РАВНОРАСПРЕДЕЛЕННЫЕ ТОЧКИ И СКОРОСТЬ РАЦИОНАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Петър Г. Бояджиев

1. Введение. Важным вопросом в теории рациональной аппроксимации аналитических функций является вопрос о связи, существующей между скоростью приближения и распределением полюсов аппроксимирующих рациональных функций. Впервые такая связь была обнаружена Уолшем еще в 30-х годов. В дальнейшем этому вопросу посвященно много исследований, но он еще далек от своего полного ответа. Чтобы яснее представить суть вещей, мы дадим сначала определение некоторых понятий.

Определение 1. Пару (E, F), где E и F — непересекающиеся, непустые компакты в расширенной комплексной плоскости c будем называть плоским кондесатором или просто конденсатором.

Если (E, F) — конденсатор, то множество $C\setminus(E\cup F)$ будем обозначать через R, а множество $C\setminus F=R\cup E$ — через D.

Класс функций, однозначных и аналитических в открытом множестве D, будем обозначать через $A(D)$.

Если функция $f\in A(D)$, то $\|f\|_E=\max\limits_{z\in E}|f(z)|$.

Определение 2. Конденсатор (E, F) будем называть регулярным, если

а) Для любой компоненты H открытого множество R выполняются соотношения $\partial H\cap E\neq\emptyset$ и $\partial H\cap F\neq\emptyset$;

б) Существует функция $u(z)$, однозначная и гармоническая в R, непрерывная в R и такая, что $u|_{\partial E}=0$, $u|_{\partial F}=1$. Из условия а) в частности следует что для любого регулярного конденсатора (E, F), множество R состоит из конечного числа компонент.

Определение 3. Пусть Γ — совокупность конечного числа аналитических кривых Жордана, принадлежащих R. Будем говорить, что Γ отделяет E от F „однократно", если $C\setminus\Gamma$ разбивается на два непересекающиеся, непустые, открытые множества U и V такие, что $E\subset U$, $F\subset V$ и $\partial U=\partial V=\Gamma$.

Определение 4. Пусть (E, F) — регулярный конденсатор и Γ — совокупность, состоящая из конечного числа аналитических кри-

вых Жордана, отделяющих E от F „однократно". Пусть ν — нормаль к Γ, направленная от E к F (т. е. в сторону F). Число

$$c = c(E, F) = C(E, F) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial u(\zeta)}{\partial \nu} ds$$

называется емкостью конденсатора (E, F).

Это понятие в математику было, повидимому, впервые введено Пойа и Сеге [1]. Очевидно, что оно является конформным инвариантом. Ясно тоже, что если логарифмическая емкость хотя бы одного из множеств E и F равна нулю, то $C(E, F) = 0$. В этом случае вопрос о скорости рациональной аппроксимации решен полностью, так что для нас важен случай, когда логарифмическая емкость обоих компактов E и F отлична от нуля. Тогда $c(E, F) \neq 0$. Мы полагаем $\rho = \exp\left(\frac{1}{c}\right)$.

Число ρ играет очень важную роль в теории рациональной аппроксимации и теории конформных отображений. В случае, когда R — двухсвязная область, ρ совпадает с римановым модулем области R, т. е. с радиусом внешнего круга при конформным отображении R на кольцо $1 < w < \rho$.

В теории рациональной аппроксимаций ρ фактически появилось, повидимому, впервые в 30-х годах в исследованиях. Дж. Уолша. Он обнаружил следующее: пусть (E, F) — регулярный конденсатор, граница которого (т. е. $\partial E \cup \partial F = \partial R$) состоит из конечного числа аналитических кривых Жордана. Определим точки $\alpha = \{a_{nk}\} \subset \partial E$ так, чтобы

$$\frac{1}{2\pi c} \int_{a_{nk}}^{a_{n,k+1}} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds = \frac{1}{n}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

и $\beta = \{b_{nk}\} \subset \partial F$ так, чтобы

$$\frac{1}{2\pi c} \int_{b_{nk}}^{b_{n,k+1}} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds = \frac{1}{n}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

(Здесь, как везде в этой статье ν — нормаль, внешняя относительно R.) Если $f \in A(D)$, то через $r_{n-1}(z, f, \alpha, \beta) = r_{n-1}(z)$ обозначим рациональную функцию вида

$$r_{n-1}(z) = \frac{p_n(z)}{(z - b_{n1}) \ldots (z - b_{n,n-1})},$$

где $p_n(z)$ — многочлен степени $\leq n-1$, интерполирующую $f(z)$ в точках $a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nn}$. Тогда

$$(1) \qquad \sup_{f \in A(D)} \lim_{n\to\infty} \left\| f - r_{n-1} \right\|_E^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{\rho}, \quad r_{n-1} = r_{n-1}(z, f, \alpha, \beta).$$

Ныне известно, что таблицы $\alpha \subset E$ и $\beta \subset F$, обладающие свойством (1), существуют для гораздо более общего случая регулярного конденсатора (см. [3]). При этом в неравенстве (1) имеется равенство. Именно, если (E, F) — произвольный регулярный конденсатор, то для любых $\alpha = \{a_{nk}\} \subset E$ и

$$\beta = \{b_{nk}\} \subset F, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

$$(2) \qquad \sup_{f \in A(D)} \lim_{n\to\infty} \left\| f - r_{n-1} \right\|_E^{\frac{1}{n}} \geq \frac{1}{\rho}, \quad r_{n-1} = r_{n-1}(z, f, \alpha, \beta).$$

Кроме того существуют $\alpha \subset E$ и $\beta \subset F$ такие, что (1) имеет место. Тем самым

$$(3) \qquad \inf_{(\alpha, \beta) \subset E \times F} \sup_{f \in A(D)} \lim_{n\to\infty} \left\| f - r_{n-1} \right\|_E^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\rho}, \quad r_{n-1} = r_{n-1}(z, f, \alpha, \beta).$$

Таким образом, найденные Уолшем таблицы дают наилучшую скорост аппроксимации методом интерполяции, во всем классе $A(D)$. Такие таблицы мы будем характеризовать следующим определением.

Определение 5. Пусть (E, F) — регулярный конденсатор. Пару таблиц точек (α, β), $\alpha = \{a_{nk}\} \subset E$, $\beta = \{b_{nk}\} \subset F$, $n = 1, 2, \ldots$, $k = 1, 2, 3, \ldots, n$, будем называть наилучшим интерполяционным процессом для класса $A(D)$, если имеет место неравенство (1) (или, что тоже самое — равенство (3)).

Заметим, что в настоящем времени имеются результаты более сильные, чем равенство (3), касающиеся наилучшего рационального приближения. Такие исследования можно найти например в работах Ерохина (4), Левина и Тихомирова (5), Уидома (6). Не будет безинтересно отметить наиболее сильный в этом отношении результат Уидома: для любого регулярного конденсатора

$$\lim_{n\to\infty} \left[\sup_{f \in A_1(D)} R_n(f) \right]^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\rho},$$

где $R_n(f)$ — наилучшее приближение $f(z)$ рациональными функциями порядка $\leq n$, а $A_1(D) \subset A(D)$ состоит из множества аналитических в D функций, непревосходящих по модулю 1.

С конструктивной точки зрения однако, метод Уолша представляет большой интерес, так как дает возможность для ефективного

нахождения, аппроксимирующих рациональных функций. Эта статья именно и посвящена дальнейшего развития и обобщения этого метода и изучения наилучших интерполяционных процессов в терминах равнораспределенности точек относительно некоторых положительных мер. Получены и некоторые результаты, уточняющие или обращающие некоторые известные раньше теоремы.

2. Определение 6. Пусть Γ — произвольная кривая в плоскости и μ — неотрицательная мера на Γ. Будем говорить, что таблица точек $\{z_{nk}\}$, $n = 1, 2, \ldots$, $k = 1, 2, \ldots, n$, равнораспределена на Γ относительно μ, если для любой дуги $L \subset \Gamma$ выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(L)}{n} = \int_L d\mu = \mu(L),$$

где $N_n(L)$ — число точек из n-ной строки таблицы $\{z_{nk}\}$, которые принадлежат L.

Остановимся на некоторые необходимые и достаточные условия для равнораспределенности точек, которыми будем в дальнейшем пользоваться.

Теорема 1. Пусть Γ — кривая и μ — неотрицательная, ограниченная мера с носителем Γ, абсолютно непрерывная относительно меры Лебега mes_2 на плоскости. Тогда, для того, чтобы таблица точек $\{z_{nk}\}$, $n = 1, 2, \ldots$, $k = 1, 2, \ldots, n$, была равнораспределена на Γ относительно μ необходимо и достаточно, чтобы для любой функции $f(\zeta)$, непрерывной на Γ выполнялось равенство

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(z_{nk}) = \int_\Gamma f(\zeta)\, d\mu(\zeta).$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $f(\zeta)$ — функция, непрерывная на Γ и ε произвольное положительное число. Тогда найдется конечное число дуг $L_p \subset \Gamma$, $p = 1, 2, \ldots, q$, $\Gamma = \bigcup_{p=1}^{q} L_p$ и постоянные a_p, $p = 1, 2, \ldots, q$, такие, что

$$f(\zeta) - \varphi(\zeta) < \varepsilon, \quad \zeta \in \Gamma,$$

где $\varphi(\zeta)$ — ступенчатая функция, равная a_p для $\zeta \in L_p$. Из этого неравенства получим

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(z_{nk}) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \varphi(z_{nk}) < \varepsilon \tag{3}$$

и

(4) $$\int_{\Gamma} (f(\zeta) - \varphi(\zeta))d\mu < \varepsilon\mu(\Gamma).$$

Кроме того

(5) $$\int_{\Gamma} \varphi(\zeta)d\mu(\zeta) = \sum_{p=1}^{q} \int_{L_p} \varphi(\zeta)d\mu(\zeta) = \sum_{p=1}^{q} a_p \int_{L_p} d\mu.$$

Ввиду равнораспределенности точек $\{z_{nk}\}$ на Γ относительно μ имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(L_p)}{n} = \int_{L_p} d\mu.$$

Отсюда и из (5) получим

$$\int_{\Gamma} \varphi(\zeta)d\mu(\zeta) = \sum_{p=1}^{q} a_p \lim_{n\to\infty} \frac{N_n(L_p)}{n}$$

(6) $$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{q} a_p N_n(L_p) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{q} \left| \sum_{k,\, z_{nk}\in L_p} \varphi(z_{nk}) \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \varphi(z_{nk}).$$

Таким образом, найдется $N(\varepsilon)$ такое, что для любого $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство

(7) $$\int_{\Gamma} \varphi(\zeta)\, d\mu(\zeta) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \varphi(z_{nk}) < \varepsilon.$$

(3), (4) и (7) дают

(8) $$\int_{\Gamma} f(\zeta)\, d\mu(\zeta) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(z_{nk}) < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon\mu(\Gamma).$$

Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $L \subset \Gamma$ — произвольная дуга с концами a_1 и a_2 и $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Так как μ абсолютно непрерывна относительно mes_2, то найдется $\delta > 0$ такое, что $\mu[\Gamma \cap K(a_j, \delta)] < \varepsilon$

($i = 1, 2$). Здесь через $K(z, \delta)$ обозначен круг с центром в точке z и радиусом δ.

Положим

$$L_1 = L\left(\bigcup_{i=1}^{2} K(a_i)\delta)\right); \quad L_2 = (\Gamma \setminus L) \setminus \left|\bigcup_{i=1}^{2} K(a_i; \delta)\right|.$$

Ясно, что L_1 и L_2 — замкнутые, непересекающиеся подмножества Γ. По известной теореме Урысона, найдутся непрерывная функция $\varphi(\zeta)$ такая, что $0 \leqq \varphi(\zeta) \leqq 1$, $\varphi_{L_2} = 0$, $\varphi_L = 1$, и функция $\varphi_1(\zeta)$ такая, что $0 \leqq \varphi_1(\zeta) \leqq 1$, $\varphi_{L_1} = 1$, $\varphi_{\Gamma \setminus L} = 0$. Здесь E означает замыкание множества E.

Пусть $\chi_L(\zeta)$ — характеристическая функция L. Так как $\chi_L(\zeta) \leqq \varphi(\zeta)$ для $\zeta \in \Gamma$, то

$$0 \leqq \int_\Gamma \varphi(\zeta) d\mu - \int_\Gamma \chi_L(\zeta)\, d\mu \tag{9}$$

$$\int_{\Gamma \setminus (L \cup L_1)} \varphi(\zeta)\, d\mu = \mu\left[\Gamma \cap \left(\bigcup_{i=1}^{2} K(a_i, \delta)\right)\right] \leqq 2\varepsilon.$$

По предположению имеем

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \varphi(z_{nk}) = \int_\Gamma \varphi(\zeta) d\mu.$$

Отсюда, пользуясь 9 и неравенством $\chi_L(\zeta) \leqq \varphi(\zeta)$ для $\zeta \in \Gamma$, получим

$$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \chi_L(z_{nk}) &\leqq \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \varphi(z_{nk}) \\ &= 2\varepsilon + \int_\Gamma \chi_L(\zeta) d\mu. \end{aligned} \tag{10}$$

Совершенно аналогично, пользуясь $\varphi_1(\zeta)$ и неравенством $\chi_L(\zeta) \geqq \varphi_1(\zeta)$ для $\zeta \in \Gamma$, получаем

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \chi_L(z_{nk}) \geqq \int_\Gamma \chi_L(\zeta) d\mu - 2\varepsilon. \tag{11}$$

Ввиду произвольности ε из (10) и (11) вытекает

$$(12) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{N_n(L)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \chi_L(z_{nk}) = \int_{\Gamma} \chi_L(\zeta)d\mu,$$

что требовалось доказать.

Заметим наконец, что модифицируя доказательство, легко можно установить, что теорема 1 верна и в случае, когда Γ состоит из конечного числа кривых. В дальнейшем мы будем иметь это ввиду.

В случае, когда Γ состоит из конечного числа взаимно внешних ограниченных кривых Жордана, в теореме 1 можно ограничится только на функции $f(\zeta) = \ln|\zeta - z|$, где z — точка, лежащая во внешности Γ. Именно имеет место

Теорема 2. Пусть Γ состоит из конечного числа взаимно внешних ограниченных кривых Жордана и μ — неотрицательная мера с носителем Γ, абсолютно непрерывная относительно меры Лебега mes_2. Тогда, для того, чтобы таблица точек $\{z_{nk}\}$, $n = 1, 2, \ldots$, $k = 1, 2, \ldots, n$ была равнораспределена на Γ относительно μ необходимо и достаточно чтобы для любой точки $z \in \Gamma$ имело место равенство

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln|z - z_{nk}| = \int_{\Gamma} \ln|z - \zeta|\, d\mu(\zeta).$$

Необходимость сразу вытекает из теоремы 1, а достаточность легко получается из следующего хорошо известного результата (см. [2], 210): пусть K — неограниченная область, граница которой состоит из конечного кривых Жордана. Тогда для любой функции $f(\zeta)$ непрерывной на ∂K и любого положительного числа ε найдутся точки $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_p$, $p = p(\varepsilon, f)$, принадлежащие K, и постоянные $A_1, A_2, \ldots, A_p$ такие, что

$$f(\zeta) - \sum_{k=1}^{k} A_k \ln|\zeta - \zeta_k| < \varepsilon, \quad \zeta \in \partial K.$$

3. Мы переходим к основной части статьи.

Пусть (E, F) — фиксированный регулярный конденсатор и $R_1 \supset R$ — открытое множество, обладающее следующими свойствами: а) любая компонента R_1 имеет непустое пересечение с R (тем самым R_1 имеет конечное число компонент); б) существует однозначная функция $U(z)$, гармоническая в R_1, непрерывная в R_1 и такая, что $U(z) = u(z)$, $z \in R$; в) $U|_{\Gamma_1} = a$, $U|_{\Gamma_2} = b$, где $\Gamma_1 = \partial R_1 \cap E$, $\Gamma_2 = \partial R_1 \cap F$, а $a \geq 0$ и $b \geq 1$ постоянные; г) ∂R_1 состоит из конечного числа взаимно внешних, ограниченных кривых Жордана.

В дальнейшем, для того, чтобы не загромождать обозначении, будем писать $u(z)$ вместо $U(z)$: $u(z) = U(z)$, $z \in R_1$.

Мы будем изучать в этом пункте существование и свойства наилучших интерполяционных процессов (α, β), $\alpha \subset \Gamma_1$ и $\beta \subset \Gamma_2$. При этом исследование будем вести в терминах равнораспределенности $\alpha = \{a_{nk}\} \subset \Gamma_1$ и $\beta = \{b_{nk}\} \subset \Gamma_2$, $n = 1, 2, \ldots$, $k = 1, 2, \ldots, n$ относительно некоторых мер μ и ν, носители которых расположены соответственно на Γ_1 и Γ_2. Сначала докажем одну лемму, которая будет в дальнейшем нам нужна.

Лемма. Пусть E, F, R, R_1, Γ_1 и Γ_2 удовлетворяют условиям а), б), в) и г) этого пункта. Тогда существуют единичные, абсолютно непрерывные относительно mes$_2$ Лебега меры μ, supp $\mu \subset \Gamma_1$* и ν, supp $\nu \subset \Gamma_2$*, такие, что для $Z \in R_1$ имеет место представление

$$\frac{1}{c}\,[u(z) - d] = \int_{\Gamma_1} \ln|\zeta - z|\, d\mu(\zeta) - \int_{\Gamma_2} \ln|\zeta - z|\, d\nu(\zeta),$$

где

$$d = \begin{cases} u(\infty), & \text{если } E \cup F \text{ ограничено;} \\ a, & \text{если } E \text{ неограничено;} \\ b, & \text{если } F \text{ неограничено.} \end{cases}$$

Доказательство. Так как все три случая аналогичны, дадим доказательство только для первого.

Рассмотрим линии уровня $\Gamma_n^1 = \left\{z : u(z) = a + \frac{1}{n}\right\}$ и $\Gamma_n^2 = \left\{z : u(z) = b - \frac{1}{n}\right\}$ функции $u(z)$. Так как $u(z)$ непрерывна в R_1, то ясно, что $\Gamma_n^1 \to \Gamma_1$ и $\Gamma_n^2 \to \Gamma_2$. Ясно кроме того, что для любой точки $z \in R_1$ найдется $N = N(z)$, так что при $n > N(z)$, $z \in R_n$, где $R_n = \left\{z \in R_1 : a + \frac{1}{n} < u(z) < b - \frac{1}{n}\right\}$.

Пусть $Z \in R_1$. Тогда по формуле Грина при $n > N(z)$ имеем

$$u(z) = u(\infty) + \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_n^1} \left[u(\zeta)\frac{\partial \ln|\zeta - z|}{\partial \nu} - \ln|\zeta - z|\,\frac{\partial u(\zeta)}{\partial \nu} \right] ds$$

(13)

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_n^2} \left[u(\zeta)\frac{\partial \ln|\zeta - z|}{\partial \nu} - \ln|\zeta - z|\,\frac{\partial u(\zeta)}{\partial \nu} \right] ds$$

* supp μ означает носитель меры μ.

(ν — внешняя относительно R_n нормаль). Так как $u_{\Gamma_n^1}=\text{const}$ и $u_{\Gamma_n^2}=\text{const}$, то пользуясь хорошо известными свойствами гармонических функций из (13) получаем

$$(14)\quad u(z)-u(\infty)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_n^1}\ln|\zeta-z|\frac{\partial u(z)}{\partial\nu}ds-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_n^2}\ln|\zeta-z|\frac{\partial u(\zeta)}{\partial\nu}ds.$$

Рассмотрим меры μ_n, $\operatorname{supp}\nu_n=\Gamma_n^1$ и ν_n, $\operatorname{supp}\nu_n=\Gamma_n^2$, определенные равенствами

$$d\mu_n(\zeta)=\frac{1}{2\pi c}\frac{\partial u(\zeta)}{\partial\nu}ds,\quad \zeta\in\Gamma_n^1,$$

$$d\nu_n(\zeta)=\frac{1}{2\pi c}\frac{\partial u(\zeta)}{\partial\nu}ds,\quad \zeta\in\Gamma_n^2$$

($c=c(E,F)$). Очевидно μ_n и ν_n — единичные, неотрицательные, абсолютно непрерывные относительно mes_2 меры. Тогда равенство (14) мы можем записать в виде

$$(15)\qquad \frac{1}{c}[u(z)-u(\infty)]=\int\ln|\zeta-z|\,d\mu_n(\zeta)-\int\ln|\zeta-z|\,d\nu_n(\zeta).$$

По хорошо известным теоремам функционального анализа из последовательностей $\{\mu_n\}$ и $\{\nu_n\}$ можем выбрать слабо сходящиеся подпоследовательности. Это означает, что существует подпоследовательность $\{n_k\}$, $k=1,2,\ldots$, натуральных чисел и единичные, неотрицательные меры μ и ν такие, что для любой непрерывной функции $f(\zeta)$ выполняются равенства

$$(16)\qquad \begin{aligned}&\lim_{k\to\infty}\int f(\zeta)d\mu_{n_k}(\zeta)=\int f(\zeta)d\mu(\zeta),\\ &\lim_{k\to\infty}\int f(\zeta)\,d\nu_{n_k}(\zeta)=\int f(\zeta)d\nu(\zeta).\end{aligned}$$

При этом μ и ν — тоже абсолютно непрерывные относительно mes_2 Лебега, а из того, что $\Gamma_n^1\to\Gamma_1$*) и $\Gamma_n^2\to\Gamma_2$*) следует, что $\operatorname{supp}\mu\subset\Gamma_1$, $\operatorname{supp}\nu\subset\Gamma_2$. Кроме того, так как для любой точки $z\in\Gamma_1\cup\Gamma_2$ функция $f(\zeta)=\ln|\zeta-z|$ непрерывна на $\Gamma_n^1\cup\Gamma_n^2$ для $n>N(z)$, то из (15) и (16) для $z\in R_1$ получим

*) Мы говорим, что последовательность множеств $\{\nu_n\}$ стремится к множеству ν, если для любого $\varepsilon>0$ найдется $N(\varepsilon)$, так что при $n>N(\varepsilon)$ ν_n содержится в окрестности ν_ε множества ν.

$$(17)\qquad \frac{1}{c}[u(z)-u(\infty)]=\int_{\Gamma_1}\ln|\zeta-z|\,d\mu(\zeta)+\int_{\Gamma_2}\ln|\zeta-z|\,d\nu(\zeta).$$

Лемма доказана.

Основным результатом настоящей статьи является следующая

Теорема 3. Пусть E, F, R, R_1, Γ_1 и Γ_2 — как в лемме. Положим $D=E\cup F=C\setminus F$. Тогда, для того, чтобы пара (α,β), $\alpha=\{a_{nk}\}\subset\Gamma_1$, $\beta=\{b_{nk}\}\subset\Gamma_2$, $n=1,2,\ldots$, $k=1,2,\ldots,n$, была наилучшим интерполяционным процессом для класса $A(D)$ необходимо и достаточно, чтобы α была равнораспределена на Γ_1 относительно μ, а β — равнораспределена на Γ_2 относительно ν.

Доказательство. Достаточность. Пусть $f\in A(D)$ и $\varepsilon>0$ — произвольное число, непревосходящее 1. Через $L_{1-\varepsilon}$ обозначим линию уровня $L_{1-\varepsilon}=\{z:u(z)=1-\varepsilon\}$. Пусть $r_{n-1}(z)$ рациональная функция порядка $\leq n-1$, имеющая полюсы в точках $b_{n1}, b_{n2},\ldots,b_{n,n-1}$, интерполирующая $f(z)$ в точках $a_{n1}, a_{n2},\ldots,a_{nn}$. По известной формуле Уолша — Эрмита (см. [2]) для $z\in D_\varepsilon=E\cup\{z:u(z)\leq 1-\varepsilon\}$ имеем

$$(18)\qquad \begin{aligned} f(z)-r_{n-1}(z)&=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_{1-\varepsilon}}\frac{f(t)}{t-z}\cdot\frac{(z-a_{n1})\ldots(z-a_{nn})}{(z-b_{n1})\ldots(z-b_{n,n-1})}\cdot\frac{(t-b_{n1})\ldots(t-b_{n,n-1})}{(t-a_{n1})\ldots(t-a_{nn})}\,dt\\ &=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_{1-\varepsilon}}\frac{f(t)}{t-z}\cdot\frac{\omega_n(z)}{\omega_n(t)}\cdot\frac{z-b_{nn}}{t-b_{nn}}\,dt,\end{aligned}$$

где

$$\omega_n(z)=\prod_{k=1}^{n}\frac{z-a_{nk}}{z-b_{nk}}.$$

Из теоремы 2 и равнораспределенности α и β относительно μ и ν соответственно следует, что для любой точки $z\in\Gamma_1\cup\Gamma_2$ (в частности для $z\in R_1$) имеют место равенства

$$(19)\qquad \begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln|z-a_{nk}|&=\int_{\Gamma_1}\ln|z-\zeta|\,d\mu(\zeta);\\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln|z-b_{nk}|&=\int_{\Gamma_2}\ln|\zeta-z|\,d\nu(\zeta).\end{aligned}$$

Из (18) вытекает, что существует число $N(\varepsilon)$ такое, что для любого $n>N(\varepsilon)$ выполняются неравенства

$$\omega_n(z) < \exp\left[\frac{n}{c}(2\varepsilon - u(\infty))\right], \quad z \in L_\varepsilon = \{z : u(z) = \varepsilon\}.$$

(20)

$$\omega_n(t) > \exp\left[\frac{n}{c}(1 - 2\varepsilon - u(\infty))\right], \quad t \in L_{1-\varepsilon}.$$

Отсюда и из (18) следует неравенство

(21) $$\max_{z \in L_\varepsilon} |f(z) - r_{n-1}(z)| \leq A_\varepsilon \cdot \exp\left[\frac{n}{c}(4\varepsilon - 1)\right],$$

где

$$A_\varepsilon = \max \frac{1}{2\pi i} \frac{f(t)}{t - z} \cdot \frac{t - \xi}{z - \xi}$$

и max берется для $(z, t, \xi) \in L_\varepsilon \times L_{1-\varepsilon} \times \Gamma_2$. Из (21) по принципу максимума получаем

$$\lim_{n\to\infty} |f - r_{n-1}|_E^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{\rho} \cdot e^{4\varepsilon},$$

откуда, ввиду произвольности $1 > \varepsilon > 0$ и $f(z) \in A(D)$, следует, что (α, β) является наилучшим интерполяционным процессом для класса $A(D)$.

Заметим наконец, что в случае, когда $\Gamma_1 = \partial E$, $\Gamma_2 = \partial F$ и они состоят из конечного числа взаимно внешних аналитических кривых Жордана, и α и β выбираются как указывали в п. 1, приведенное достаточное условие обнаружено Уолшем (2).

Необходимость. Известно (см. [3]), что если (E, F) — произвольный регулярный конденсатор, то для того, чтобы (α, β), $\alpha = \{a_{nk}\} \subset E$, $\beta = \{b_{nk}\} \subset F$, $n = 1, 2, \ldots$, $k = 1, 2, \ldots, n$ была наилучшим интерполяционным процессом для класса $A(D)$ необходимо и достаточно, чтобы равенство

(22) $$\lim_{n\to\infty} [u_n(z) - u_n(t)] = \frac{1}{c}[u(z) - u(t)]$$

выполнялось равномерно внутри множество $G \times G$. Здесь G — это максимальное открытое множество, не содержащее предельных точек таблиц α и β и такое, что любая компонента G имеет непустое пересечение с R (при этом функция $u(z)$ имеет однозначное гармоническое продолжение в G), а

$$u_n(z) = \frac{1}{n} \ln \omega_n(z) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln \frac{z - a_{nk}}{z - b_{nk}}.$$

Вернемся к нашему случаю. Предположим сначала, что $E \cup F$ — ограничено. Так как $G \supset R_1$, то (22) имеет место внутри $R_1 \times R_1$. Полагая в (22) $t = \infty$, получим, что внутри R_1 равномерно выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty} u_n(z) = \frac{1}{c}\,[u(z) - u(\infty)]. \tag{23}$$

Функцию $u_n(z)$ представим в виде $u_n(z) = u_n'(z) - u_n''(z)$, где

$$u_n'(z) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln|z - a_{nk}|; \quad u_n'' = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln|z - b_{nk}|.$$

Покажем, что для любого z лежащего вне Γ_1, т. е. в той компоненте $(C\setminus\Gamma_1)_\infty$ дополнения $\overline{C}_1\setminus\Gamma_1$, которая содержит ∞, имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} u_n'(z) = \int_{\Gamma_1} \ln|\zeta - z|\, d\mu(\zeta). \tag{24}$$

Действительно, пусть $z \in (C\setminus\Gamma_1)_\infty$. Тогда найдется линия уровня Γ_1' функции $u(z)$ лежащая R_1 и такая, что z лежит вне Γ_1'. Пусть K — окружность с достаточно большим радиусом, охватывающая z и E и F. Тогда по формуле Грина имеем

$$u_n'(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_1'\cup K} \left\{u_n'(\zeta)\frac{\partial \ln|\zeta - z|}{\partial\nu} - \ln|\zeta - z|\frac{\partial u_n'(\zeta)}{\partial\nu}\right\} ds. \tag{25}$$

Так как z и a_{nk} лежат внутри K, то (см. [2], § 9. 11)

$$\frac{1}{2\pi}\int_K \left\{\ln|\zeta - a_{nk}|\frac{\partial \ln|\zeta - z|}{\partial\nu} - \ln|z - \zeta|\frac{\partial \ln|\zeta - a_{nk}|}{\partial\nu}\right\} ds = 0. \tag{26}$$

Отсюда и из (25) получаем

$$u_n'(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_1'} \left\{u_n'(\zeta)\frac{\partial \ln|\zeta - z|}{\partial\nu} - \ln|\zeta - z|\frac{\partial u_n'(\zeta)}{\partial\nu}\right\} ds. \tag{27}$$

По аналогии с (26) можно получить равенство

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_1'} \left\{u_n''(\zeta)\frac{\partial \ln|\zeta - z|}{\partial\nu} - \ln|\zeta - z|\frac{\partial u_n''(\zeta)}{\partial\nu}\right\} ds. \tag{28}$$

Из (27) и (28) вытекает

$$(29)\qquad u_n'(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_1'}\left\{u_n(\zeta)\frac{\partial \ln|\zeta - z|}{\partial\nu} - \ln|\zeta - z|\frac{\partial u_n(\zeta)}{\partial\nu}\right\}ds,$$

откуда на основании (23) заключаем, что

$$(30)\qquad \lim_{n\to\infty} u_n'(z) = \frac{1}{2\pi c}\int_{\Gamma_1'}\left\{[u(\zeta) - u(\infty)]\frac{\partial \ln|\zeta - z|}{\partial\nu} - \ln|\zeta - z|\frac{\partial u(\zeta)}{\partial\nu}\right\}ds.$$

Из (30), так как $u|_{\Gamma_1'} = \text{const}$ и z лежит вне Γ_1', следует

$$(31)\qquad \lim_{n\to\infty} u_n'(z) = -\frac{1}{2\pi c}\int_{\Gamma_1'}\ln|\zeta - z|\frac{\partial u}{\partial\nu}ds.$$

Функции $u(\zeta)$ и $\ln|\zeta - z|$ гармоничны на множестве, ограниченным линиями уровня Γ_1' и $\Gamma_p^1 = \left\{z : u(z) = a - \frac{1}{p}\right\}$, при достаточно большом $p = p_0$. Следовательно

$$(32)\qquad \begin{aligned}&\int_{\Gamma_1'}\ln|\zeta - z|\frac{\partial u(\zeta)}{\partial\nu} - u(\zeta)\frac{\partial \ln|\zeta - z|}{\partial\nu}\Big\}ds\\ &= \int_{\Gamma_p^1}\left\{\ln|\zeta - z|\frac{\partial u(\zeta)}{\partial\nu} - u(\zeta)\frac{\partial \ln|\zeta - z|}{\partial\nu}\right\}ds.\end{aligned}$$

Но так как z лежит вне Γ_1' и Γ_p^1 и $u|_{\Gamma_1'} = \text{const}$, $u|_{\Gamma_p^1} = \text{const}$, то

$$\int_{\Gamma_1'} u(\zeta)\frac{\partial \ln|\zeta - z|}{\partial\nu}ds = \int_{\Gamma_p^1} u(\zeta)\frac{\partial \ln|\zeta - z|}{\partial\nu}ds = 0.$$

Отсюда, из (31) и (32) получаем

$$(33)\qquad \lim_{n\to\infty} u_n'(z) = -\frac{1}{2\pi c}\int_{\Gamma_p^1}\ln|\zeta - z|\frac{\partial u(\zeta)}{\partial\nu}ds = -\int \ln|\zeta - z|\,d\mu_p(\zeta).$$

(см. лемму). Устремляя в (33) p к бесконечности получим

$$(34)\qquad \lim_{n\to\infty} u_n'(z) = -\int_{\Gamma_1}\ln|\zeta - z|\,d\mu(\zeta).$$

Отсюда на основании теоремы 2 заключаем, что $\alpha = \{a_{nk}\}$ равнораспределена на Γ_1 относительно μ.

Доказательство равнораспределенности β $\{b_{nk}\}$ на Γ_2 относительно $\nu(\zeta)$ совершенно аналогично, так что проводить его мы не будем.

Рассмотрим сейчас случай, когда $E \bigcup F$ неограничено. Заметим сначала следующее. Пусть $z = \varphi(w)$ — конформное отображение в плоскости и пусть $R_1 = \varphi(R_2)$. Обозначим через γ_1 и γ_2 соответственно образы Γ_1 и Γ_2: $\Gamma_1 = \varphi(\gamma_1)$, $\Gamma_2 = \varphi(\gamma_2)$. Очевидно $v(w) = u(\varphi(w))$ — гармоническая мера γ_2 относительно R_2. Определим меры θ на γ_1 и $\varkappa$ на γ_2 аналогично определению мер μ и ν на Γ_1 и Γ_2 соответственно. Тогда, если $\{a_{nk}\}$ и $\{b_{nk}\}$ равнораспределены соответственно на Γ_1 и Γ_2 относительно $\mu(z)$ и $\nu(z)$, то образы $\{c_{nk}\}$ и $\{d_{nk}\}$, $a_{nk} = \varphi(c_{nk})$, $b_{nk} = \varphi(d_{nk})$ будут равнораспределены соответственно на γ_1 и γ_2 относительно мер $\theta(w)$ и $\varkappa(w)$. Действительно, для любого n имеем

$$\frac{\partial u(\zeta)}{\partial \nu_\zeta} = \frac{\partial v(w)}{\partial \nu_w} \cdot \frac{1}{\varphi'(w)}, \quad \zeta \in \Gamma_n^1 (\Gamma_n^2), \quad \zeta = \varphi(w).$$

Тогда для любой дуги $L \subset \Gamma_n^1$, $L = \varphi(l)$

$$(35) \qquad \mu_n(L) = \frac{1}{2\pi c} \int_L \frac{\partial u(\zeta)}{\partial \nu_\zeta} ds = \frac{1}{2\pi c} \int_l \frac{\partial v(w)}{\partial \nu_w} \frac{|\varphi'(w)|}{\varphi'(w)} \cdot dw$$

$$= \frac{1}{2\pi c} \int_l \frac{\partial v(w)}{\partial \nu_w} dw = \theta_n(l).$$

(Здесь мы воспользовались конформной инвариантности константы $c = c(E, F)$.) Аналогичное равенство получим, если $L \subset \Gamma_n^2$. Но из равенство (35) следует, что для любой дуги $L \subset \Gamma_1$ (Γ_2) имеем

$$\mu(L) = \theta(l) \quad (\nu(L) = \varkappa(l)) \quad L = \varphi(l).$$

Таким образом меры μ и ν являются конформными инвариантами. Отсюда следует и наше утверждение о равнораспределенности точек.

Продолжим доказательство. Пусть (α, β), $\alpha = \{a_{nk}\} \subset \Gamma_1$ и $\beta = \{b_{nk}\} \subset \Gamma_2$ — наилучший интерполяционный процесс для класса $A(D)$. Если $z_0 \in R$, то делая замену $w = \frac{1}{z - z_0}$ получим конденсатор (E', F'), где $E' = w(E)$ и $F' = w(F)$ уже ограничены. Положим $c_{nk} = w(a_{nk})$, $d_{nk} = w(b_{nk})$, $n = 1, 2, \ldots$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $\gamma_1 = w(\Gamma_1)$, $\gamma_2 = w(\Gamma_2)$ и $G = w(D)$. Тогда пара (c, d), $c = \{c_{nk}\} \subset \gamma_1$, $d = \{d_{nk}\} \subset \gamma_2$ будет наилучшим интерполяционным процессом для $A(G)$. Действительно, пусть $f(w) \in A(G)$ и $r_{n-1}(w)$ функция порядка $\leq n-1$ с полюсами в точках $d_{n1}, \ldots, d_{n,n-1}$, интерполирующая $f(w)$ в точках $c_{n1}, c_{n2}, \ldots, c_{nn}$. Тогда $R_{n-1}(z) = r_{n-1}\left(\frac{1}{z - z_0}\right)$

будет функцией порядка $\leq n-1$, интерполирующей $F(z)=f\left(\frac{1}{z-z_0}\right)$ $\in A(D)$ в точках $a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nn}$ и имеющей полюсы в точках $b_{n1}, b_{n2}, \ldots, b_{n,n-1}$. Так как (α, β) — наилучший интерполяционный процесс для класса $A(D)$, то

$$\lim_{n\to\infty} \left|F(z)-R_{n-1}(z)\right|_E^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\rho}.$$

Это означает, что

$$\lim_{n\to\infty} \left|f(w)-r_{n-1}(w)\right|_{E'}^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\rho},$$

откуда, ввиду того, что ρ — конформный инвариант, заключаем, что (c, d) — наилучший интерполяционный процесс для класса $A(G)$. Но $E'\bigcup F'$ ограничено и согласно приведенного выше доказательства для этого случая заключаем, что $c=\{c_{nk}\}$ равнораспределена на γ_1 относительно θ и $d=\{d_{nk}\}$ — на γ_2 относительно $\varkappa$. Как заметили выше, отсюда следует, что $\alpha=\{a_{nk}\}$ равнораспределена на Γ_1 относительно μ и $\beta=\{b_{nk}\}$ на Γ_2 относительно ν. Теорема доказана.

4. Теорема 3 дает возможность уточнить упомянутого в начале доказательства необходимости теоремы 3 необходимого и достаточного условия для того, чтобы (α, β), $\alpha\subset E$, $\beta\subset F$ была наилучшим интерполяционным процессом для класса $A(D)$ (см. [3]) и обратить в гораздо более общей ситуации одного результата Уолша (см. [2], стр. 225).

Теорема 4. Пусть E, F, R, R_1, Γ_1 и Γ_2 как в теореме 3. Тогда, для того, чтобы (α, β), $\alpha\subset\Gamma_1$, $\beta\subset\Gamma_2$ была наилучшим интерполяционным процессом для класса $A(D)$ необходимо и достаточно, чтобы равенство

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left|\frac{z-a_{nk}}{z-b_{nk}}\right|^{\frac{1}{c}} [u(z)-d] \tag{36}$$

(d смотри в лемме) выполнялось равномерно внутри R_1.

Доказательство. Достаточность следует немедленно из (36) и интерполяционной формулы Уолша — Эрмита.

Необходимость. Если (α, β) наилучший интерполяционный процесс для класса $A(D)$, то из теоремы 3 следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k}^{n} \ln\left|\frac{z-a_{nk}}{z-b_{nk}}\right| = \int_{\Gamma_1} \ln|\zeta-z|\,d\mu - \int_{\Gamma_2} \ln|\zeta-z|\,d\nu. \tag{37}$$

Из (37) и леммы следует (36).

5. Из изложенных в предыдущих пунктах теорем видно, что линии уровня функции $u(z)$ являются „носителями" наилучших интерполяционных процессов для класса $A(D)$. Вопрос о полном описании тех множеств E_1, F_1, $E_1 \subset E$, $F_1 \subset F$, которые могут быть такими „носителями", стоит однако открытым и, повидимому, совсем нетривиален. Следующая теорема представляет некоторое наблюдение в этом направлении. Мы будем предполагать следующее.

Пусть (E, F) — конденсатор, ограниченный конечного числа взаимно внешних кривых Жордана. При этом предполагаем, что кривые, ограничивающие F, являются аналитическими. Как и раньше, обозначим $D = C \setminus F$. Функция $u(z)$ гармонична в $D \setminus E$. Так как $\partial D = \partial F$ состоит из конечного числа аналитических кривых, то существует открытое множество $D_1 \supset D$ такое, что $u(z)$ может быть продолжена до однозначной гармонической функции (которой будем обозначать той же буквой) в $D_1 \setminus E$. Пусть Γ состоит из конечного числа кривых Ляпунова, лежащих в D_1 и отделяющих в совокупности D от ∂D_1 „однократно" (см. опр. 3) и такие, что $\frac{\partial u(\zeta)}{\partial \nu} = 0$, $\zeta \in \Gamma$, где ν — внешняя относительно D_1 нормаль к Γ. Пусть $\alpha = \{a_{nk}\}$ таблица точек, равнораспределенных на ∂E относительно меры μ (см. лемму), а $\beta = \{b_{nk}\} \subset \Gamma$ — таблица точек равнораспределенных на Γ относительно $\frac{1}{2\pi c} \frac{\partial u(\zeta)}{\partial \nu} ds$. Тогда имеет место следующая

Теорема 5. *Для того, чтобы пара (α, β), определенная выше, была наилучшим интерполяционным процессом для класса $A(D)$ необходимо и достаточно, чтобы Γ была линией уровня для функции $u(z)$.*

Доказательство. Достаточность сразу вытекает из определения α и β, формулы Грина и интерполяционной формулы Лагранжа — Эрмита.

Необходимость. Очевидно мы можем предполагать, что $E \cup F$ — ограничено.

Пусть (α, β) — наилучший интерполяционный процесс для класса $A(D)$. Тогда, как уже указывалось выше, равенство

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln \frac{z - a_{nk}}{z - b_{nk}} = \frac{1}{c} [u(z) - u(\infty)] \tag{38}$$

выполняется равномерно внутри $D_1 \setminus E$.

По формуле Грина для любого $z \in D_1 \setminus E$ имеем

$$(39)\qquad \frac{1}{c}\,|u(z)-u(\infty)| = \int_{\partial E} \ln|\zeta-z|\,d\mu(\zeta) + \frac{1}{2\pi c}\int_{\Gamma} u(\zeta)\,\frac{\partial \ln|\zeta-z|}{\partial\nu}\,ds - \frac{1}{2\pi c}\int_{\Gamma} \ln|\zeta-z|\,\frac{\partial u(\zeta)}{\partial\nu}\,ds.$$

Так как α равнораспределена на ∂E относительно μ, то для любого $z \in C\setminus\partial E$ имеет место соотношение

$$(40)\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln|z-a_{nk}| = \int_{\partial E}\ln|\zeta-z|\,d\mu(\zeta).$$

Из того, что β равнораспределена на Γ относительно $\frac{1}{2\pi c}\frac{\partial u}{\partial\nu}\,ds$, которая является неотрицательной мерой, абсолютно непрерывной относительно mes_2 Лебега, следует, что для любого $z \in \Gamma$ имеем

$$(41)\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln|\zeta-b_{nk}| = \frac{1}{2\pi c}\int_{\Gamma}\ln|\zeta-z|\,\frac{\partial u(\zeta)}{\partial\nu}\,ds.$$

Тогда из (38), (39), (40) и (41) вытекает, что для любого $z \in D_1\setminus E$ выполняется равенство

$$(42)\qquad \int_{\Gamma} u(\zeta)\,\frac{\partial \ln|\zeta-z|}{\partial\nu}\,ds = 0.$$

Но левая часть (42) гармонична как функция от z всюду в неограниченной области D_1, так что равенство (42) имеет место всюду в D_1. Наша цель показать, что из (42) вытекает, что $u|_{\Gamma} = \mathrm{const}$.

Пусть для большей определенности через ν_ζ обозначим нормаль к Γ в точке $\zeta \in \Gamma$, направленную в сторону D_1. Если z — точка комплексной плоскости, отличная от ζ, то пользуясь равенством

$$\frac{\partial \ln|\zeta-z|}{\partial\nu_\zeta} = \frac{\cos(\overrightarrow{\zeta z},\nu_\zeta)}{\zeta-z}$$

из (42) получим

$$(43)\qquad v(z) = \int_{\Gamma} u(\zeta)\,\frac{\cos(\overrightarrow{z\zeta},\nu_\zeta)}{\zeta-z}\,ds = 0,\quad z \in D_1.$$

Здесь через $(\overrightarrow{\zeta z}, \nu_\zeta)$ обозначен угол между вектором $\overrightarrow{\zeta z}$, имеющим начало ζ и конец z и ν_ζ.

Хорошо известно, что в наших предположений относительно Γ интеграл (43) существует для любого z. Положим $v^-(z) = v(z)$ для $z \in D_1$ и $v^+(z) = v(z)$ для $z \in C\setminus D_1$. Функции $v^-(z)$ и $v^+(z)$ непрерывны вплоть до Γ и для любого $t \in \Gamma$ удовлетворяют соотношениям

$$(44)\qquad \begin{aligned} 2v(t) &= v^-(t) + v^+(t), \\ 2\pi u(t) &= v^-(t) - v^+(t). \end{aligned}$$

Складывая эти равенства, получим

$$(45)\qquad v(t) + \pi u(t) = v^-(t).$$

Но так как $v^-(z) = 0$, то $v^-(z) = 0$. Таким образом из (45) получаем, что функция $u(\zeta)$, $\zeta \in \Gamma$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$(46)\qquad \tau(t) = \frac{1}{\pi} \int_\Gamma \tau(\zeta) \frac{\cos(\overrightarrow{\zeta t}, \nu_\zeta)}{\zeta - t} ds, \quad t \in \Gamma.$$

Но

$$\int_\Gamma \frac{\cos(\overrightarrow{\zeta t}, \nu_\zeta)}{\zeta - t} ds = -\pi,$$

так что функция $\tau(t) = \text{const}$ является решением (46).

С другой стороны, соответствующее транспонированное уравнение

$$(47)\qquad w(t) = \frac{1}{\pi} \int_\Gamma w(\zeta) \frac{\cos(\overrightarrow{\zeta t}, \nu_t)}{\zeta - t} ds$$

имеет одно и только одно линейно независимое решение (см. [7], стр. 303, теорема 2). Это означает, что (46) имеет своим общим решением $\tau(t) = \text{const}$. Следовательно $u(\zeta) = \text{const}$, $\zeta \in \Gamma$.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пойа и Сеге: Изопериметрические неравенства в математической физике. Физматгиз, Москва, 1962.
2. Уолш, Дж.: Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. Изд. иностр. лит., Москва, 1961.
3. Бояджиев, П.: О скорости рациональной аппроксимации аналитических функций. Сборник трудов кафедры теории функций и функционального анализа МГУ, вып. 3, 1972.

4. Ерохин, В.: О наилучших приближениях аналитических функций посредством рациональных. ДАН СССР, 128, 1959, 29—32.
5. Левин, А. Л., В. М. Тихомиров: Об одной теореме Ерохина. УМН, 23, № 1 (139), 1968, 119—132.
6. Widom, H.: Rational Approximation and n-Dimensional Diameter. I. of Approximation theory, 5 (1972), 343—361.
7. Петровский, И. Г.: Лекций об уравнениях с частными производными, Москва, 1961.

Постъпила на 8. XI. 1972 г.

EQUAL DISTRIBUTED POINTS AND THE SPEED OF RATIONAL APPROXIMATION OF ANALYTIC FUNCTIONS

P. G. Boyadžiev

(SUMMARY)

Let (E, F) be a regular condenser and $D=C\setminus E$. We denote by $A(D)$ the class of functions, which are analytic in D. Let $\alpha=\{a_{nk}\}$, $a_{nk}\subset E$, $n=1,2,\ldots$, $k=1,2,\ldots,n$, and $\beta=\{b_{nk}\}$, $b_{nk}\subset F$, $n=1,2,\ldots$, $k=1,2,\ldots,n$, be tables of points. We say that the pair (α, β) is the best set of interpolation for the class $A(D)$ if

$$\sup_{f\in A(D)} \lim \left\| f-r_{n-1}\right\|_E^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\rho},$$

where $r_{n-1}=r_{n-1}(z, f, \alpha, \beta)$ is the function of the form

$$r_{n-1}(z)=\frac{c_0+c_1z+\ldots+c_{n-1}z^{n-1}}{(z-b_{n1})\ldots(z-b_{n,n-1})}$$

interpolating $f(z)$ at the points $a_{n1},\ldots,a_{nn}$, $\frac{1}{\ln\rho}=c$ is the capacity of the condeneer (E, F) and $\|\varphi\|_E=\max_{z\in E}|\varphi(z)|$.

Lemma. Let (E, F) be a regular condencer and $u(z)$ be the harmonic measure of ∂F with respect to $R=D\setminus E$. Let $a=0$ and $b=1$ are numbers such that the equipotential curves $\Gamma_1=\{z: u(z)=a\}$ and $\Gamma_2=\{z: u(z)=b\}$ exist. Then there exist a measure μ, $\operatorname{supp}\mu\subset\Gamma_1$ and a measure ν, $\operatorname{supp}\nu\subset\Gamma_2$ such that

$$\frac{1}{c}|u(z)-d|=\int \ln|\zeta-z|\,d\mu(\zeta)-\int \ln|\zeta-z|\,d\nu(\zeta),\ d=\text{const}.$$

Theorem 3. Let (E, F) be a regular condencer and Γ_1 and Γ_2 be as in the lemma and consist of a finite number of Jordan curves lying exterior each other. Let $\alpha=\{a_{nk}\}\subset\Gamma_1$, $\beta=\{b_{nk}\}\subset\Gamma_2$. Then (α, β) is the

best set of interpolation for the class $A(D)$ if and only if for every arc $L_1 \subset \Gamma_1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(L)}{n} = \int_{L_1} d\mu(\zeta) = \mu(L_1)$$

and for every arc $L_2 \subset \Gamma_2$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(L)}{n} = \int_{L_2} d\,\nu(\zeta) = \nu(L_2)\,.$$

$N_n(L_1)$ is the number of all points of the set $\{a_{n1}, \ldots, a_{nn}\}$ belonging to L_1 and $N_n(L_2)$ is the number of all points of the set $\{b_{n1}, \ldots, b_{nn}\}$ belonging to L_2.

Theorem 4. Let E, F, Γ_1, Γ_2, α and β be as in theorem 3. Then (α, β) is the best set of interpolation for the class $A(D)$ if and only if

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln \frac{z-a_{nk}}{z-b_{nk}} = \frac{1}{c}\,|u(z)-d|,$$

where d is a constant, holds almost uniformly in R.