ПРИМЕР ПОЛИЭДРА, КОГОМОЛОГИИ КОТОРОГО НЕ ИЗОМОРФНЫ ОБРАТНОМУ ПРЕДЕЛУ КОГОМОЛОГИЙ ЕГО КОНЕЧНЫХ ПОДПОЛИЭДРОВ

Станислава В. Петкова

Пусть $\check{H}^*$ — когомологии Александрова-Чеха, а X — локально компактное пространство (по всем компактным $C \subset X$). Известно, что естественное отображение $\varphi^*: \check{H}^*(X) \to \varprojlim \check{H}^*(C)$, порожденное вложениями C в X, является эпиморфизмом. Однако ядро этого отображения, вообще говоря, не равно нулю.

Настоящим примером показывается, что φ^* может быть не мономорфно даже и в том случае, когда X — локально конечный полиэдр.

Для построения такого полиэдра воспользуемся одной леммой Милнора [1]. Заметим сначала, что на категории CW-комплексов и их непрерывных отображений когомологии Александрова — Чеха — это обычные когомологии H^*. Пусть $K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \ldots$ последовательность CW-комплексов и $K = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$. Обозначим через $d_n: \prod_{i=1}^{\infty} H^n(K_i) \to \prod_{i=1}^{\infty} H^n(K_i)$ гомоморфизм, заданный формулой

$$d_n(h_1, h_2, h_3, \ldots) = (h_1 - i_1^* h_2, h_2 - i_2^* h_3, h_3 - i_3^* h_4, \ldots),$$

где $i_k^*: H^n(X_{k+1}) \to H^n(X_k)$ — гомоморфизм, индуцированный вложением $i_k: X_k \to X_{k+1}$.

Лемма (Милнор). Короткая последовательность

$$0 \to \prod_{i=1}^{\infty} H^{n-1}(K_i) / \operatorname{Im} d_{n-1} \to H^n(K) \xrightarrow{\varphi^n} \varprojlim H^n(K_i) \to 0$$

точна.

Пусть p — произвольное натуральное число, $p \neq 1$, а $f: S^1 \to S^1$ — отображение окружности в себя, заданное формулой $f(z) = z^p$. Обозначим для каждого натурального числа s через M_s цилиндр отображения f, а через M — локально конечный полиэдр, по-

лученый из последовательности $\{M_s\}_{s=1}^{\infty}$ посредством склеивания верхнего основания каждого цилиндра с нижным основанием следующего за ним цилиндра по тождественному отображению S^1 в S^1.

Покажем, что отображение $\varphi^2: H^2(M) \to \lim H^2(C)$ (по компактным C) не мономорфно.

Рассмотрим для этой цели последовательность

$$(1) \qquad M_1 \subset M_1 \cup M_2 \subset M_1 \cup M_2 \cup M_3 \subset \ldots \subset M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup \ldots \cup M_k \subset \ldots$$

конечных подполиэдров в M, определяющих конфинальную часть среди всех компактных подмножеств в M. Так как каждый из этих полиэдров стягивается в S^1, а отображение f закручивает нижнюю окружность каждого цилиндра p раз вокруг верхней окружности, то для каждого $k \geq 1$, $H^1(M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_k) = Z$, а $i_k^*: H^1(M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_{k+1}) \to H^1(M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_k)$ — умножение на p (i_k — вложение $M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_k$ в $M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_{k+1}$). Таким образом, когомологии подполиэдров из (2) образуют последовательность

$$Z \xleftarrow{i_1^*} Z \xleftarrow{i_2^*} Z \xleftarrow{i_3^*} Z \xleftarrow{i_4^*} \ldots ,$$

где, для каждого целого n, $i_k^*(n) = p \cdot n$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

По лемме Милнора короткая последовательность

$$0 \to \prod_{k=1}^{\infty} Z / \operatorname{Im} d_1 \to H^2(M) \to \lim H^2(M_1 \cup \ldots \cup M_k) \to 0$$

точна. Здесь $d_1: \prod_{k=1}^{\infty} Z \to \prod_{k=1}^{\infty} Z$ задается формулой

$$d_1(h_1, h_2, h_3, \ldots) = (h_1 - ph_2,\ h_2 - ph_3,\ h_3 - ph_4, \ldots).$$

Покажем, что d_1 — не эпиморфно. Действительно, рассмотрим элемент $(1, 1, 1, \ldots) \in \prod_{k=1}^{\infty} Z$. Прообразы этого элемента при гомоморфизме d_1 — это все наборы $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ целых чисел, для которых выполнены равенства

$$(2) \qquad n_k - pn_{k+1} = 1, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Но легко показать, что рассматриваемая бесконечная система не имеет решения в целых числах. Действительно, из (2) получаем, что для каждого k

$$n_k = \frac{n_1(p-1) + 1 - p^{k-1}}{(p-1)\,p^{k-1}},$$

т. е. для каждого k, $n_1(p-1) + 1$ должно делиться на p^{k-1} (для того

чтобы n_k, $k=1, 2, 3, \ldots$ были целыми). Но тогда $n_k = \frac{1}{1-p}$ для каждого k, т. е. единственное решение системы (2) не принадлежит группе $\prod_{k=1}^{\infty} Z$. Таким образом показано, что $(1, 1, 1, \ldots) \notin \operatorname{Im} d_1$, т. е. группа $\prod_{k=1}^{\infty} Z_{\operatorname{Im} d_1} \neq 0$. Остается напомнить что последовательность (1) определяет конфинальную часть среди всех компактных подмножества в M и, следовательно, $\operatorname{Ker} \varphi^2 = \prod_{k=1}^{\infty} Z_{\operatorname{Im} d_1}$. Поэтому $\operatorname{Ker} \varphi^2 \neq 0$. Заметим еще, что группа $H^2(M) = \prod_{k=1}^{\infty} Z_{\operatorname{Im} d_1}$ $(H^2(M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_k) = 0$ для каждого $k)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Milnor, J.: On axiomatic homology theory. Pacific J. Math, 12 (1962), № 1, 337—341.

Поступила на 11. XI. 1972 г.

AN EXAMPLE OF A COMPLEX THE COHOMOLOGY GROUPS OF WHICH ARE NOT ISOMORPHIC TO THE INVERSE LIMIT OF THE COHOMOLOGY GROUPS OF ITS FINITE SUBCOMPLEXES

S. Petkova

(SUMMARY)

An example is given of a complex M for which the natural homomorphism $\varphi^2: H^2(M) \to \varprojlim H^2(C)$ $(C \subset X,\ C$ — compact) is not a monomorphism.