ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ В КВАЗИПЕРЕМЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

Т. Л. Бояджиев, Благовест И. Долапчиев, В. С. Ткалич

Методы вариационного исчисления являются мощным аппаратом для анализа самых разнообразных задач современной науки. Их логическая простота и структурное единообразие позволяют исследовать изучаемые системы со степенью полноты во многих случаях недостижимую другими методами.

В настоящей работе делается попытка проведения единного вариационного подхода к задачам исследования некоторого класса механических систем; в частности, показывается, что вариационные принципы, соответствующие описанию в квазипеременных (лагранжевых и канонических) динамики голономной системы, эквивалентны задачам на условный экстремум некоторых функционалов. Это дает возможность применить к анализу указанных систем эффективный и хорошо отработанный аппарат теории экстремальных моделей [1]. Требование инвариантности функции Лагранжа относительно группы непрерывных вариаций переменных системы приводит к аналогу фундаментального закона сохранения Ткалича [1, 2]. На его основе построены аналоги теорем Нетер [3], рассмотрены специальные реализации законов сохранения — как известные, так и новые.

Отметим, что некоторые специальные результаты такого типа встречаются в ряде работ [4, 5, 6, 7]. Однако при этом, как правило, всегда недостаточно ясно представлена связь с вариационным исчислением.

I. ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ

§ 1. Общие замечания. Неголономные преобразования

1. Большое место в вариационном исчислении, аналитической механике и ряда смежных наук занимает задача об экстремизации функционала

$$s=\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{L}(t, x, \dot{x})\, dt, \tag{1}$$

представляющего собой отображение конечномерного евклидова пространства E_K искомых функций $\{x^k\}$ $(k = 1, 2, \ldots, K)$ на вещественную ось. Для всякой конкретной реализации подынтегральной функций $L(t, x, \dot{x})$, называемой далее основной функцией Лагранжа, будем говорить, что функционал (1) является „действием" заданной динамической системы. В случае, когда рассматрываемая система механическая, задача об экстремизации функционала (1) эквивалентна принципу Гамильтона-Остроградского [8].

В дальнейшем все функции, рассматрываемые на замкнутом интервале $[t_1, t_2]$, будем считать дважды дифференцируемыми. Если нужно получить решения некоторых уравнений, то условия разрешимости предполагаются выполненными. Все индексы k, l, m, n, r пробегают значения $1, 2, \ldots, K$, причем по дважды повторяющимся подразумеваем суммирование.

Введем вариационную производную [1] оператором

$$\frac{\delta}{\delta x^n} = \frac{\partial}{\partial x^n} - \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{x}^n}. \tag{2}$$

Используя обозначения (2), запишем уравнения экстремалей интеграла (1) в следующей форме:

$$\frac{\delta L}{\delta x^n} = 0. \tag{3}$$

Если концы рассматриваемых кривых свободны, то уравнения (3) дополняются соответствующими краевыми условиями [1, 9]

$$\left|\left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^n}\dot{x}^n\right)\delta t + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^n}\delta x^n\right|_{t_1}^{t_2} = 0. \tag{4}$$

2. Введем в рассмотрение новые переменные-импульсы при помощи соотношений

$$p_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^n}. \tag{5}$$

Соответствующее пространство $\{t, x, p\}$ будем называть расширенным фазовым пространством системы [1, 10]. Основной функций Лагранжа $L(t, x, \dot{x})$ в расширенном фазовом пространстве соответствует основная функция Гамильтона $H(t, x, p)$ согласно равенства

$$H = p_k \dot{x}^k - L. \tag{6}$$

Обоснование возможности перехода к каноническим переменным $\{t, x^n, p_k\}$ опирается на теорему Донкина [10]. С помощью соотношения (6) выражение для действия (1) перепишем в виде

$$s = \int_{t_1}^{t_2} [p_k \dot{x}^k - \mathrm{H}(t, x, p)]\, dt. \tag{7}$$

Для механических систем задача об экстремизации функционала (7) эквивалентна форме Пуанкаре принципа Гамильтона Остроградского [8, 10]. Уравнения экстремалей и условия на концах в канонических переменных имеют вид

$$\dot{p}_n = -\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x^n}, \tag{8}$$

$$\dot{x}^n = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_n}, \tag{9}$$

$$(\mathrm{H}\,\delta t - p_n\,\delta x^n)\Big|_{t_1}^{t_2} = 0. \tag{10}$$

3. Предположим, что в пространстве состояний $\{t, x, \dot{x}\}$ системы заданы K функции времени, координат и скоростей $\{\Omega^k(t, x, \dot{x})\}$. Введем новые переменные $\omega = \{\omega^k\}$ посредством уравнения

$$\omega^k = \Omega^k(t, x, \dot{x}). \tag{11}$$

Пусть преобразование (11) однозначно обратимо на всем рассматриваемом интервале $[t_1, t_2]$ относительно скоростей

$$\dot{x}^n = V^n(t, x, \omega). \tag{12}$$

Для этого необходимо, чтобы матрицы с элементами

$$\mathrm{G}^k_n = \frac{\partial \Omega^n}{\partial \dot{x}^n}, \tag{13}$$

$$G^n_m = \frac{\partial V^n}{\partial \omega^m} \tag{14}$$

были для всякого $t \in [t_1, t_2]$ невырожденными и взаимно обратными

$$\mathrm{G}^k_n G^n_m = \delta^k_m. \tag{15}$$

В этом случае переменные $\{\omega^k\}$ будем называть **неголономными скоростями**, а соответствующее пространство $\{t, x, \omega\}$ — **неголономным пространством состояний**. Основной функции Лагранжа $\mathrm{L}(t, x, \dot{x})$ в неголономном пространстве состояний соответствует приведенная функция Лагранжа $L(t, x, \omega)$, причем имеют место соотношения

(16) $$L(t, x, \omega) = \mathrm{L}[t, x, V(t, x, \omega)],$$

(17) $$\mathrm{L}(t, x, \dot{x}) = L[t, x, \Omega(t, x, \dot{x})].$$

4. Предположим, что функция $L(t, x, \omega)$ удовлетворяет по переменным $\{\omega^k\}$ условиям теоремы Донкина [10]. Введем в рассмотрение квазиимпульсы (неголономные импульсы) и приведенную функцию Гамильтона $H(t, x, \pi)$

(18) $$\pi_k = \frac{\partial L}{\partial \omega^k},$$

(19) $$H = \pi_k \omega^k - L.$$

Переход от неголономных лагранжевых переменных к квазиканоническому набору $\{t, x^k, \pi_k\}$ эквивалентен переходу в описании эволюции динамической системы от неголономного пространства состояний в расширенное неголономное фазовое пространство $\{t, x, \pi\}$. Согласно формул (5), (13), (14), (16) и (17) величины $\{\pi_k\}$ и $\{p_n\}$ связаны между собой соотношениями

(20) $$p_n = \mathrm{G}^k_n \pi_k,$$

(21) $$\pi_m = G^n_m p_n.$$

§ 2. Вариационный принцип в лагранжевых неголономных переменных

Рассмотрим задачу об экстремизации следующего функционала

(1) $$s = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{L}(t, x, \dot{x}, \omega, \pi)\, dt,$$

(2) $$\mathbf{L} = L(t, x, \omega) + \pi_k[\Omega^k(t, x, \dot{x}) - \omega^k].$$

Согласно общей теории [1] вариация функционала (1) может быть записана в виде

(3) $$\delta s = \int_{t_1}^{t_2} \left(\delta \mathbf{L} + \mathbf{L} \frac{d\delta t}{dt}\right) dt.$$

Здесь δL есть полная вариация расширенной функции Лагранжа $\mathbf{L}$.

(4) $$\delta \mathbf{L} = \frac{\partial \mathbf{L}}{dt} \delta t + \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x^n} \Delta x^n + \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{x}^n} \Delta \dot{x}^n + \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \omega^n} \Delta \omega^n + \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \pi_n} \Delta \pi_n,$$

Исключая из выражения (3) величину $\delta \mathbf{L}$ при помощи соотношения (4), после применения формулы Лейбница и интегрирования находим

$$\delta s = \left[\left(\mathbf{L} - \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{x}^n}\dot{x}^n\right)\delta t + \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{x}^n}\delta x^n\right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x^n}\Delta x^n + \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \omega^n}\Delta\omega^n + \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \pi_n}\Delta\pi_n\right)dt, \tag{5}$$

где по определению [1]

$$\delta x^n = \Delta x^n + \dot{x}^n \delta t. \tag{6}$$

При выполнении необходимого условия экстремума функционала $\delta s = 0$, в предположении независимости величин $\{x^k, \omega^k, \pi_k\}$ из соотношения (5) найдем уравнения экстремалей

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x^n} = 0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \omega^n} = 0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \pi_n} = 0 \tag{9}$$

вместе с соответствующими условиями на концах

$$\left[\left(\mathbf{L} - \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{x}^n}\dot{x}^n\right)\delta t + \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{x}^n}\delta x^n\right]_{t_1}^{t_2} = 0. \tag{10}$$

С помощью соотношения (2) уравнения (7) (10) приводим к явному виду

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x^n} + \pi_k \frac{\partial \Omega^k}{\partial x^n} - \frac{d}{dt} G_n^k \pi_k = 0, \tag{11}$$

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \omega^n} = \pi_n, \tag{12}$$

$$\omega^n = \Omega^n(t, x, \dot{x}) = 0, \tag{13}$$

$$\left[(\mathbf{L} - \pi_k G_n^k \dot{x}^n)\delta t + \pi_k G_n^k \delta x^n\right]_{t_1}^{t_2} = 0. \tag{14}$$

Поставим уравнения (13) в выражение для действия (1); в результате получим

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{L}(t, x, \omega)\, dt. \tag{15}$$

Таким образом, задача на безусловный экстремум функционала (1) эквивалентна задаче об экстремизации функционала (15) при связях (13) и, следовательно, эквивалентна задаче об экстремизации функционала (1.1) при переходе к неголономным переменным (здесь и везде в дальнейшем при ссылке первое число указывает номер параграфа, второе номер формулы в этом же параграфе; в пределах одного параграфа сохраняется только второе число). Отметим, что на экстремалях неголономные импульсы тождественны множителям Лагранжа в задаче (1).

Раскрывая полную производную по времени и произведя группирование соответствующих слагаемых, уравнения (11) запишем в виде

$$\dot{\pi}_m + \tau_m^k \pi_k - \frac{\partial L}{\partial x^n} G_m^n = 0, \tag{16}$$

$$\tau_m^k = \frac{\partial \Omega^k}{\partial x^n} G_m^n. \tag{17}$$

Уравнения (12), (13) и (16) вместе с краевыми условиями (14) образуют замкнутую систему из $3K$ уравнений для нахождения $\{x^k(t), \omega^k(t), \pi_k(t)\}$. Если подставить согласно соотношений (12) значения величин $\{\pi_n\}$ в уравнения (16), то последние приводится к форме, не содержащей множителей Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \omega^m} + \tau_m^k \frac{\partial L}{\partial \omega^k} - \frac{\partial L}{\partial x^n} G_m^n = 0. \tag{18}$$

Соотношения (18) являются естественным обобщением уравнений Гамеля [4,5, 6]. Впервые они иным путем были получены В. С. Новоселовым [5].

Рассмотрим частный случай. Пусть основная функция Лагранжа имеет вид

$$L(t, x, \dot{x}) = \frac{1}{2} g_{rl}(x) \dot{x}^r \dot{x}^l. \tag{19}$$

Перейдем к неголономным переменным следующего типа

$$\omega^k = G_n^k(x) \dot{x}^n, \tag{20}$$

$$\dot{x}^n = G_m^n(x) \omega^m. \tag{21}$$

Согласно изложенной выше теории, задача об экстремизации функционала (1.1) с подинтегральной функцией вида (19) эквивалентна задаче об екстремизации функционала

(22) $$s = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{1}{2} q_{kn} \omega^k \omega^n + \pi_k [G_n^k(x) \dot{x}^n - \omega^k) \right\} dt,$$

(23) $$q_{kn} = g_{rl} G_k^l G_n^r.$$

Уравнениями экстремалей для функционала (22) являются уравнения (18). Значения коэффициентов $\{\tau_m^k\}$ согласно формул (17) и (21) запишутся в виде

(24) $$\tau_m^k = \gamma_{nm}^k \omega^n,$$

где $\{\gamma_{nm}^k\}$ символы Риччи-Гамеля [4,11]. Подставляя в соотношения (18) выражение для приведенной функции Лагранжа

(25) $$L(t, x, \omega) = \frac{1}{2} q_{kn} \omega^k \omega^n$$

и учитывая (24), после некоторых преобразований получим

(26) $$q_{km} \dot{\omega}^k + T_{m, lr} \omega^l \omega^r = 0.$$

Сотношения (26) представляют собой уравнения геодезических в неголономных координатах. Коэффициенты $\{T_{m, lr}\}$ являются аналогами символов Христофеля первого рода [11].

§ 3. Квазиканоническая модель

Уравнениям (2.12), (2.13) и (2.16), соответственно (2.13) и (2.18), можно придать более симметричную форму, если перейти от переменных $\{t, x^k, \omega^k\}$ к квазиканоническому набору переменных $\{t, x^k, \pi_k\}$. Связь между квазискоростями $\{\omega^k\}$ и квазиимпульсами $\{\pi_k\}$ дается соотношениями (1.18). Исключая с помощью (1.19) функцию $L(t, x, \omega)$ из соотношения (2.1), приходим к следующему выражению для действия:

(1) $$s = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{H}(t, x, \dot{x}, \pi)\, dt,$$

(2) $$\mathbf{H} = \pi_k \Omega^k(t, x, \dot{x}) - H(t, x, \pi).$$

Согласно (2.3) вариация функционала (1) запишется в виде

(3) $$\delta s = \int_{t_1}^{t_2} \left(\delta \mathbf{H} + \mathbf{H} \frac{d \delta t}{dt} \right) dt.$$

$$\delta \mathbf{H} = \frac{d\mathbf{H}}{dt}\delta t + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x^n}\Delta x^n + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \dot{x}^n}\Delta \dot{x}^n + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \pi_n}\Delta \pi_n. \tag{4}$$

Уравнения экстремалей и соответствующие краевые условия получаются на основе условия $\delta s = 0$ в следующей форме

$$\frac{\delta \mathbf{H}}{\delta x^n} = 0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \pi_n} = 0, \tag{6}$$

$$\left[\left(\mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \dot{x}^n}\dot{x}^n\right)\delta t + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \dot{x}^n}\delta x^n\right]_{t_1}^{t_2} = 0. \tag{7}$$

Следовательно, гамильтонов формализм может быть истолкован как частный случай лагранжева формализма. При помощи соотношения (**2**) уравнения (5) и (6) могут быть записаны в явном виде

$$\dot{\pi}_m + \tau_m^k \pi_k = \frac{\partial H}{\partial x^n} G_m^n, \tag{8}$$

$$\Omega^n(t, x, \dot{x}) = \frac{\partial H}{\partial \pi_n}. \tag{9}$$

К уравнения (8) и (9) вместе с условиями на концах (7) представляют собой замкнутую систему для нахождения величин $\{x^k(t), \pi_k(t)\}$.

Предположим, что функции $\{\Omega^k(t, x, \dot{x})\}$ однородны относительно скоростей со степенью однородности N

$$\mathrm{G}_n^k \dot{x}^n = N^k \Omega(t, x, \dot{x}). \tag{10}$$

В этом случае краевые условия (7) принимают вид

$$\{[\pi_k \Omega^k(t, x, \dot{x})(1 - N) - H]\delta t + \pi_k \mathrm{G}_n^k \delta x^n\}_{t_1}^{t_2} = 0. \tag{11}$$

Пусть $N = 1$, тогда из (11) найдем

$$(H\delta t - \pi_k \mathrm{G}_n^k \delta x^n)_{t_1}^{t_2} = 0. \tag{12}$$

§ 4. Фундаментальный закон сохранения

Рассмотрим совокупность непрерывных преобразований пространства $\{t, x\}$, оставляющих инвариантной расширенную функцию Лагранжа L. Выделим из этой совокупности преобразования, образующие

группу; в дальнейшем ее будем называть **группой расширенной функции Лагранжа**. Для вариации, принадлежащих указанной группе, по определению справедливо соотношение

$$\delta \mathbf{L} = 0 \tag{1}$$

или согласно (2.3),

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt}\delta t + \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x^n}\Delta x^n + \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{x}^n}\frac{d\Delta x^n}{dt} + \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \omega^n}\Delta\omega^n + \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \pi_n}\Delta\pi_n = 0. \tag{2}$$

При помощи формулы Лейбница выражение (2) преобразуем к следующему виду:

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{L}\,\delta t + \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{x}^n}\Delta x^n\right) = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x^n}\Delta x^n + \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \omega^n}\Delta\omega^n + \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \pi_n}\Delta\pi_n - \mathbf{L}\frac{d\,\delta t}{dt}. \tag{3}$$

Выделим из всего множества функции $\{x^k(t),\ \omega^k(t),\ \pi_k(t)\}$, удовлетворяющих соотношению (3), подмножество экстремалей. Учитывая соотношения (2.7) (2.9), выражение (3) приводим к виду

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{L}\,\delta t + \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{x}^n}\Delta x^n\right) = \mathbf{L}\frac{d\,\delta t}{dt}. \tag{4}$$

В дальнейшем ограничимся рассмотрением изохронных вариации, для которых

$$\delta t = \text{const}. \tag{5}$$

В этом случае уравнение (4) принимает вид закона сохранения

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{L}\,\delta t + \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{x}^n}\Delta x^n\right) = 0. \tag{6}$$

При помощи соотношении (1.13), (2.2) и (2.6) выражение (6) перепишем в окончательном виде

$$\frac{d}{dt}\left[\left(\mathbf{L} - \pi_k G^k_n \dot{x}^n\right)\delta t + \pi_k G^k_n \delta x^n\right] = 0. \tag{7}$$

Полученные результаты позволяют сформулировать следующую теорему: Для изохронных вариаций, принадлежащих группе расширенной функции Лагранжа, имеет место фундаментальный закон сохранения (7).

§ 5. Аналог теоремы Нетер; специальные реализации законов сохранения

1. Пусть

$$
(1)\qquad
\begin{gathered}
T = T(t, \varepsilon),\\
X^k = X^k(t, x, \varepsilon),\\
\varepsilon = \{\varepsilon_\alpha\};\ \varepsilon_\alpha = \text{const},\\
\alpha = 1, 2, \ldots,
\end{gathered}
$$

суть преобразования пространства событий, тождественные при нулевых значениях параметров

$$
(2)\qquad
\begin{gathered}
T(t, 0) = T_0 = t,\\
X^k(t, x, 0) = X^k_0 = x^k.
\end{gathered}
$$

В предположении малости величин $\{\varepsilon_\alpha\}$ соотношения (1) принимают следующую форму:

$$
(3)\qquad
\begin{gathered}
T = t + \left.\frac{\partial T}{\partial \varepsilon_\alpha}\right|_0 \varepsilon_\alpha,\\
X^k = x^k + \left.\frac{\partial X^k}{\partial \varepsilon_\alpha}\right|_0 \varepsilon_\alpha.
\end{gathered}
$$

С другой стороны, считая T и $\{X^k\}$ проварированными значениями времени t и координат $\{x^k\}$, будем иметь [1]

$$
(4)\qquad
\begin{gathered}
T = t + \delta t,\\
X^k = x^k + \delta x^k.
\end{gathered}
$$

Из сопоставления соотношений (3) с (4) в линейном приближении, находим

$$
(5)\qquad
\begin{gathered}
\delta t = \left.\frac{\partial T}{\partial \varepsilon_\alpha}\right|_0 \varepsilon_\alpha,\\
\delta x^k = \left.\frac{\partial X^k}{\partial \varepsilon_\alpha}\right|_0 \varepsilon_\alpha.
\end{gathered}
$$

Подставляя разложения (5) в выражение для фундаментального закона сохранения (4.7), в предположении независимости величин $\{\varepsilon_\alpha\}$, получим

$$
(6)\qquad
\frac{d}{dt}\left[(L - \pi_k G^k_n \dot{x}^n)\left.\frac{\partial T}{\partial \varepsilon_\alpha}\right|_0 + \pi_k G^k_n \left.\frac{\partial X^n}{\partial \varepsilon_\alpha}\right|_0\right] = 0.
$$

Полученный результат представляет собой аналог теоремы Нетер [1, 9] каждому преобразованию вида (1), принадлежащему изохронной группе функции Лагранжа (2.2), соответствует закон сохранения вида (6).

Рассмотрим некоторые специальные реализации законов сохранения.

Пусть преобразование (1) осуществляет сдвиг во времени

$$T = t + \varepsilon; \quad X^k = x^k; \quad \varepsilon = \text{const}. \tag{7}$$

Подставляя соотношение (7) в закон сохранения (6), находим

$$\frac{d}{dt}\left(L - \pi_k G^k_n \dot{x}^n\right) = 0. \tag{8}$$

Предположим, что совокупность функции $\{\Omega^k(t, x, \dot{x})\}$ однородны относительно скоростей со степенью однородности N; тогда, в соответствии с теоремой Эйлера [8, 9], из (2.2), (2.12) и (8) получим

$$\frac{d}{dt}\left(L - N\omega^k \frac{\partial L}{\partial \omega^k}\right) = 0. \tag{9}$$

В случае постоянного $N = 1$ из (9) следует известный [6] обобщенный интеграл энергии.

2. Пусть преобразование (1) соответствует сдвигу в пространстве конфигурации

$$T = t; \quad X^k = x^k + \varepsilon^k. \tag{10}$$

Предположим, что индекс координаты можно расщепить на два независимых индекса

$$k \to a\alpha.$$

В случае механических систем будем говорить, что индекс a указывает номер частицы, а индекс α — компоненту координаты. В соответствии с этим, преобразование (10) запишется в виде

$$T = t; \quad X^{a\alpha} = x^{a\alpha} + c^a e^\alpha. \tag{11}$$

Из соотношений (1.21), (7) и (11) находим

$$\frac{dP_\alpha}{dt} = 0, \tag{12}$$

$$P_\alpha = c^a p_{a\alpha}. \tag{13}$$

Таким образом, преобразованию сдвига (11) соответствует набор законов сохранения, конкретный физический смысл которых зависит от величин $\{c^a\}$. Так, например, обычный закон сохранения механического импульса [8, 11] получается из (12), если положить $c^a = 1$,

3. Пусть имеют место соотношения (2.20) и (2.21). Рассмотрим преобразование вида

$$T = t; \quad X^{\alpha\alpha} = x^{\alpha\alpha} + G^{\alpha\alpha}_{b\beta} c^b e^\beta. \tag{14}$$

Этому преобразованию согласно (7) соответствует набор законов сохранения

$$\frac{d}{dt} \pi_{b\beta} c^b = 0. \tag{15}$$

В случае механической системы, полагая $c^b = 1$, из соотношения (15) получаем закон сохранения квазиимпульса

$$\frac{d\Pi_\beta}{dt} = 0, \tag{16}$$

$$\Pi_\beta = \sum_b \pi_{b\beta}. \tag{17}$$

Если механическая система представляет собой твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной точки, то соотношение (16) эквивалентно закону сохранения момента количества движения [8,11].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ткалич, В. С.: Теоретические основы оптимальных взаимодействий, ч. I, Аналитическая динамика. „Наукова думка", Киев, 1971.
2. Ткалич, В. С.: Фундаментальный закон сохранения управляемой динамической системы. Сб. „Трети конгрес на българските математици, Резюмета на докладите", ч. I, Варна, 1972.
3. Нетер, Э.: Инвариантные вариационные задачи. Сб. „Вариационные принципы механики", Физматгиз, М., 1959.
4. Добронравов, В. В.: Аналитическая механика в неголономных координатах. Уч. зап. МГУ. Механика, т. II, вып. 122, 1948.
5. Новоселов, В. С.: Применение нелинейных, неголономных координат в аналитической механике. Уч. зап. ЛГУ, № 217, вып. 31, 1957.
6. Неймарк, Ю. И., Н. А. Фуфаев.: Динамика неголономных систем. „Наука", ГРФМЛ, М., 1967.
7. Леви-Леблон, Ж. М.: Законы сохранения в класическиий механике с лагранжианом специального вида. Механика, Период. сб. перев. иностр. ст., № 1, 131, 1972.
8. Долапчиев, Бл. И.: Аналитична механика. „Наука и изкуство", София, 1965.
9. Гельфанд, И. М., С. В. Фомин: Вариационное исчисление. Физматгиз, М., 1961.
10. Гантмахер, Ф. Р.: Лекции по аналитической механике. Физматгиз, М., 1960.
11. Лурье, А. И.: Аналитическая механика. Физматгиз, М., 1961.

Постъпила на 4. X. 1972 г.

VARIATIONSPRINZIPIEN FÜR DIE GLEICHUNGEN DER ANALYTISCHEN DYNAMIK IN QUASIVERÄNDERLICHEN

T. L. Bojadschiew, B. I. Dolaptschiew, W. S. Tkalitsch

(ZUSAMMENFASSUNG)

Es wird gezeigt, daß das Variationsprinzip, welches der Beschreibung der Dynamik holonomer Systeme in nicht-holonomen Veränderlichen entspricht, äquivalent ist der Aufgabe zur Extremisierung des Funktionales (1), § 2, wobei (2) gilt. Hier bedeuten die Größen $\{\pi_k\}$ Multiplikatoren von Lagrange; die Funktion $L(t, x, \omega)$ wird durch Elimination der verallgemeinerten Geschwindigkeiten aus der Grundfunktion von Lagrange $L(t, x, \dot{x})$ mit Hilfe der Gleichungen der umgekehrten nicht-holonomen Umformung (12), § 1 gewonnen. Es wird noch ein Modell in quasikanonischen Veränderlichen betrachtet; das zugehörige Funktional hat die Form (1), § 3, wobei (2) gilt. Die Funktionen $H(t, x, \pi)$ und $L(t, x, \omega)$ sind durch die Relation (19), § 1, verbunden.

Das Verlangen, daß die erweiterte Funktion von Lagrange invariant bezüglich der Gruppe der stetigen Variationen des Raumes $\{t, x, \omega, \pi\}$ ist, führt auf ein Analogon des fundamentalen Erhaltungsatzes von Tkalitsch [1]. Auf dieser Basis ist der Satz bewiesen:

Jeder Umformung von der Art (1), § 4, wofür die erweiterte Funktion von Lagrange invariant ist, entspricht ein Erhaltungsgesetz. Es werden gewisse spezielle Realisationen des Erhaltungsgesetzes betrachtet, sowohl bekannte, als auch neue.