ЛЕНЦ-БАРЛОТИЕВИ ПРОЕКТИВНИ РАВНИНИ ОТ ТИП IV^a-3

Никола Мартинов

В статията [1] беше направено кратко съобщение за резултатите, получени при изучаването на някои Ленц-Барлотиеви проективни равнини. Подробно изложение на част от тези резултати беше дадено в [2]. Сега ще бъдат дадени доказателства на останалата част от съобщените в [1] резултати.

Тъй като настоящата статия е непосредствено продължение на [2], за удобство ще формулираме онези твърдения (и понятия) оттам, които ще използуваме по-нататък.

Недезарговата проективна равнина π ще наричаме $R-r$ равнина, ако R и r са неинцидентни точка и права, за които съществуват точки A, B от r и прави a, b през R ($A \not\sim a, b$ и $B \not\sim a, b$) такива, че π е $A-a$ и $B-b$ транзитивна.

За произволната $R-r$ равнина π в [2] са доказани следните леми:

Лема 4. Всяка проективна равнина, която принадлежи към кой да е от типовете I-5, I-7, I-8, IV^a-3 и IV^b-3, е $R-r$ равнина. (Тези типове са съгласно класификацията от [3].)

Лема 5. За всяка точка $S \not\sim r$ съществува точно една права $s \not\sim R$, така че π е $S-s$ транзитивна. Съответствието $\omega: S \to S \cap s \cap r$ е едно-едно обратимо, елиптично и инволюторно.

Лема 6. Ако ω и хомология от Ω имат обща двойка съответни точки, хомологията е инволюторна. (Една хомология принадлежи на Ω точно тогава, когато центърът ѝ лежи на r, а оста ѝ минава през R.)

Лема 9. Съвкупността Ω съдържа и неинволюторни хомологии. Всяка неинволюторна хомология на Ω е периодична с период 4.

След тези леми в [2] са доказани следните две теореми:

Теорема 1. Всяка $R-r$ равнина е крайна и има ред 9.

Теорема 2. Не съществува $R-r$ равнина, която е $R-r$ транзитивна.

Последната теорема се обобщава с доказаната

Лема 10. Не съществува точка $R_0 \not\sim r$, за която $R-r$ равнината π да е R_0-r транзитивна.

От тези теореми и леми, доказани по геометричен път в [2], следва, че не съществуват Ленц-Барлотиеви равнини от тип I-7 и тип I-8.

Сега ще разгледаме $R-r$ равнина π, за която съществува точка $S \not\in r$, така че π е $S-r$ транзитивна. Съгласно лема **4** такава е всяка Ленц-Барлотиева равнина от тип IV^a-3. (Равнини от този тип са разгледани и в [5].) Тъй като S може да бъде доведена в коя да е точка от r посредством колинеация, запазваща r (хомология от Ω), то π съдържа всички специални хомологии с ос r.

Следвайки Хол [**4**], да въведем в π координати, като за координатно начало O вземем точката R, а за изключени точки X, Y изберем две точки от r, които са спрегнати за ω. Съгласно [4 теорема 20. **4**. 6. и теорема 20. 5. 4] тернарната операция (при координатите) се изразява чрез бинарните операции събиране и умножение линейно:

$$a \,.\, b\ c = a\,b + c,$$

като за тернарния пръстен T са изпълнени следните четири условия:

T_1. Относно събирането T е комутативна група T_+.

T_2. Относно умножението T_{-o} е група T_x; тук o е нулевият елемент на T_+.

T_3. За произволни три елемента a, b, c на T е в сила следният дистрибутивен закон:

$$(a + b)c = ac + bc.$$

T_4. При $a \neq b$ уравнението $xa = xb + c$ има единствено решение.

Ако a е координатата на точка $A \not\in r$ ($a \in T$ и $A = (a)$), координатата на точката $A^\omega = (A)\omega$ ще означаваме с a. С e ще означаваме единичния елемент на групата T_x.

Нека φ е хомологията с център $X = (o)$ и ос $OY: x = o$, която трансформира (e) в (a). Нека още $E = (e, e)$ и $(E)\varphi = E'$. Точката E' лежи на правите $EX: y = e$ и $OA: y = xa$, следователно $E' = (a^{-1}, e)$. Нека $B = (b)$ е произволна точка от r, но различна от X и Y, а $B(\varphi) = B' = (b')$. Трите прави

$$OY: x = o,\ BE: y = xb + e = b,\ B'E': y = xb' + e = (a^{-1} b)$$

минават през една точка. Оттук намираме $b' = ab$. Следователно получихме

Лема 11. Хомологията φ с център X и ос OY, която трансформира (e) в (a), трансформира (b) в (ab). Тук a и b са произволни елементи на T_x.

Да приложим лема 11 за $b = e$. Тогава $(e) \xrightarrow{\varphi} (ae)$. Но π е $(e) - y = xe$ транзитивна. Това свойство на π е в сила и за образите на точката (e) и правата $y = xe$ при φ, т. е. π е $(a) - y = x(ae)$ транзитивна. Освен това (съгласно лема 5) π е и $(a) - y = xa$ транзитивна. Това съгласно лема 5 означава, че

$$\overline{ae} = a. \tag{1}$$

Да приложим лема 11 за $a=e$. Тогава съгласно лема 6 φ е инволюторна хомология и $(b) \overset{\varphi}{\to} (eb)=(b)$. Следователно

(2) $$eb=b.$$

От (1) и (2) получаваме свойството

T_2. За всяко $a \in T_x$

$$ea=ae=a.$$

От T_3 и T_5 намираме

$$(e+e)e=e+e.$$

Оттук съгласно T_1 и T_4 получаваме

(3) $$e+e=o.$$

Тогава за произволния елемент a на T_x ще имаме

$$a+a=a+ea=(e+e)a=o.$$

Следователно получихме

T_6. За всяко $a \in T_x$

$$a+a=0, \text{ т. е. } a=a.$$

Да приложим лема 11 за $a \neq e$, e и $b=a$. Сега φ не е инволюторна хомология, но (съгласно лема 9) φ^2 е инволюторна хомология и

$$(e) \overset{\varphi}{\to} (a) \overset{\varphi}{\to} (aa) \overset{\varphi}{\to} (e).$$

Така получаваме

T_7. За всяко $a \in T_x$ и $a \neq e$, e

$$aa=e.$$

От T_3 и T_7 за $a \in T_x$ и $a \neq e$, e получаваме

$$aa=aae=ee=e, \quad aa=eaa=ee=e,$$

т. е.

T_8. Ако $a \in T_x$ и $a \neq e$, e, то

$$a=a^{-1}.$$

Да разгледаме сбора $e+e=p$. Очевидно $p \neq o$, e. Да допуснем, че $p \neq e$. Тогава от T_3 и T_7 получаваме

$$e+e+e+e=(e+e)(e+e)=e$$

Следователно в T елементът e има период 5; но елементите на T са 9, а 5 не дели 9. Полученото противоречие дава

$$e + e = e. \tag{4}$$

От T_3, T_5 и (4) за произволно $a \in T_x$ получаваме

$$a = a + (e + e)a = ea = a.$$

Следователно в сила е
T_9. Ако $a \in T_x$, то

$$a + a = a.$$

Нека $a_1 \in T$ и $a_1 \neq o, e, e$. Лесно се съобразява, че елементът

$$a_2 = a_1 + e \tag{5}$$

е различен от o, e, e, a_1, a_1. Също така елементът

$$a_3 = a_2 + e = a_1 + e \tag{6}$$

е различен от $o, e, e, a_1, a_1, a_2, a_2$. От (5), (6) и T_9 получаваме

$$\begin{aligned} &a_1 + e = a_2, \quad a_2 + e = a_3, \quad a_3 + e = a_1, \\ &a_1 + e = a_3, \quad a_2 + e = a_1, \quad a_3 + e = a_2. \end{aligned} \tag{7}$$

Оттук с помощта на T_3 и T_5 получаваме

$$\begin{aligned} &a_1 + e = a_2, \quad a_2 + e = a_3, \quad a_3 + e = a_1, \\ &a_1 + e = a_3, \quad a_2 + e = a_1, \quad a_3 + e = a_2. \end{aligned} \tag{8}$$

При въведените означения за елементите на T, $T = \{o, e, e, a_1, a_1, a_2, a_2, a_3, a_3\}$ сборът и произведението на два елемента a, b лесно могат да се намерят; може да се определи кои елементи на T са $a + b$ и ab. В случаите $a = o$, $a = b$, $a = b$, $a = e$, $a = e$ това се вижда непосредствено или от T_6, T_9, (7), (8) и T_3, T_7. В останалите случаи съгласно (7) и (8) a може да се представи във вида $a = be_1 + e_2$, където e_1 и e_2 са измежду e и e. Тогава

$$a + b = b + be_1 + e_2 = b(e + e_1) + e_2, \quad ab = (be_1 + e_2)b = e_1 + be_2 \tag{9}$$

и намирането на $a + b$ и ab се свежда към някой от първите случаи. Равенствата (9) показват, че T е система на Хол, построена над полето GF(3) с помощта на неразложимия в това поле полином $f(x) = x^2 + 1$. Съгласно казаното по-горе за събирането и умножението получаваме съответно табл. 1 и табл. 2, където сборът $a + b$ (произведението ab) се намира на реда, започващ с a, и стълба, започващ с b.

Таблица 1

·	o	e	e	a_1	a_1	a_2	a_2	a_3	a_3
o	o	e	e	a_1	a_1	a_2	a_2	a_3	a_3
e	e	e	o	a_2	a_3	a_3	a_1	a_1	a_2
e	e	o	e	a_3	a_2	a_1	a_3	a_2	a_1
a_1	a_1	a_2	a_3	a_1	o	a_3	e	a_2	e
a_1	a_1	a_3	a_2	o	a_1	e	a_3	e	a_2
a_2	a_2	a_3	a_1	a_3	e	a_2	o	a_1	e
a_2	a_2	a_1	a_3	e	a_3	o	a_2	e	a_1
a_3	a_3	a_1	a_2	a_2	e	a_1	e	a_3	o
a_3	a_3	a_2	a_1	e	a_2	e	a_1	o	a_3

И тъй, ако съществува R r равнина π, която е равнина на транслации относно r (Ленц-Барлотиева равнина от тип IV^a-3), то в π могат така да се въведат координати, че за образувания от тях тернарен пръстен T да е изпълнено:

Тернарната операция в T се изразява чрез бинарните операции събиране и умножение линейно ($a.b\ c\ \ ab+c$); бинарните операции събиране и умножение са определени съответно с табл. 1 и табл. 2.

Но T определя π напълно (до изоморфизъм). Следователно получихме

Теорема 3. Не съществуват повече от една Ленц-Барлотиеви равнини от тип IV^a-3.

Сега ще докажем, че съществува Ленц-Барлотиева равнина от тип IV^a-3.

Нека T е тернарен пръстен с елементи o, e, e, a_1, a_1, a_2, a_2, a_3, a_3 и тернарната операция $a.b\ c\ \ ab+c$, зададена с табл. 1 и табл. 2. T може да се разглежда като система на Хол, построена над полето GF(3) с помощта на неразложимия полином $f(x)=x^2+1$. Оттук [4,

Таблица 2

	o	e	e	a_1	a_1	a_2	a_2	a_3	a_3
o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
e	o	e	e	a_1	a_1	a_2	a_2	a_3	a_3
e	o	e	e	a_1	a_1	a_2	a_2	a_3	a_3
a_1	o	a_1	a_1	e	e	a_3	a_3	a_2	a_2
a_1	o	a_1	a_1	e	e	a_3	a_3	a_2	a_2
a_2	o	a_2	a_2	a_3	a_3	e	e	a_1	a_1
a_2	o	a_2	a_2	a_3	a_3	e	e	a_1	a_1
a_3	o	a_3	a_3	a_2	a_2	a_1	a_1	e	e
a_3	o	a_3	a_3	a_2	a_2	a_1	a_1	e	e

теорема 20. 4. 7], а и чрез непосредствена проверка се вижда, че T притежава свойствата T_1, T_3, T_4, а относно умножението T o е лупа. Също чрез непосредствена проверка с табл. 2 се установява, че за всеки три елемента a, b, c на T е изпълнено $(ab)c$ $a(bc)$, т. е. че умножението е асоциативно. Впрочем, като се вземе пред вид, че T o е лупа, достатъчно е проверката да се извърши за a, b, c измежду a_1, a_2, a_3. Следователно T притежава и свойството T_2. Оттук [съгласно 4, теорема 20. 4. 6 и теорема 20. 5. 4] получаваме

Лема 12. Определената с T проективна равнина π_T е равнина на транслации относно изключената права XY r и е X OY-транзитивна.

Непосредствено от табл. 1 и табл. 2 се вижда, че T притежава свойствата T_6 и T_8. Ще докажем

Лема 13. Нека φ е изображението в π_T, което трансформира произволната точка $M(x, y)$ в точката $M'(x' \; y \; x - xa_1 \; ya_1, \; y' = x - y - xa_1 - ya_1)$, а изключените точки, както следва $(a_1) \to (\infty) \to (a_1) \to (o) \to (a_1), (a_2) \to (a_3) \to (a_2) \to (a_3) \to (a_2)$. Тогава φ е колинеация.

Доказателство. Очевидно φ е еднозначно обратимо изображение. Трябва да докажем, че точките от произволна права g се трансформират в точки от някаква права g'.

1. Нека g има уравнение $x = n$, където n е фиксиран елемент на Γ. Тъй като $M \underline{Z} g$, за координатите x', y' на M' ще имаме

$$y' = x - y + xa_1 - ya_1 = -x - x = y + xa_1 + xa_1 - ya_1$$

$$= xa_1 - ya_1 = -x - y + xa_1 = x + (x = y + xa_1 + ya_1)a_1 + xa_1 = -x = x'a_1 + na_1 = n.$$

Следователно координатите на M' са свързани с условието $y' = x'a_1 + na_1 = n$, което означава, че M' лежи на правата $g' : y = xa_1 + na_1 = n$.

2. Нека $g : y = xa_2 + n$. Тогава ще имаме

$$y' = x - y - xa_1 = ya_1 = x - y - xa_1 - ya_1 + xa_2 - xa_2 + xa_3 - xa_3 + ya_2$$

$$- ya_2 + ya_3 - ya_3 + ya_3 = xa_3 - xa_2 - ya_2 + ya_2 + x - ya_3 - xa_1 - ya_1 + xa_3$$

$$= y + xa_2 = (y + x - xa_1 = ya_1)a_3 + (y = xa_2)a_2 = (y - xa_2)a_1 = y + xa_2$$

$$= x'a_3 + na_2 - na_1 = n.$$

Следователно $g' : y = xa_3 + na_2 - na_1 = n$.

3. Нека $g : y = xa_3 + n$. Сега получаваме

$$y' = x - y = xa_1 - ya_1 = x - y - xa_1 - ya_1 + xa_2 - xa_2 + xa_3 = xa_3 + ya_3 - ya_3$$

$$+ ya_3 - ya_3 = ya_2 + xa_2 - xa_3 = ya_3 + ya_3 + x + ya_2 = xa_1 - xa_2 - ya_1$$

$$+ xa_3 - y = (-y + x + xa_1 + ya_1)a_2 + (y = xa_3)a_3 + (y = xa_3)a_2 + (xa_3 = y)a_1$$

$$+ xa_3 = y = -x'a_2 + na_3 + na_2 = na_1 = n.$$

Следователно в този случай $g' : y = -xa_2 + na_3 + na_2 = na_1 = n$.

4. Нека $g : y = = xa_2 + n$. Ще имаме

$$y' = x = y - xa_1 = ya_1 = x - y - xa_1 - ya_1 + xa_2 = xa_2 + xa_3 = xa_3 + ya_2 = ya_2$$

$$+ ya_3 - ya_3 = xa_3 = ya_3 + xa_2 + ya_2 + ya_3 = xa_1 = ya_2 + x - ya_1 = xa_3$$

$$= y + xa_2 = (x = y + xa_1 = ya_1)a_3 + (y = xa_2)a_3 = (y + xa_2)a_2$$

$$(y + xa_2)a_1 = y = xa_2 = = x'a_3 + na_3 = na_2 = na_1 = n.$$

Следователно $g' : y = = xa_3 + na_3 = na_2 = na_1 = n$.

5. Нека $g : y = = xa_3 + n$. В този случай получаваме

$$y' = x - y - xa_1 = ya_1 = x = y - xa_1 - ya_1 + xa_2 = xa_2 + xa_3 = xa_3 + ya_2$$

$$= ya_2 + ya_3 = ya_3 = ya_2 = xa_2 + xa_3 + ya_3 = ya_3 + x = ya_2 = xa_1 = ya_1$$

$$+ xa_2 = y = xa_3 = (= x + y = xa_1 = ya_1)a_2 = (y = xa_3)a_3 = (y + xa_3)a_2$$

$$= (y + xa_3)a_1 = y = xa_3 = x'a_2 = na_3 = na_2 = na_1 = n.$$

Следователно $g' : y = xa_2 = na_2 = na_1 = n$.

6. Нека $g : y = n$. Сега ще имаме

$$y' = x - y = xa_1 - ya_1 = x - y = y - xa_1 - ya_1 = ya_1 - xa_1$$

$$x - y = ya_1 - y = (y - x - xa_1 - ya_1)a_1 = ya_1 - y = x'a_1 = na_1 = n.$$

Следователно $g' : y = xa_1 = na_1 = n$.

7. Нека $g : y = xa_1 = n$. В този случай за първата координата x' на M' ще имаме

$$x' = y - x = xa_1 - ya_1 = y - xa_1 - ya_1 = x - y = xa_1 = (y - xa_1)a_1 = n = na_1.$$

Следователно сега $g' : x = n = na_1$.

8. Нека $g : y = -xa_1 = n$. Ще имаме

$$y' = x - y = xa_1 - ya_1 = -ya_1 = x - y = xa_1 = (y + xa_1)a_1 = y = xa_1 = na_1 = n.$$

Следователно $g' : y = na_1 = n$.

9. Нека $g : y = x = n$. Получаваме

$$y' = x - y = xa_1 - ya_1 = y - x = xa_1 - ya_1 = y - x = x' = n.$$

Следователно в този случай $g' : y = x = n$, т. е. $g' = g$.

10. Нека $g : y = -x = n$. Ще имаме

$$y' = x - y = xa_1 - ya_1 = x + y = xa_1 = xa_1 + ya_1 = ya_1 = x + y = xa_1 = ya_1 = (x + y)a_1 = x' = na_1.$$

Следователно $g' : y = x = na_1$.

Разгледаните десет случая изчерпват всички възможности за правата g с изключение на правата $r = XY$, която е двойна за $\mathfrak{F}$. С това лемата е доказана.

Съгласно лема 13 $X(o) \overset{\mathfrak{F}}{\to} A_1(a_1)$, $Y(\infty) \overset{\mathfrak{F}}{\to} A_1(a_1)$, $O(o, o) \overset{\mathfrak{F}}{\to} O(o, o)$. Като вземем пред вид, че π_T е X — OY-транзитивна, получаваме, че π_T е и A_1 — OA_1-транзитивна. Следователно π_T е проективна равнина от тип IV^a-3. Така получихме

Теорема 4. Проективната равнина π_T, построена над тернарния пръстен $T = \{o, e, c, a_1, a_1, a_2, a_2, a_3, a_3\}$, с тернарна операция $a.b+c = ab+c$, зададена с табл. 1 и табл. 2, е Ленц-Барлотиева равнина от тип VI^a-3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мартинов, Н.: О существувании гомологий в неезаргеовых проективных плоскостях. Докл. Болг. Акад. наук, № 12, 23 (1970), 1469—1471.
2. Мартинов, Н.: Върху несъществуването на някои Ленц-Барлотиеви проективни равнини. Известия на Мат. инст. БАН (под печат).
3. Barlotti, A.: Le possibili configurazioni del sistema delle coppie punto-retta (A, a) per cui un piano grafico risulta (A, a) — transitivo. Boll. Un. Mat. Ital., 12 (1957), 3, 212—226.
4. Холл, М.: Теория групп. Москва, 1962.
5. André, J.: Projektive Ebenen über Fastkörpern. Math. Z., 62, 137—160.

Постъпила на 5. XI. 1972 г.

LENZ-BARLOTTI'S PROJECTIVE PLANES OF THE TYPE IV^{a}3

N. Martinov

(SUMMARY)

If Lenz-Barlotti plane of the type IV^{a}3 exists, then it is finite of order nine, according to the results obtained before [2]. In this paper we further develope the research of projective planes of this type.

Let π be a projective plane of the type IV^{a}3. Then we define a ternary ring T, with such a quadruple $XYOI$ that π be a $X-OY$ transitive plane of translations to the line XY. It is shown that the binary operations of addition and multiplication by which we express the ternary opperations of T are defined by tables 1, 2. This means that T is a Hall's system constructed over the field GF (3) using the non reducible polynom $f(x) = x^2 + 1$.

On the contrary, let π_F be the plane corresponding to the so constructed Hall's system over the field GF (3). It is proved that the correspondence which transforms the arbitrary point (x, y) into the point $(y - x + xa_1 + ya_1, x + y + xa_1 - ya_1)$ with $a_1 \notin$ GF (3) is a collineation: a homology with a centre the point (1). It follows that π_F is a plane of the type IV^{a}3. So we get a new proof of the following (known by André, J.)

Theorem. The type IV^{a}3 (according to the classification of Lenz-Barlotti) contains exactly one projective plane.