)$ в точката γ получаваме

$$P_n(\gamma) = 1 + \alpha - \alpha \operatorname{ch} \frac{n}{\alpha\sqrt{1 - \beta^2}} \left\{ \gamma^2 K(k_1, \tau_0) - \beta^2 \Pi(\nu_1, k_1, \tau_0) \right\}, \tag{8}$$

където

$$\tau_0 = \arcsin \frac{\alpha\sqrt{\gamma^2 - \beta^2}}{\gamma\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}$$

и $K(k_1, \tau_0)$ и $\Pi(\nu_1, k_1, \tau_0)$ са непълни елиптични интеграли съответно от първи и трети род.

Величините β и γ могат да се определят от (4) и (7) като функции на α, след което от (8) се определя $P_n(\gamma)$, което е лявата част на (2).

Нашият метод е по същество итерационен, като α се варира по такъв начин, че итерациите водят до задоволяване на уравнението (2) с дадена точност. Да означим с $f_n(\beta, \alpha)$ връзката между β и α, която се получава като изключим γ от (4) и (7). Тя има вида

$$f_n(\beta, \alpha) = \Pi(\nu, k) - K(k) + \beta^2 \frac{\Pi(\nu_1, k_1) K(k)}{K(k_1)} - \frac{\pi\alpha}{2n}\sqrt{1 - \beta^2} = 0. \tag{9}$$

При зададено α определянето на β от (9) с помощта на автоматична сметачна машина не представлява трудност, поради благородното поведение на елиптичните интеграли.

По-долу описваме по-подробно алгоритъма за пресмятане на хаусдорфовото приближение $\tilde{c}$ на точковото множество K с полиноми от степен n.

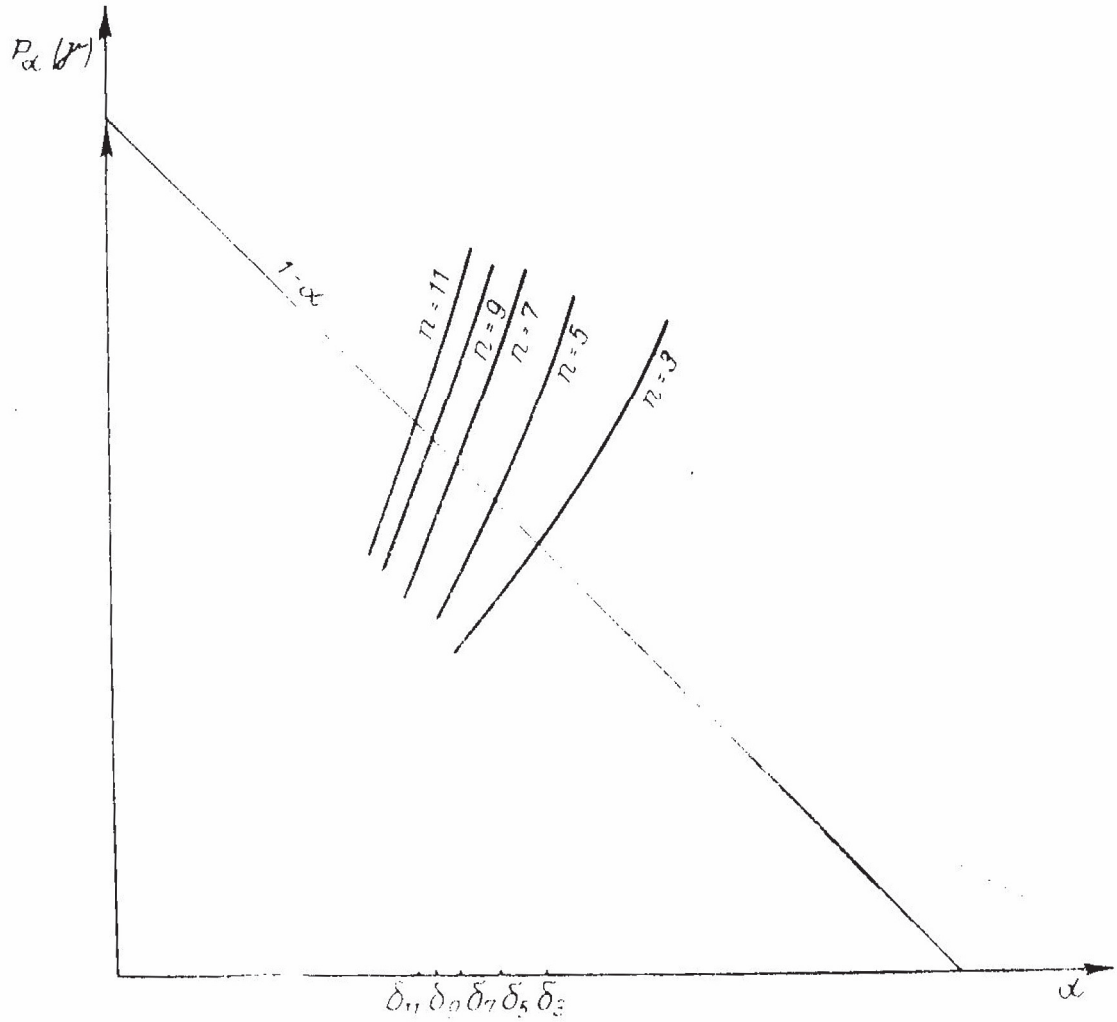
1. Задаваме степента n на полинома.
2. Даваме начална стойност на α.
3. Пресмятаме β от уравнението (9).

4. Пресмятаме γ като функция на β и α чрез връзката (7).

5. Пресмятаме $P_\alpha(\gamma)$ от (8).

Проверяваме дали $1-\alpha$ и $P_\alpha(\gamma)$ са станали достатъчно близки.

Ако не са — определяме следващото приближение за α (вж. по-долу) и преминаваме към 3. Ако е достигната желаната точност $\varepsilon > 0$, спираме итерационния процес и за хаусдорфово приближение ξ на точковото множество K взимаме стойността на α от последната итерация.



Фиг. 2

Определянето на следващото приближение може да се автоматизира, като се има пред вид фиг. 2 за изменението на $P_\alpha(\gamma)$ в зависимост от α при фиксирано n. Следващото приближение α_{k+1} се намира по формулата

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k + c_n[1 - \alpha_k - P_{\alpha_k}(\gamma)],$$

където например

$$c_n = \frac{2}{n-1}.$$

В таблица 1 привеждаме резултатите от численото пресмятане на ξ за $n = 3, 5, 7, 9, 11$.

Пресмятанията са извършени с „МИНСК-2".

Таблица 1

n	ξ	β	γ	$P(\gamma)$
3	0,49738	0,39618	0,44749	0,50263
5	0,45341	0,17363	0,31605	0,54659
7	0,40678	0,08678	0,24650	0,59322
9	0,37678	0,04605	0,20731	0,62325
11	0,36070	0,02433	0,18170	0,63933

На фиг. 1 е показана графиката на полинома $P_{11}(x)$ в интервала $[-1, 1]$.

В заключение ще отбележим, че полиномите $P_n(x)$ играят важна роля в някои технически приложения, например при синтез на антени [3].

Тяхното пресмятане успешно може да се извърши, като първо се определят величините β и γ от връзките (4) и (7), а след това $P_n(x)$ се пресмята например чрез (8).

ЛИТЕРАТУРА

1. Сендов, Бл.: Некоторые вопросы теории приближении функций и множеств в хаусдорфовой метрике. УМН 24, вып. 5 (1969), 142—178.
2. Ахиезер, Н. И.: Элементы теории эллиптических функций. М., Наука, 1970, 209- 215.
3. Минкович, Б. М., В. П. Яковлев: Теория синтеза антенн. М., Советское радио, 1969.

Постъпила на 10. VI. 1972 г.

ON THE NUMERICAL APPROXIMATION OF THE POINT SET „CROSS"

N. Kiurkchiev and S. Markov

(SUMMARY)

Let us denote by K the point set consisting of the two segments $[-1, 1]$ and $[-i, i]$. Consider the problem of the approximation of K by polynomials of degree n with respect to the Hausdorff distance [1]. In terms of uniform approximation this problem may be formulated as follows:

Denote by $A_n(x; \alpha)$ the odd polynomial of degree n with senior coefficient 1, which has the least deviation from the constant 0 in the intervals $[-1, -\alpha]$ and $[\alpha, 1]$, where $\alpha \in (0, 1)$. Such a polynomial is known to exist [2]. Denote the deviation by $L_n(\alpha)$. The polynomial $P_n(x)$ $\dfrac{\alpha A_n(x; \alpha)}{L_n(\alpha)}$ has a deviation α in each of the intervals $[-1, -\alpha]$ and $[\alpha, 1]$ (see fig. 1). $P_n(x)$ satisfies the differential equation [2]

$$(1) \qquad \frac{P_n'(x)}{\sqrt{\alpha^2 - P^2(x)}} = \frac{x^2 - \gamma^2}{\sqrt{(1-x^2)(x^2-\alpha^2)(x^2-\beta^2)}}.$$

Let us denote by δ this value of α which satisfies the equation

$$(2) \qquad \max_{x \in [-1, 1]} P_n(x) = 1 - \alpha.$$

Keeping in mind the definition of Hausdorff's distance [1], it can be easily seen that the polynomial $P_\delta(x)$ gives the solution of our problem and δ is the Hausdorff approximation of K by polynomials of degree n. Further on follows a method for computation of δ using simpler relations instead of the explicit form of $P_n(x)$ which can be obtained from (1).

By integrating equation (1) in the intervals $[0, \beta]$ and $[\beta, \alpha]$ we obtain two equations (4) and (7) respectively between α, β and γ. From (2), (4) and (7) α, β and γ can be determined. We use (8) to evaluate $P_n(\gamma)$. We use an iterative method for numerical evaluation of δ. We set an initial value of α. The quantities β and γ are determined by (4) and (7) as functions of α, hence $P_n(\gamma)$ can be found by means of (8), which is the left part of (2). Excluding γ from (4) and (7) we obtain the equation (9) between β and α. Given α the determination of β from (9) by means of an computer is no problem.

Then we compute γ from (7) and $P_n(\gamma)$ from (8). On each step we check whether $1-\alpha$ and $P_n(\gamma)$ have got close enough. If not we determine the next approximation for α, keeping in mind fig. 2 and continue the iteration process until we obtain the accuracy we need. The polynomial $P_{11}(x)$ appears on fig. 1 in interval $[-1, 1]$. In table I we give the results of the computation of $P(x)$ for $n = 3, 5, 7, 9, 11$.

In conclusion we note that the polynomial $P(x)$ has an important practical application in the synthesis of aerials [3].