ЛИНЕЙНА ИНТЕРПОЛАЦИЯ НА СЛАБОСТАЦИОНАРЕН СЛУЧАЕН ПРОЦЕС

Елисавета Илиева Панчева

В настоящата работа се разглежда оптималната линейна интерполация на слабостационарен случаен процес $\xi(t)$ с ограничен спектър с помощта на случайната редица $\xi(t_n)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2$, където моментите на наблюдение $\{t_n\}$ образуват стационарен точков процес, независим от $\xi(t)$.

§ 1. Увод

Нека $[\Omega, \mathbf{A}, P]$ е вероятностно пространство с дефиниран върху него случаен слабостационарен процес с ограничен спектър $\xi(t, \omega) = \xi(t)$, $t \in R_1$. Ако $\{t_n\}$ е точкова редица от R_1, то с H_f да означим затворената в L_2 линейна обвивка на $\xi(t_n)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Тогава най-добрата средноквадратична оценка на ξ чрез редицата $\xi(t_n)$ е този елемент $\tilde{\xi}$ на H_f, за който разсейването

$$\sigma^2 = E|\xi - \tilde{\xi}|^2 \tag{1.1}$$

е минимално. От теорията на хилбертовите пространства е известно [1], че задачата за намиране на елемента $\tilde{\xi} \in H_f$, удовлетворяващ (1.1), винаги има решение и то единствено. $\tilde{\xi}$ се явява проекция на ξ в H_f и може да се определи от системата уравнения:

$$\langle \xi - \tilde{\xi}, h \rangle = 0 \quad \text{за } h \in H_f.$$

Като дефинираме скаларно произведение в H_f чрез $\langle h_1, h_2 \rangle = Eh_1 . h_2$, h_1 и $h_2 \in H_f$, горната система приема вида

$$E\xi(t) . \xi(t_n) = E\tilde{\xi}(t) . \xi(t_n), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{1.2}$$

Решаването на системата (1.2) води до сложни интегрални уравнения. Проблемът за линейната интерполация в цялата си общност остава все още нерешен. Частни случаи са разглеждани от много автори, например Гихман-Скороход в [1], Розанов в [2], Ленеман в [6] и др.

Задачата за линейната интерполация на слабостационарен случаен процес $\xi(t)$ с ограничен спектър чрез редицата $\xi(t_n)$, където моментите

на наблюдение $\{t_n\}$ образуват стационарен точков процес, се състои в намиране на детерминарна функция $h(t)$, такава, че

$$\tilde{\xi}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(t-t_n)\xi(t_n) \tag{1.3}$$

да представлява най-добра средно квадратична оценка на $\xi(t)$. Тогава (1.1) приема вида

$$E\,\xi(t)-\tilde{\xi}(t)^2 = E\,\xi(t)^2 - E\,\tilde{\xi}(t)^2.$$

С други думи, за да бъде $\tilde{\xi}(t)$ най-добрата средно квадратична оценка, е необходимо и достатъчно да удовлетворява условието

$$E\,\tilde{\xi}(t)^2 = E\,\xi(t).\tilde{\xi}(t). \tag{1.4}$$

Използвайки свойствата на делта-функцията на Дирак, (1.3) можем да запишем и във вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t-u)\,s(u)du, \quad \text{където} \tag{1.5}$$

$$s(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi(t_n)\,\delta(u-t_n) \tag{1.6}$$

е импулсен процес, приемащ стойности $\xi(t_n)$ в моментите на наблюдение t_n. Като заместим (1.5) в (1.4), получаваме еквивалентно условие за оптималност:

$$E\tilde{\xi}(t).\,s(u) = E\xi(t).\,s(u). \tag{1.7}$$

За да решим поставената задача за намиране на $h(t)$, е необходимо да се запознаем с някои свойства на импулсния процес (1.6).

§ 2. Спектрален анализ на импулсния процес

Нека $[\Omega', A', P']$ е вероятностно пространство с независима от A σ-алгебра A'. Върху него нека е зададена случайната редица τ_n, $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, чиито членове с вероятност 1 са неотрицателни случайни величини.

Дефиниция 2.1. Случайната редица t_n, $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, дефинирана

$$t_n = \begin{cases} \tau_0 + \sum_{1}^{n} \tau_k & \text{за } n \geq 1, \\ \tau_0 & \text{за } n = 0, \\ \tau_0 - \sum_{n}^{-1} & \text{за } n \leq -1, \end{cases}$$

ще наричаме случаен точков процес.

С $N(t, x)$ да означим броя на точките от случайния точков процес $\{t_n\}$, попадащи в интервала $(t, t+x)$. Очевидно $N(t, x)$ е A'-измерима случайна величина.

Дефиниция 2.2. Случайния точков процес $\{t_n\}$ ще наричаме стационарен, ако за всеки краен набор $x_1, \ldots, x_n$ и $t_1, \ldots, t_n$ реални и $k_1, \ldots, k_n$ цели числа и произволна h, $P[\bigcap_{j=1}^{n} N(t_j, x_j) = k_j'] = P[\bigcap_{j=1}^{n} N(t_j + h, x_j) = k_j'']$.

Случайната величина $N(t, x)$ очевидно удовлетворява равенството $N(t, x+y) = N(t, x) + N(t+x, y)$, откъдето $EN(t, x+y) = EN(t, x) + EN(t+x, y)$. Когато $\{t_n\}$ е стационарен точков процес, $EN(t, x) = f(x)$ очевидно е функция само от дължината x на интервала $(t, t+x]$ и не зависи от t. Ако $EN(t, x) < \infty$, единственото решение на функционалното уравнение $f(x+y) = f(x) + f(y)$ е $f(x) = \text{const}.x$. Нека означим тази константа с β. Тогава можем да напишем

$$EN(t, x) = \beta . x, \tag{2.1}$$

при условие че математическото очакване съществува.

В [3] е посочено необходимото и достатъчно условие за съществуването на краен момент от n-ти ред на $N(t, x)$, като от доказаните там теореми става интуитивно ясно, че β има смисъл на средно число точки за единица време.

Нека $\{t_n\}$ е стационарен точков процес, F_t σ-алгебрата, спрямо която всички t_n са измерими, а $\xi(t)$ — слабостационарен случаен процес, независещ от случайната редица $\{t_n\}$. Тогава процеса $s(t)$, дефиниран с $s(t) = \sum_{n} \xi(t_n)\delta(t - t_n)$, $t \in R_1$, ще наричаме импулсен.

Лема 2.1. Импулсният процес $s(t)$ е слабостационарен.

Доказателство. Трябва да покажем, че

а) $$E\, s(t) = \text{const};$$

б) $$R_s(t+\tau, t) = E\, s(t+\tau) . s(t) = R_s(\tau).$$

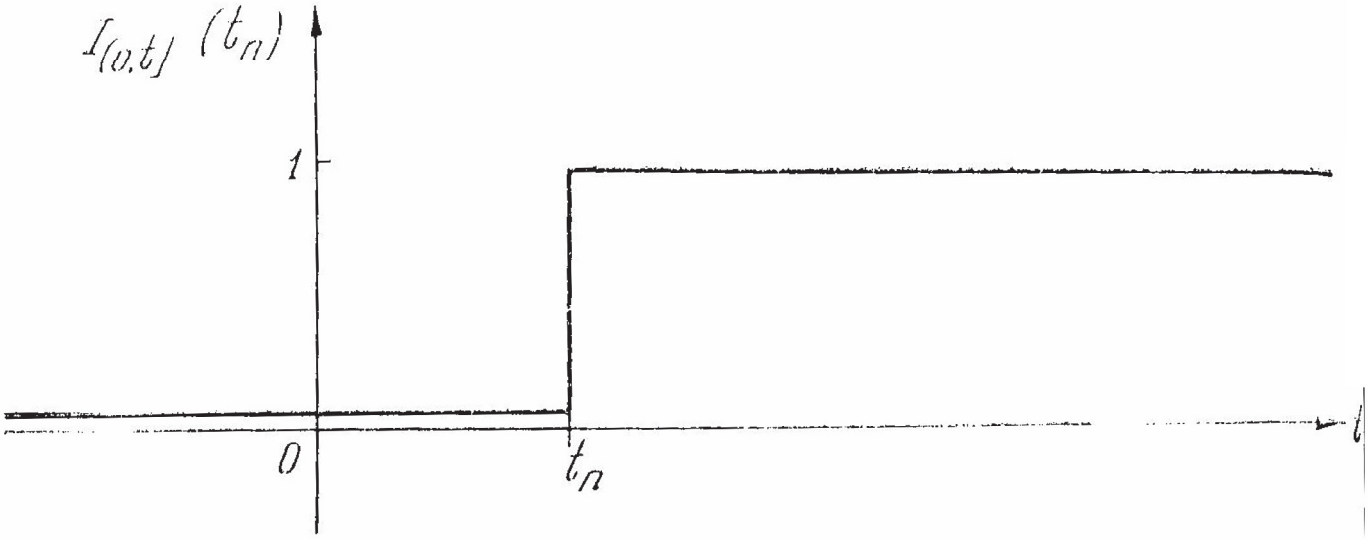
Действително

$$\mathrm{E}\, s(t) = \mathrm{E} \sum_n \mathrm{E}[\xi(t_n)\, \delta(t-t_n)\, \mathrm{F}_t]$$

(2.2)
$$= \mathrm{E} \sum_n \alpha \,.\, \delta(t-t_n)$$

$$= \alpha \,.\, \beta$$

където $\alpha = \mathrm{E}\xi(t)$, а β е средното число точки в единица интервал на редицата $\{t_n\}$. Ще покажем, че използваното в (2.2) равенство $\mathrm{E} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-t_n) = \beta$ е вярно. За тази цел нека припомним, че $\delta(t-t_n)$ се явява първа производна на индикаторната функция $I_{(0,t]}(t_n)$, разглеждана като функция от t (фиг. 1).



Фиг. 1

$$I_{(0,t]}(t_n) = \begin{cases} 1 & \text{за } t \geq t_n, \\ 0 & \text{за } t < t_n. \end{cases}$$

Тогава

$$\mathrm{E} \sum_n \delta(t-t_n) = \mathrm{E} \sum_n \frac{d}{dt} I_{(0,t]}(t_n)$$

(2.3)
$$= \frac{d}{dt} \mathrm{E} \sum_n I_{(0,t]}(t_n) = \frac{d}{dt} \mathrm{E}\, N(0,t) = \beta,$$

тъй като $\mathrm{E}N(0, t)$ според (2.1) е равно на $\beta . t$. Това ще използуваме и при доказателството на б):

$$\mathrm{E}\, s(t+\tau) . s(t) = \mathrm{E} \sum_{n, m}{}' \xi(t_n) \xi(t_m) \delta(t+\tau-t_n) \delta(t-t_m) \tag{2.4}$$

$$= \mathrm{E} \sum_{n, m}{}' \mathrm{E}[\xi(t_n) . \xi(t_m) / \mathrm{F}_t] \delta(t+\tau-t_n) \delta(t-t_m)$$

$$= \mathrm{E} \sum_{n, m}{}' R_\xi(t_n - t_m) \delta(\tau+t_m-t_n)$$

$$= R_\xi(\tau) \mathrm{E} \sum_{n, m}{}' \delta(\tau+t_m-t_n)$$

$$= R_\xi(\tau) \mathrm{E} \sum_{n}{}' \delta(\tau+\eta_n-t_n)$$

$$= R_\xi(\tau) \frac{d}{d\tau} \mathrm{E} \sum_{n}{}' I_{(\eta_n, \eta_n+1)}(t_n)$$

$$= R_\xi(\tau) \frac{d}{d\tau} \mathrm{E} N_{(0, t)} = \beta . R_\xi(\tau).$$

За всяко n съществува случайна величина η_n, която се определя от равенството $\sum_{m}{}' \delta(\tau+t_m-t_n) = \delta(\tau+\eta_n-t_n)$.

С това лемата е доказана, тъй като R_ξ е функция само от τ.

Аналогично можем да изчислим и взаимнокорелационната функция $R_{\xi s}$ на $\xi(t)$ и $s(t)$. Действително

$$\mathrm{E}\xi(t) . s(t+\tau) = \mathrm{E} \sum_{n}{}' \mathrm{E}[\xi(t) . \xi(t_n) / \mathrm{F}_t] \delta(t+\tau-t_n) \tag{2.5}$$

$$= \mathrm{E} \sum_{n}{}' R_\xi(t-t_n) \delta(t+\tau-t^n)$$

$$= R_\xi(\tau) \mathrm{E} \sum_{n}{}' \delta(t+\tau-t_n)$$

$$= \beta . R_\xi(\tau).$$

От спектралното представяне на горните корелационни функции

(2.6) $$R_s(\tau)=\int e^{i\lambda\tau}F_s(d\lambda)$$

и

$$R_{\xi s}(\tau)=\int e^{i\lambda\tau}F_{\xi s}(d\lambda)\ ,$$

където F_s и $F_{\xi s}$ са съответните спектрални мярки, и използувайки (2.4) и (2.5), извличаме следните равенства:

(2.7) $$F_s(\lambda)=\beta\,.\,F_\xi(\lambda),$$

$$F_{\xi s}(\lambda)=\beta\,.\,F_\xi(\lambda),$$

представляващи основен резултат на тази глава

§ 3. Линейна интерполация на слабостационарен случаен процес, когато моментите на наблюдение образуват стационарен точков процес

Задачата, която си поставихме в началото, е намирането на функцията $h(t)$, така че оценката $\tilde{\xi}(t)=\sum_n h(t-t_n)\,.\,\xi(t_n)$ да бъде оптимална. Необходимо и достатъчно условие за това е условието (1.7). Тъй като $R_{\tilde{\xi}s}(t)=\int h(t-u)R_s(u)\,du$, то $R_{\xi s}(t)$ от (1.7) може да бъде представена като композиция на $h(t)$ и R_s, т. е.

(3.1) $$R_{\xi s}(t)=\int h(t-u)R_s(u)\,du.$$

От теорията на линейните преобразувания в хилбертови пространства е известно, че ако една функция е композиция на други две, то нейната трансформация на Фурие е равна на произведението от фуриеровите трансформации на двете функции.

Ако означим с $H(\lambda)$ фуриеровата трансформация на $h(t)$, то от (3.1) следва

(3.2) $$H(\lambda)=\frac{F_{\xi s}(\lambda)}{F_s(\lambda)}\ .$$

Намерените в § 2. изрази за $F_s(\lambda)$ и $F_{\xi s}(\lambda)$ заместваме в (3.2) и получаваме $H(\lambda)=1$. Оттук определяме търсената функция

(3.3) $$h(t)=\frac{1}{2\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha}e^{-i\lambda t}H(\lambda)\,d\lambda=\frac{\sin\alpha t}{\alpha t}\ ,$$

където $(-\alpha, \alpha)$ е интервалът, в който е ограден спектърът на слабостационарния случаен процес $\xi(t)$. Така за най-добра в L_2-смисъл оценка на $\xi(t)$ получаваме оценката

$$\tilde{\xi}(t) = \sum_n \frac{\sin \alpha (t - t_n)}{\alpha (t - t_n)} \cdot \xi(t_n), \tag{3.4}$$

при условие че редът е сходящ. По своя вид тя напомня интерполационната формула от теоремата на Шенон — Котелников:

$$\tilde{\xi}(t) = \sum_n \frac{\sin \alpha \left(t - \frac{\pi}{\alpha} n\right)}{\alpha \left(t - \frac{\pi}{\alpha} n\right)} \xi\left(\frac{\pi}{\alpha} n\right). \tag{3.5}$$

Действително, когато $t_n = n \frac{\pi}{\alpha}$, то (3.4) се превръща в (3.5).

Накрая нека се спрем на въпроса за сходимостта на реда в (3.4). Ще използуваме доказаната от К. Яо и Б. Томас в [7] лема:

Лема 3.1. Ако редицата $\{t_n\}$ от точки на R_1 образува R-множество, т. е. удовлетворява условията

а) $t_n - n \leq L, \quad -\infty < n < \infty, \quad 0 < L < \infty,$

б) $t_n - t_m > d, \; 0 < d < \infty,$

то съществува константа $c < \infty$, така че

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{t_n} = c.$$

Когато $\{t_n\}$ образува стационарен точков процес, очевидно е, че условията а) и б) са изпълнени, тъй като $\{t_n\}$ няма крайна точка на сгъстяване. С други думи, всеки стационарен точков процес с вероятност 1 представлява R-множество.

Теорема 3.1. Когато $\xi(t)$ е слабостационарен случаен процес, а моментите на наблюдение $\{t_n\}$, независещи от процеса, образуват стационарен точков процес, редът

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha (t - t_n)}{\alpha (t - t_n)} \cdot \xi(t_n)$$

е сходящ в L_2-смисъл.

Доказателство.

$$E\left(\sum_{k=-n}^{n}\frac{\sin\alpha(t-t_k)}{\alpha(t-t_k)}\cdot\xi(t_k)\right)^2$$

$$=E\sum_{k=-n}^{n}\frac{\sin^2\alpha(t-t_k)}{\alpha^2(t-t_k)^2}\cdot\xi(t_k)\xi(t_k)$$

$$+E\,2\sum_{\substack{k,j=-n\\k<j}}^{n}\frac{\sin\alpha(t-t_k)\sin\alpha(t-t_j)}{\alpha^2(t-t_k)(t-t_j)}\xi(t_k)\cdot\xi(t_j)$$

$$=\frac{R_\xi(0)}{\alpha^2}E\sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{(t-t_k)^2}$$

$$+\frac{R_\xi(0)}{\alpha^2}E\,2\sum_{\substack{k,j=-n\\k<j}}^{n}\frac{1}{(t-t_k)(t-t_j)}$$

$$=\frac{R_\xi(0)}{\alpha^2}E\left|\sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{(t-t_k)}\right|^2\to\text{const}\quad\text{за}\quad n\to\infty,$$

тъй като $\{t_n\}$ образува R-множество.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гихман, И. И., А. В. Скороход: Введение в теорию случайных процессов Изд. Наука, Москва, 1965.
2. Розанов, Ю. А.: Стационарные процессы. Гос. изд. физ.-мат. лит., Москва, 1963.
3. Beutler, F. J., O. A. Z. Leneman: The theory of stationary point processes. Acta Math., 116 (1966), 159—197.
4. Leneman, O. A. Z.: Random sampling of random processes: impulse processes. Inform. and control, 9 (1966), 347—363.
5. Beutler, F. J., O. A. Z. Leneman: The spectral analysis of impulses processes. Inform. and control, 12 (1968), 236—258.
6. Leneman, O. A. Z.: Random sampling of random processes: optimum linear interpolation. J. Franklin Inst., 281 (1966), 302—314.
7. Yao, K., J. B. Thomas: On a class of non-uniform sampling representations for band-limited signals. Sympos. signal transmiss. and process, N. J., 1965.

Постъпила на 9. XI. 1972 г.

LINEARE INTERPOLATION EINES SCHWACHSTATIONÄREN ZUFALLSVORGANGS

E. I. Pantschewa

(ZUSAMMENFASSUNG)

Es wird die lineare Interpolation eines schwachstationären Zufallsvorgangs $\xi(t)$ mit beschränktem Spektrums durch eine Folge $\xi(t_n)$ behandelt, wobei die Beobachtungszeitpunkte $\{t_n\}$ einen stationären Punktvorgang bilden, der vom betrachteten Vorgang ξ unabhängig ist. Es wurde die Spektralanalyse eines Impulsvorgangs von der Form $s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\xi(t_n)\,\delta(t-t_n)$ durchgeführt, worin $\delta(t)$ die Diracsche Deltafunktion ist. Mit Hilfe dieses Vorgangs ist die optimale im L_2-Sinne Abschätzung $\tilde{\xi}(t)$ von $\xi(t)$ aufgestellt:

$$\tilde{\xi}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\sin\alpha(t-t_n)}{\alpha(t-t_n)}\,\xi(t_n).$$