НЕПРЕРЫВНОСТЬ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ И ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ

Петър С. Кендеров

Пусть E — локально выпуклое пространство и пусть $\varphi: E \to R$ — непрерывная выпуклая действительная функция. Градиент ∂ этой функции является многозначным отображением пространства E в сопряженное пространство E'. Моро доказал [5], что отображение $\partial: E \to E'$ полунепрерывно сверху, если наделить E' топологией простой сходимости. Из теоремы Форта [9] (при соответствующих предположениях относительно пространства E) следует, что отображение ∂ полунепрерывно снизу в некоторых точках пространства E. Оказывается, что во всех этих точках выпуклая функция φ должна быть дифференцируемой в смысле Гато.

§ 1. Многозначные отображения

(1. 1) Определение. Многозначное отображение $F: X \to Y$ топологического пространства X в топологическое пространство Y называется полунепрерывным сверху (снизу) в точке $x_0 \in X$, если для всякого открытого множества $U \supset F(x_0)$ $(U \cap F(x_0) \neq \emptyset)$ существует такая окрестность $V \ni x_0$, что из $x \in V$ следует $F(x) \subset U$ $(F(x) \cap U \neq \emptyset)$.

(1. 2) Теорема (Форт [9]). Пусть $F: X \to Y$ — многозначное полунепрерывное сверху (снизу) отображение топологического пространства X в метризуемое пространство Y и пусть $F(x) \subset Y$ компактно для каждого $x \in X$. Тогда множество точек $x \in X$, в которых отображение F не полунепрерывно снизу (сверху), есть множество первой категории в X (т. е. является объединением счетного числа нигде не плотных в X множеств).

(1. 3) Замечание. В случае, когда пространство Y метризуемо и компактно, а X метризуемо, этот результат вытекает из того, что отображение F является отображением класса I (Куратовский [11], следствие 1, § 43).

Для полунепрерывных сверху многозначных отображений теорему Форта можно несколько усилить:

(1. 4) Теорема. Пусть $F: X \to Y$ полунепрерывное сверху многозначное отображение топологического пространства X в топологическое пространство Y и пусть $F(x) \subset Y$ компактно для каждого $x \in X$. Тогда, если в Y существует более слабая метризуемая топология, то

множество тех точек $x \in X$, в которых отображение F не полунепрерывно снизу, есть множество первой категорий в X.

Доказательство. Обозначим через τ топологию Y, а через ρ — τ метризуемую топологию в Y. Пусть в точке $x_0 \in X$ отображение F не полунепрерывно снизу. Тогда существуют такие точка $y_0 \in F(x_0)$ и открытое множество $O \ni y_0$, что всякая окрестность $U \ni x_0$ содержит элемент $x_u \in U$, для которого $F(x_u) \cap O = \emptyset$. Положим $B_V = U \subset V(x_u)$, где V — произвольная окрестность точки x_0.

(1. 5) Лемма. Пусть ξ — фильтр с базисом $\{B_V\}_V$, где V пробегает систему окрестностей точки x_0, и пусть $\hat{\xi}$ — ультрафильтр, мажорирующий ξ. Тогда $\hat{\xi}$ сходится к некоторой точки из $F(x_0)$.

Доказательство леммы. Предположим, что это не так. Тогда для каждой точки $y \in F(x_0)$ существует окрестность $Oy \in \hat{\xi}$. Выберем конечное покрытие $\bigcup_{i=1}^{k} Oy_i \supset F(x_0)$. В силу полунепрерывности сверху отображения F существует такая окрестность $V \ni x_0$, что $F(x) \subset \bigcup_{i=1}^{k} Oy_i$ как только $x \in V$. Очевидно $B_V \subset \bigcup_{i=1}^{k} Oy_i$. Следовательно $\bigcup_{i=1}^{k} Oy_i \in \hat{\xi}$. Но тогда ультрафильтр $\hat{\xi}$ содержит хотя бы одно слагаемое объединения $\bigcup_{i=1}^{k} Oy_i$, что невозможно. Лемма (1.4) доказана.

Рассмотрим, теперь, множество* $C = \bigcap_{B \in \xi} B^{\tau}$. Оно не пусто (это следует из леммы (1.5)) и содержится в $F(x_0)$, ибо к любой точке $y \in C$ сходится некоторый ультрафильтр, мажорирующий ξ. Множество C компактно (как замкнутое подмножество $F(x_0)$) и не содержит точку y_0 ($B_V^{\tau} \cap O = \emptyset$ для каждой окрестности $V \ni x_0$). Значит, оно компактно и в более слабой метризуемой топологии ρ. Тогда найдутся ρ — открытые множества $W_1 \ni y_0$ и $W_2 \supset C$ такие, что $W_1 \cap W_2 = \emptyset$. Заметим, что $W_2 \in \xi$, ибо иначе существует ультрафильтр $\hat{\xi} \supset \xi \cup (Y \setminus W_2)$, который был бы должен сходится к некоторой точке $y \in C \cap (Y \setminus W_2) = \emptyset$. Значить некоторое множество $B_V \subset W_2$. Тогда $B_V \cap W_1 \subset W_2 \cap W_1 = \emptyset$. Так как $W_1 \ni y_0$, то это означает, что отображение $F: X \to (Y, \rho)$ не полунепрерывно снизу в точке $x_0 \in X$. Из теоремы (1.2) следует, что множество таких точек есть множество первой категории в X. Теорема (1. 4) доказана.

(1. 6) Замечание. В конце § 2 дан пример, из которого следует, что теорема (1.4) не верна, если в пространстве Y нет более слабой метризуемой топологии.

* B^{τ} — замыкание множества B в топологии τ.

§ 2. Дифференцируемость выпуклых функций

Применим, теперь, результаты § 1 к изучению дифференцируемости в смысле Гато [4] выпуклых функций.

Пусть E — отделимое локально выпуклое пространство [3] над полем действительных чисел R. Через E', как обычно, будем обозначать сопряженное к E пространство (т. е. множество всех непрерывных линейных отображений $E \to R$). Значение функционала $y \in E'$ в точке $x \in E$ будем обозначать через $<x, y>$.

Пусть $U \subset E$ — открытое выпуклое подмножество E и $\varphi: U \to R$ выпуклая непрерывная функция. Будем называть функционал $y \in E'$ опорным к φ в точке $x_0 \in U$, если $\varphi(x) - \varphi(x_0) \geq <x - x_0, y>$ для всех $x \in U$. Множество всех опорных к φ в точке x_0 функционалов будем обозначать через $\partial(x_0)$. Будем пользоваться следующим критерием дифференцируемости в смысле Гато выпуклой функции [8], [6]:

(2.1) Предложение. Выпуклая непрерывная функция $\varphi: U \to R$ тогда и только тогда дифференцируема по Гато в точке $x_0 \in U$, когда множество $\partial(x_0)$ состоит ровно из одного элемента.

Пусть F — какое-нибудь подмножество E. Каждый элемент $x_0 \in F$ определяет линейный функционал $<x_0, y>: E' \to R$. Через $\sigma(E', F)$ будем обозначать слабейшую топологию в E', относительно которой непрерывны все функционалы $<x_0, y>: E' \to R$, где $x_0 \in F$.

Дальнейшие рассуждения будут опираться на следующее предложение:

(2.2) Предложение. Если F всюду плотное подмножество E и многозначное отображение $\partial: U \to (E', \sigma(E', F))$ полунепрерывно снизу в точке $x_0 \in U$, то выпуклая функция φ дифференцируема по Гато в этой точке.

Доказательство. В силу предложения (2.1) достаточно доказать, что множество $\partial(x_0)$ одноточечно. Предположим противное. Пусть $y_0, y_0 \in \partial(x_0)$ и $y_0 \neq y_0$. Так как множество F всюду плотно в E, то существует $h \in F$, для которого $\varepsilon = <h, y_0 - y_0> > 0$. Рассмотрим последовательность $x_n = x_0 + \frac{1}{n} h$; она стремится к x_0. Так как многозначное отображение ∂ полунепрерывно снизу в точке x_0 относительно $\sigma(E', F)$, то начиная с некоторого индекса n_0 $\partial(x_n) \cap \left\{ y \in E': <h, y_0 - y> < \frac{\varepsilon}{2} \right\} \neq \emptyset$. Выберем для $n \geq n_0$ $y_n \in \partial(x_n) \cap \left\{ y \in E': <h, y_0 - y> < \frac{\varepsilon}{2} \right\}$. Тогда $\varphi(x_n) - \varphi(x_0) \geq <x_n - x_0, y_0> = \frac{1}{n} <h, y_0>$ и $\varphi(x_0) - \varphi(x_n) \geq <x_0 - x_n, y_n> = \frac{1}{n} <h, -y_n>$. Из этих неравенств следует, что $0 \geq \frac{1}{n} (<h,$

$$y_0\rangle + \langle h, -y_n\rangle) = \frac{1}{n}(\langle h, y_0 - y_0\rangle + \langle h, y_0 - y_n\rangle) > \frac{1}{n}\left(\varepsilon - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{\varepsilon}{2n} > 0.$$

Предложение (2. 2) доказано.

(2.3) Теорема. Пусть локально выпуклое пространство E обладает счетной системой компактов $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$ объединение $F=\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$, которых всюду плотно в E. Пусть $\varphi: U \to R$ непрерывная выпуклая функция, определенная на открытом выпуклом множестве $U \subset E$. Тогда множество тех точек $x \in U$, в которых функция φ не дифференцируема по Гато, есть множество первой категории в U.

Доказательство. Введем в E несколько топологий. Через τ будем обозначать топологию равномерной сходимости на всех компактных подмножествах E, а через ρ топологию равномерной сходимости на всех K_i, $i=1, 2, \ldots$ Топология ρ метризуема и слабее топологии τ.

Как доказал Моро [5], отображение $\partial: U \to E'$ полунепрерывно сверху относительно топологии $\sigma(E', E)$. Более того из доказательства этого результата следует, что для каждой точки $x_0 \in U$ существует такая окрестность $O \ni x_0$, что множество $\partial(O) = \bigcup_{x \in O} \partial(x)$ равностепенно непрерывно. Следовательно, на этом множестве топология τ совпадает с топологией $\sigma(E', E)$ ([3]; глава III, § 2 предложение 5). Другими словами многозначное отображение $\partial: U \to (E', \tau)$ полунепрерывно сверху в каждой точке $x_0 \in U$. Из теоремы (1.4) следует, что отображение $\partial: U \to (E', \tau)$ будет полунепрерывным снизу во всех точках множества U за исключением, возможно, точек некоторого множества первой категории. Тогда отображение $\partial: U \to (E', \sigma(E', E))$ тоже будет полунепрерывным снизу во всех точках U за исключением множества первой категории. Чтобы доказать теорему (2.3), теперь достаточно применить предложение (2.2).

(2.4) Замечание. Теорема (2.3) сохраняет силу, если заменить условие компактности множеств K_i, $i=1, 2, \ldots$ более слабым условием предкомпактности.

(2.5) Замечание. Для пространств Банаха известен более сильный результат: множества K_i можно считать только $\sigma(E, E')$ — компактными (Асплунд [2], Амир и Линденстраус [1], Троянски [10]). Следует отметить, что результат Асплунда [2] может быть получен нашим методом только после некоторой модификации вышеприведенных рассуждений.

(2.6) Следствие (Мазур [7]). Пусть пространство E сепарабельно и пусть $\varphi: U \to R$ — непрерывная выпуклая функция, определенная на открытом выпуклом множестве $U \subset E$. Тогда функция φ дифференцируема по Гато во всех точках некоторого всюду плотного G_δ подмножества U.

(2.7) Пример. Укажем пример полунепрерывного сверху отображения, которое не полунепрерывно снизу нигде.

Пусть A — несчетное множество. Через $l_1(A)$, как обычно, будем обозначать множество всех функций $x=x(a)$ в A, для которых $x = \sum_{a \in A} x(a) < \infty$. Сопряженным к $l_1(A)$ является $m(A)$ — множество всех ограниченных в A фукций $x'=x'(a)$. Пространства $l_1(A)$ и $m(A)$ приводятся в двойственность билинейной функцией $\langle x, x' \rangle = \sum_{a \in A} x(a) \cdot x'(a)$. Рассмотрим норму $x = \sum_{a \in A} x(a)$. Это выпуклая непрерывная функция в $l_1(A)$. Она порождает многозначное отображение $\partial : l_1(A) \to m(A)$. Нетрудно увидеть, что $\partial(x) = \{x' \in S^0 : \langle x, x' \rangle = x\}$, где S^0 — единичная сфера в $m(A)$. Докажем, что множество $\partial(x)$ неодноточечно, каково бы ни было $x \in l_1(A)$. Действительно, пусть $x_0 = x_0(a) \in l_1(A)$ и $x' = x'(a) \in m(A)$ такие, что $x' \in \partial(x_0)$, т. е. $x' \in S^0$ и $\langle x_0, x' \rangle = x_0$. Так как множество A несчетно, то существует $a_0 \in A$ такое, что $x_0(a_0) = 0$. Рассмотрим в A новую функцию $x'(a)$, определенную следующим образом: $x'(a) = x'(a)$ для всех $a \in A \setminus \{a_0\}$; $x'(a_0)$ выберем так, чтобы $x'(a_0) \neq x'(a_0)$ и $x' \in S^0$. Тогда $x_0 = \langle x_0, x' \rangle = \langle x_0, x' \rangle$ и следовательно $x' \in \partial(x_0)$. Отсюда следует, что отображение $\partial : l_1(A) \to m(A)$ не полунепрерывно снизу относительно топологии $\sigma(m(A), l_1(A))$ (предложения (2.1) и (2.2)). С другой стороны, по теореме Моро [5] оно полунепрерывно сверху во всех точках относительно этой топологии.

Автор считает своим долгом поблагодарить С. Л. Троянского и В. А. Гейлера за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Amir, D. and Lindenstrauss, J.: The structure of weakly compact sets in Banach spaces. Ann. Math., 88 (1968), 35—46.
2. Asplund, E.: Fréchet differentiability of convex functions, Acta Math., 121 (1968), 31—47.
3. Бурбаки, Н.: Топологические векторные пространства. Москва, 1959.
4. Канторович, Л. В. и Акилов Г. П.: Функциональный анализ в нормированных пространствах. Москва, 1959.
5. Moreau, J. J.: Semi-continuité du sous-gradient d'une fonctionelle. C. R. Sc. Paris, 260 (1965), 1067—1070.
6. Moreau, J. J.: Sur la fonction polaire d'une fonction semi-continue supérieurement. C. R. Sc. Paris, 258 (1964), 1128—1130.
7. Mazur, S.: Über konvexe Mengen in linearen normierten Räumen. Studia Math., 4 (1933), 70—84.
8. Пшеничный, Б. Н.: Необходимые условия экстремума. Москва, 1969.
9. Fort, M. K.: Points of continuity of semi-continuous functions. Publ. Math. Debrecen, 2 (1951), 100—102.

10. Troyanski, S. L.: On locally uniformly convex and differentiable norms in certain non-separable Banach spaces. Studia Math., 37 (1971), 173—180.
11. Куратовский, К.: Топология. Москва, 1969.

Постьпила на 11. XI. 1973 г.

CONTINUITY OF MULTIVALUED MAPPINGS AND DIFFERENTIABILITY OF CONVEX FUNCTIONS

P. Kenderov

(SUMMARY)

The gradient ∂ of a real convex function $\varphi: E \to R$ (E is a locally convex space) is a multivalued mapping from the space E into E' (E' being the conjugate space). In [5] Moreau proved that the mapping $\partial: E \to E'$ is upper semi-continuous if E' is provided with the pointwise convergence topology $\sigma(E', E)$. It follows from the theorem of Fort [9] (under some conditions on E) that the mapping ∂ is lower semi-continuous almost everywhere (with the exception of a first category set). It turns out that at every point x of lower semi-continuity of the mapping ∂ $\partial(x)$ is a single point set and hence the convex function $\varphi: E \to R$ is differentiable at such a point.