О ВЕРБАЛЬНЫХ ИДЕАЛАХ СВОБОДНЫХ АЛГЕБР ЛИ

Георги К. Генов

В этой работе доказываются некоторые результаты, относящиеся к теории многообразий алгебр Ли над полем нулевой характеристики. Эта теория во многом похожа на теорию многообразий групп, хотя последняя продвинулась на много больше, чем первая.

Основная наша цель — доказать для многообразий алгебр Ли над полем нулевой характеристики результаты, аналогичные групповым результатам, полученным Данвуди [3] и автором [2].

В § 1 настоящей статьи рассматриваются свободные алгебры Ли над произвольным полем. Приведены некоторые важные результаты А. И. Ширшова из его работы [7], а также доказаны некоторые леммы, необходимые в дальнейшем.

В § 2 мы приводим некоторые известные результаты о многообразиях алгебр Ли.

Центральным в настоящей работе является § 3. Основным результатом, доказанным в этом параграфе, является следующая

Теорема. Пусть L — свободная алгебра Ли над полем P нулевой характеристики, имеющая бесконечное число свободных образующих. Если R и S — два ненулевые идеала в алгебре L, а V и $\bar{U}$ — собственные многообразия алгебр Ли над P такие, что $V(R)=U(S)$, то тогда существует многообразие W такое, что или $(i) R=W(S)$ и $\bar{U}=\bar{V}\bar{W}$ или $(ii) S=W(R)$ и $V=UW$.

Из этого результата вытекает результат В. А. Парфенова [6; теорема 1] о свободе полугруппы многообразий алгебр Ли над полем нулевой характеристики (см. следствие 3.5).

Здесь следует заметить, что аналогичный результат для групп был доказан автором в его работе [2; следствие 1.16].

Для доказательства применяется техника, подобная технике Данвуди в его групповой работе [3]. В ходе доказательства получен и следующий результат: если $\bar{U}$ и $\bar{V}$ — произвольные многообразия алгебр Ли над полем нулевой характеристики, а R и S — идеалы свободной алгебры Ли L, имеющей бесконечное число свободных образующих, то включение $V(R)\leqq U(S)$ влечет или $U\leqq V$, или $R\leqq S$. Для групп аналогичный результат доказан Данвуди [3; теорема 3.1].

В работе используются следующие обозначения:

(0)	— нулевой идеал некоторой алгебры Ли;
$\{Z_i,\ i \in I\}$	— алгебра Ли, порожденная некоторыми множествами элементов Z_i;
X_∞	— базовая алгебра Ли над основным полем (см. опр. 2.1);
$U,\ V,\ W$	— вербальные идеалы базовой алгебры X_∞;
$V(A)$	— вербальный идеал алгебры Ли A, соответствующий вербальному идеалу V в X_∞;
$U,\ V,\ W$	— многообразия алгебр Ли, отвечающие соответственно вербальным идеалам U, V и W в X_∞;
UV	— произведение многообразий алгебр Ли U и V;
$<z_i \quad i \in I>$	— множество элементов z_i, $i \in I$.

§ 1. Некоторые необходимые результаты о свободных алгебрах Ли

Пусть A — алгебра над некоторым полем P. Алгебра A называется алгеброй Ли, если в A выполняются тождества

$$x^2=0, \tag{1}$$

$$(xy)z+(yz)x+(zx)y=0. \tag{2}$$

Приведем некоторые определения и результаты из работы А. И. Ширшова [7].

Пусть F — свободная алгебра Ли над полем P с множеством свободных образующих $Y=<y_i \quad i \in I>$. Рассмотрим всевозможные слова произвольной длины от Y.

Определение 2.1. [7; определение 1]. Слова длины 1, то есть сами элементы множества Y, назовем правильными словами и произвольно упорядочим. Считая, что правильные слова, длины которых меньше n, $n>1$, уже определены и упорядочены при помощи отношения $\leqq$ так, что слова меньшей длины предшествуют словам большей длины, назовем слово w длины n правильным при выполнении условий:

1) $w=uv$, где u, v — правильные слова и $u>v$;

2) если $u=u_1\ u_2$, то $u_2 \leqq v$.

Определенные таким образом правильные слова длины n произвольно упорядочим и положим, что они больше правильных слов меньшей длины.

Определение 1.2. [7; определение 2] Пусть d — некоторое правильное слово. Назовем правильное слово w, $w>d$, d — разложимым, если $w=uv$ и $v>d$, и d — неразложимым в противном случае.

Определение 1.3. [7; определение 4] Говорят, что некоторое множество Z элементов свободной алгебры Ли F независимо, если Z

порождает в F свободную подалгебру и служит для нее системой свободных образующих.

1.4. [7; теорема 1] Правильные слова от Y при любом фиксированном способе их определения образуют базу алгебры F.

1.5. [7; лемма 3] Если d — произвольное правильное слово от Y в алгебре F, то множество всех d — неразложимых слов является независимым. т

1.6. [7; деорема 2] Всякая подалгебра B свободной лиевой алгебры F свобона.

Через F' будем обозначать коммутант лиевой алгебры F, то есть идеал, порожденный в F всевозможными произведениями ее элементов.

1.7. [1; предложение 1.2] Если F — свободная алгебра Ли, то любое множество элементов из F, которое линейно независимо по модулю коммутанта F', является независимым.

Если a и b — два элемента некоторой алгебры Ли, то мы положим $ab^0=a$ и $ab^k=(ab^{k-1})b$, где k — любое положительное целое число.

В дальнейшем нам понадобятся следующие три леммы.

Лемма 1.8. Пусть F — свободная некоммутативная алгебра Ли над некоторым полем P. Пусть R — идеал в F такой, что фактор-алгебра F/R — одномерна над P. Тогда в F существует множество свободных образующих $<z_1>\bigcup Z$ $(z_1 \in Z)$ такое, что R порождается как идеал в F множеством Z. Причем идеал R свободно порождается множеством элементов

$$T=<zz_1^k \mid z \in Z, \ k=0, 1, 2, \ldots>.$$

В частности, идеал R обладает бесконечным числом свободных образующих.

Доказательство. Пусть $Y=<y_i \mid i \in I>$ — множество свободных образующих алгебры F, а $\varphi: F \to F/R$ — естественный эпиморфизм. Ясно, что существует элемент y_{i_0} в Y такой, что $y_{i_0}\varphi \neq 0$. Но алгебра F/R одномерна и, поэтому, для некоторых элементов d_i поля P имеют место равенства $y_i\varphi=d_iy_{i_0}\varphi$ $(i \in I\setminus<i_0>)$. Положим $z_1=y_{i_0}$, $z_i=y_i-d_iy_{i_0}$ и $Z=<z_i \mid i \in I\setminus<i_0>>$. Множество $<z_1>\bigcup Z$ порождает алгебру F, так как элементы из Y выражаются через его элементы. Кроме того, это множество линейно независимо по модулю коммутанта F'. По предложению 1.7 множество элементов $<z_1>\bigcup Z$ является множеством свободных образующих для F. Множество Z содержится в идеале R и порождает в F идеал, фактор-алгебра по которому является одномерной. Следовательно, R совпадает с этим идеалом, то есть множество Z порождает R как идеал в F.

Упорядочим линейно множество Z и положим $z_1<z$ для любого $z \in Z$. Тогда, как легко видеть, множество элементов T является множеством правильных z_1-неразложимых слов от элементов множества $<z_1>\bigcup Z$. По лемме 1.5, множество T является независимым. Нам

остается показать, что подалгебра S, порожденная множеством T, совпадает с идеалом R. Для этого достаточно показать, что S является идеалом в F. Пусть w — любое T — слово. Индукцией по длине T — слова w легко получается, что элемент wz_1 содержится в S, то есть подалгебра S допустима относительно внутреннего дифференцирования adz_1. Тогда, поскольку Z содержится в S, то S допустима относительно внутренних дифференцирований всех образующих алгебры F, то есть S является идеалом в F. Лемма доказана.

Следствие 1.9. Любой ненулевой собственный идеал в свободной алгебре Ли над произвольным полем имеет бесконечное число свободных образующих.

Доказательство. Пусть R — ненулевой собственный идеал в свободной алгебре Ли G. Свободная алгебра G некоммутативна (в противном случае она не обладала бы ненулевыми собственными идеалами). Пусть g — произвольный элемент алгебры G, не содержащийся в R. Обозначим через F подалгебру в G, порожденную элементом g и всеми элементами идеала R. По теореме 1.6, подалгебра F — свободна. Для F и R выполняются все условия предыдущей леммы. Следовательно, идеал R обладает бесконечным числом свободных образующих.

Лемма 1.10. Пусть F, R и множество $<z_1>\bigcup Z$ такие же, как и в предыдущей лемма. Пусть элемент f алгебры F не содержится в идеале R, а Z' — такое подмножество множества Z, что элемент f содержится в подалгебре $\{z_1, Z'\}$, порожденной множеством $<z_1>\bigcup Z'$. Тогда множество элементов

$$T_1=<z'z_1^k,\ z''f^s\ \ z'\in Z',\ z''\in Z''=Z\backslash Z',\ k,\ s=0,1,\ldots>$$

является множеством свободных образующих идеала R.

Доказательство. Очевидно, что $f=\alpha z_1+h$, где $0\neq\alpha\in P$, а элемент h содержится в подалгебре $\{z_1, Z'\}\bigcap R$. Легко видеть, что достаточно доказать лемму в случае, когда $\alpha=1$. Поэтому мы будем считать, что $\alpha=1$ и $f=z_1+h$. Тогда множество T_1 по модулю коммутанта R' совпадает с множеством T. Но множество T по модулю коммутанта R' является линейно независимым, то есть, по предложению 1.7, множество T_1 — независимо. Следовательно, нам остается доказать, что множество T_1 порождает R. Обозначим через S_1 подалгебру, порожденную множеством T_1, а через R_t — подалгебру в R, порожденную множеством $<z'z_1^k,\ z''z_1^s\ \ z'\in Z',\ z''\in Z'',\ s=0,1,\ldots,t,\ k=0,1,\ldots>$. Очевидно, что R_{t-1} содержится в R_t для любого целого числа $t\geq 1$. Кроме того, подалгебра R_0 содержится в подалгебре S_1, а $R=\bigcup\limits_{t=0}^{\infty}R_t$. Заметим, что элемент h содержится в подалгебре R_0. Действительно, h содержится в подалгебре $\{z_1, Z'\}\bigcap R$, а последняя совпадает с подалгеброй, порожденной множеством элементов $<z'z_1^k\ \ z'\in Z',\ k=0,1,\ldots>$ (см. лемму 1.8). Но последнее множество является частью множества образующих подалгебры R_0. Так как R_0 содержится в под-

алгебре R_t, а $h \in R_0$, то для любых целых неотрицательных чисел t и m выполняется следующее включение:

$$ad^m h R_t = \langle ah^m \ a \in R_t \rangle \leqq R_t. \tag{3}$$

Кроме того, для любого целого числа $t \geqq 0$ имеет место включение $adz_1 R_t = \langle az_1 \ a \in R_t \rangle \leqq R_{t+1}$, так как дифференцирование adz_1 отображает множество образующих подалгебры R_t в множество образующих подалгебы R_{t+1}. Но мы имеем равенство $f = z_1 + h$. Поэтому, для любого целого числа $t \geqq 0$, выполнено и включение $adfR_t \leqq R_{t+1}$. Тогда мы имеем и включения

$$ad^m f R_n = \langle af^m \ a \in R_n \rangle \leqq R_{n+m}, \tag{4}$$

где m и n — произвольные неотрицательные целые числа.

Теперь допустим, что мы уже доказали включение $R_{t-1} \subset S_1$ для некоторого целого числа $t \geqq 1$. Множество образующих подалгебры R_t получается из множества образующих подалгебры R_{t-1} присоединением элементов $z''z_1^t$. Поскольку мы имеем $z_1 = f - h$, то элемент $z''z_1^t = ad^t z_1 z''$ записывается в виде

$$z''z_1^t = z''(f-h)^t = \sum_i \pm ad^{m_i} fad^{n_i} h \ldots ad^{m_i} fad^{n_i} hz'', \tag{5}$$

где целые числа m_j и n_j — неотрицательны и выполняется равенство $\sum_{j=1}^{i} m_j + \sum_{j=1}^{i} n_j = t$. Рассмотрим любое слагаемое правой части равенства (5) $ad^{m_i} fad^{n_i} h \ldots ad^{m_i} fad^{n_i} hz''$. Из включений (3) и (4) немедленно вытекает, что этот элемент содержится в подалгебре R_{t-s}, где $s = \sum_{j=1}^{i} n_j$. Если число $s = \sum_{j=1}^{i} n_j$ положительно, то по индуктивному предположению R_{t-s} содержится в S_1, то есть указанное слагаемое содержится в S_1. Если $s = \sum_{j=1}^{i} n_j = 0$, то мы имеем $\sum_{j=1}^{i} m_j = t$ и наше слагаемое совпадает с элементом $z''.f^t$. Но последний элемент является одним из образующих подалгебры S_1. Следовательно, все слагаемые правой части равенства (5) содержатся в S_1, то есть элемент $z''z_1^t$ содержится в подалгебре S_1. Мы получили включение $R_t \subset S_1$. Таким образом, индукция завершается и мы доказали, что S_1 содержит $\bigcup_{t=0}^{\infty} R_t = R$. Обратное включение очевидно и, значит, подалгебра S_1 совпадает с идеалом R. Лемма доказана.

Лемма 1.11. Пусть L — свободная алгебра Ли над некоторым полем P, имеющая бесконечное число свободных образующих. Если R и S — два ненулевые идеала алгебры L, причем идеал S не

содержится в идеале R, то тогда идеал R имеет систему свободных образующих, бесконечное подмножество которой содержится в идеале S.

Доказательство. Пусть элемент f идеала S не содержится в R. Рассмотрим подалгебру F, порожденную элементом f и всеми элементами идеала R. По теореме 1.6 подалгебра F — свободна, а по лемме 1.8 в F существует система свободных образующих $<z_1> \cup Z$ такая, что R порождается как идеал в F множеством Z. Заметим теперь, что подалгебра F не может иметь конечного числа свободных образующих, так как она содержит ненулевой идеал R абсолютно свободной алгебры L, а последняя имеет бесконечное число свободных образующих. Следовательно, множество Z — бесконечно. Тогда и множество $Z''=Z\setminus Z'$ бесконечно (см. лемму 1.10). По лемме 1.10 бесконечное множество $<z''f\ z''\in Z''>$ является частью некоторого множества свободных образующих в R. Все элементы этого бесконечного множества содержатся в идеале S и лемма 2.11 доказана.

§ 2. Необходимые результаты из теории многообразий алгебр Ли

Определение 2.1. Через X_∞ будем обозначать свободную алгебру Ли над полем P со счетным множеством свободных образующих $X=<x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots>$. Алгебру X_∞ будем называть базовой алгеброй.

Пусть $f=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — любой элемент алгебры X_∞, а A — произвольная алгебра Ли над полем P. Говорят, что $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0$ является тождеством в алгебре A, если для любого набора элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ из A выполняется равенство $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)=0$.

Определение 2.2. Пусть $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n_i})$ $(i\in I)$ — произвольное множество элементов базовой алгебры X_∞. Совокупность всех алгебр Ли над данным полем P, удовлетворяющих системе тождеств $f_i(x_1, \ldots, x_{n_i})=0$ $(i\in I)$, называется многообразием алгебр Ли, а f_i $(i\in I)$ — многочленами, определяющими это многообразие.

Как и в теории многообразий групп [5; § 4], между многообразиями алгебр Ли над полем P и вербальными (вполне инвариантными) идеалами базовой алгебры X_∞ возникает естественное взаимно однозначное отображение: многообразию соответствует множество всех элементов из X_∞, являющихся левыми сторонами всевозможных тождеств этого многообразия, и это множество оказывается вполне инвариантным идеалом (идеалом, допустимым относительно всех эндоморфизмов алгебры X_∞).

Условимся далее обозначать через V, U, W — многообразия алгебр Ли, а через V, U, W — соответствующие им вербальные идеалы в базовой алгебре X_∞.

Определение 2.3. Элемент f алгебры X_∞ называется однородным полиномом, если f есть линейная комбинация слов от множества свободных образующих X, одного состава относительно X, то есть число вхождений любой свободной образующей x_i во всех этих словах одинаковое. Однородный элемент f алгебры X_∞ называется полилинейным, если порождающие, входящие в слова элемента f, входят только раз. Под длиной $l(f)$ однородного элемента f будем понимать длину слов, входящих в запись f.

Говорят, что тождества $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n_i})=0$ $(i \in I)$ являются следствиями тождеств $g_j(x_1, \ldots, x_{m_j})=0$ $(j \in J)$, если $f(x_1, \ldots, x_{n_i})=0$ $(i \in I)$ являются тождествами во всякой алгебре Ли A, в которой выполняются тождества $g_j(x_1, \ldots, x_{m_j})=0$ $(j \in J)$. Очевидно, что это равносильно утверждению, что элементы f_i $(i \in I)$ содержатся в вербальном идеале, порожденном элементами g_j $(j \in J)$.

Следующие два утверждения играют важную роль в теории многообразий алгебр Ли над полем нулевой характеристики:

2.4. [4; § 5] Пусть поле P — бесконечно, а V — любой вербальный идеал базовой алгебры X_∞ над P. Если $f=\sum_{i=1}^{n} f_i$ — любой элемент из V, где f_i — его однородные составляющие, то элементы f_i тоже содержатся в идеале V.

2.5. [4; § 5] Все тождества произвольного многообразия алгебр над полем нулевой характеристики вытекают из полилинейных.

В дальнейшем будем считать, что основное поле P имеет характеристику нуль.

Предложение 2.6. [6; предложение 1] Если $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — произвольный полилинейный элемент базовой алгебры X_∞, то имеет место равенство

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)x_{n+1}=\sum_{i=1}^{n} f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i x_{n+1}, x_{i+1}, \ldots, x_n). \tag{6}$$

Пусть $g=g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — любой элемент базовой алгебры X_∞ а A — произвольная алгебра Ли над полем P. Если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — любой набор из n элементов алгебры A, то элемент $g(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ называется значением элемента g в алгебре A. Если V — любой вербальный идеал базовой алгебры X_∞, то через $V(A)$ будем обозначать множество всех значений в A всех элементов из V.

Предложение 2.7. Пусть A — произвольная алгебра Ли над полем P нулевой характеристики, а B — любой идеал в A. Если V — произвольный вербальный идеал в базовой алгебре X_∞ над P, то множество $V(B)$ является идеалом в алгебре A.

Доказательство. Легко доказать, что $V(B)$ является подпространством в A. Действительно, пусть u, v — два элемента из $V(B)$, а α

и β — любые элементы поля P. Тогда $u=f(b_1, b_2,\ldots, b_n)$, $v=g(b_{n+1}, b_{n+2},\ldots, b_{m+n})$, где элементы b_i содержатся в B, f и g — некоторые элементы идеала V. Так как V — вербальный в X_∞, то мы можем считать, что элементы f и g записываются на непересекающиеся множества свободных образующих, то есть $f=f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ и $g=g(x_{n+1}, x_{n+2},\ldots, x_{n+m})$. Элемент $h(x_1, x_2,\ldots, x_n, x_{n+1},\ldots, x_{n+m})=\alpha f+\beta g$ содержится в V, а его значение $h(b_1,\ldots, b_n, b_{n+1},\ldots, b_{n+m})$ совпадает с элементом $\alpha u+\beta v$. Следовательно, $\alpha u+\beta v$ содержится в $V(B)$. Из утверждений 2.5 и 2.6 непосредственно вытекает, что любой элемент из $V(B)$ является линейной комбинацией значений в B некоторых полилинейных многочленов из V. Пусть $q(b_1, b_2,\ldots, b_n)$ — любое значение в B полилинейного элемента $q(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ из V, а h — любой элемент алгебры A. Из равенства (6) мы получаем $q(b_1,\ldots,b_n)h=\sum_{i=1}^{n} q(b_1, \ldots, b_{i-1}, b_ih, b_{i+1},\ldots,b_n)$. Элементы b_ih $(i=1,\ldots, n_n)$ содержатся в идеале B. Следовательно, элемент $q(b_1,\ldots,b_n)h$ является линейной комбинацией значений многочлена q в идеале B, то есть он содержится в $V(B)$. Таким образом, мы доказали, что $V(B)$ является идеалом в A. Предложение доказано.

Пусть V и U — некоторые многообразия алгебр Ли над полем P. Обозначим через VU класс всех алгебр Ли над P, которые обладают идеалом B из V, фактор-алгебра по которому содержится в многообразии U. Легко доказать, как это делается для многообразий групп [5; 61], что класс VU является многообразием.

Определение 2.8. Если V и U — некоторые многообразия алгебр Ли над полем P, то многообразие VU называется произведением многообразия V на многообразие U.

Имеют место следующие два предложения:

Предложение 2.9. Если V и U — произвольные многообразия алгебр Ли над полем P нулевой характеристики, а многообразие W совпадает с их произведением VU, то имеет место равенство $W=V(U)$.

Предложение 2.10. Умножение многообразий алгебр Ли над полем нулевой характеристики ассоциативно.

Доказательства, предшествующих двух предложений, опираются на предложение 2.7 и аналогичны доказательствам, соответствующих предложений для многообразий групп [5; предложение 21. 12, теорема 21. 51].

Заметим, что полугруппа всех многообразий алгебр Ли над полем P нулевой характеристики обладает нулем (многообразие всех алгебр Ли над P) и единицей (тривиальное многообразие, состоящее из одной нулевой алгебры).

Определение 2.11. [6] Под нормой $N(V)$ многообразия V алгебр Ли над полем нулевой характеристики будем понимать минимальную длину однородных элементов вербального идеала V. Для

многообразия всех алгебр Ли над P полагаем, что его норма равна нулю.

Ясно, что норма многобразия V совпадает с минимальной длиной ненулевых полилинейных многочленов идеала V.

Предложение 2.12. [6; предложение 5] Для произвольных многообразий алгебр Ли V и U справедливо равенство

$$N(VU)=N(V)N(U). \tag{7}$$

Многообразие алгебр Ли V, не совпадающее с многобразием всех алгебр Ли, называется собственным многообразием.

Определение 2.13. Собственное нетривиальное многообразие V называется неразложимым, если его нельзя представить в виде произведения двух нетривиальных многообразий.

Предложение 2.14. Любое собственное нетривиальное многообразие алгебр Ли над полем нулевой характеристики разлагается в произведение неразложимых многообразий.

Это предложение является непосредственным следствием предложения 2.12.

Определение 2.15. Пусть A — некоторая алгебра Ли. Подалгебра B алгебры A назовем ретрактом в A, если существует эндоморфизм φ алгебры A такой, что выполняются равенства $\varphi^2=\varphi$ и $A\varphi=B$.

Пусть $\psi: G \to H$ — любой гомоморфизм алгебры Ли G в алгебру Ли H, а V — произвольный вербальный идеал в X_∞. Тогда из определения идеала $V(G)$ непосредственно получается равенство $V(G)\psi=V(G\psi)$.

Предложение 2.16. Пусть A — некоторая алгебра Ли над полем P произвольной характеристики, а B — любой ретракт в A. Если V — произвольный вербальный идеал в базовой алгебре X_∞ над P, то выполняется равенство $V(A)\cap B=V(B)$.

Доказательство. Ясно, что выполняется включение $V(B)\leqq V(A)\cap B$. Пусть элемент f содержится в $V(A)\cap B$, а φ — эндоморфизм алгебры A, соответствующий ретракту B. Так как $\varphi^2=\varphi$ и $A\varphi=B$, то $f\varphi=f$, то есть элемент f содержится в $(V(A)\cap B)\varphi \leqq V(A)\varphi\cap B\varphi = V(A\varphi)\cap B = V(B)\cap B=V(B)$. Следовательно, имеет место и обратное включение $V(B)\geqq V(A)\cap B$. Предложение доказано.

Замечание 2.17. Пусть F — свободная алгебра Ли с множеством свободных образующих Y, а Y_1 — некоторое подмножество в Y. Если F_1 — подалгебра в F, порожденная множеством Y_1, то как легко видеть, подалгебра F_1 является ретрактом в F.

Нам понадобится еще следующий результат Ю. А. Бахтурина:

Теорема 2.18. [1; теорема 3.1] Пусть F — некоммутативная свободная алгебра Ли над полем P нулевой характеристики, а V — ненулевой вербальный идеал базовой алгебры X_∞ над P. Если R и S — идеалы в F такие, что $V(R)\leqq V(S)$, то $R\leqq S$.

§ 3. О вербальных идеалах свободных алгебр Ли

Теорема 3.1. Пусть L — свободная алгебра Ли над полем P нулевой характеристики, имеющая бесконечное число свободных образующих, а V и U — два произвольные вербальные идеала базовой алгебры X_∞ над P. Если R и S — идеалы в L, то включение $V(R)\geqq U(S)$ влечет или $V\geqq U$, или $R\geqq S$.

Доказательство. Если $R=(0)$, а $S\neq(0)$, то $U=(0)$. Действительно, S является ненулевым идеалом в алгебре F, которая имеет бесконечное число образующих. По следствию 1.9, S является свободной алгеброй с бесконечным числом свободных образующих и, значит, равенство $U(S)=0$ влечет $U=(0)$.

Допустим, что $R\neq(0)$ и идеал R не содержит идеал S. Тогда, по лемме 1.11, идеал R имеет множество свободных образующих с бесконечным подмножеством M в идеале S. Обозначим через B подалгебру, порожденную множеством элементов M. Подалгебра B является ретрактом в R (см. замечание 2.17). По предложению 2.16 выполняется равенство $V(R)\cap B=V(B)$. Но подалгебра B содержится в идеале S и, поэтому, выполняется включение $U(B)\leqq U(S)\leqq V(R)$. Тогда имеет место и включение $U(B)\leqq V(R)\cap B=V(B)$. Так как подалгебра B свободна и имеет бесконечное число свободных образующих, то последнее включение влечет за собой $U\leqq V$. Теорема доказана.

Здесь следует отметить, что аналогичный результат для групп был доказан Данвуди в его работе [3; теорема 3.1].

Лемма 3.2. Пусть L — свободная алгебра Ли над полем P нулевой характеристики, имеющая бесконечное число свободных образующих, а R — любой характеристический идеал в L. Пусть $V(L)$ — минимальный вполне инвариантный идеал в L, содержащий идеал R. Если $w_1, w_2, \ldots, w_m$ — любое конечное множество элементов из $V(L)$, то существуют элементы $v_1, v_2, \ldots, v_m$ в идеале R и эндоморфизм τ алгебры L такие, что выполняются равенства $v_i\tau=w_i$ $(i=1, 2, \ldots, m)$.

Доказательство. Очевидно, что достаточно доказать лемму в случае, когда алгебра L обладает счетным множеством свободных образующих $Y=\langle y_1, y_2, \ldots\rangle$. Любой элемент w из $V(L)$ имеет вид

$$w=\sum_{i=1}^{s} f_i\varphi_i+\sum_{j=1}^{t}(\ldots((g_j\psi_j a_{j_1})a_{j_2})\ldots)a_{jk_j},$$

где элементы f_i, g_j содержатся в R, a_{jl} — некоторые элементы из L, а φ_i и ψ_j — эндоморфизмы алгебры L. Действительно, множество всех таких линейных комбинаций является минимальным вполне инвариантным идеалом, содержащим идеал R, то есть совпадающим с $V(L)$.

Таким образом, элементы w_i записываются в виде

$$w_i=\sum_{p=1}^{s_i} f_{ip}\,\varphi_{ip}+\sum_{j=1}^{t_i}(\ldots((g_{ij}\,\psi_{ij}\,a_{ij1})\,a_{ij2})\ldots)\,a_{ijk_{ij}}.$$

Пусть n — такое целое положительное число, что все элементы f_{ip}, g_{ij} и a_{ijl} содержатся в подалгебре, порожденной элементами y_1, $y_2,\ldots,y_n$. Определим автоморфизм π алгебры L, полагая

$$y_r\pi=y_{r+2n},\ \text{если}\quad 2mn+1\leqq r\leqq 2mn+n,$$

$$y_r\pi=y_{r-n},\ \text{если}\quad n+1\leqq r\leqq 2n,$$

$$y_r\pi=y_{r-2n},\ \text{если}\quad 2sn+n+1\leqq r\leqq 2n(s+1),$$

где $m=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ s=1,2,\ldots$.

Пусть $d_{ip}=f_{ip}\,\pi^{c_{ip}}$, $h_{ij}=g_{ij}\,\pi^{c_{ij}}$ и $b_{ijl}=a_{ijl}\,\pi^{r_{ijl}}$, где целые положительные числа c_{ip}, l_{ij} и r_{ijl} попарно различные. Элементы d_{ip} и h_{ij} содержатся в идеале R, так как R — характеристический в L. Кроме того, все элементы d_{ip}, h_{ij} и b_{ijl} записываются на попарно непересекающихся подмножествах в Y. Ясно, что имеют место равенства $d_{ip}\,\pi^{-c_{ip}}\,\varphi_{ip}=f_{ip}\varphi_{ip}$, $h_{ij}\,\pi^{-c_{ij}}\,\psi_{ij}=g_{ij}\,\psi_{ij}$ и $b_{ijl}\,\pi^{-r_{ijl}}=a_{ijl}$. Следовательно, существует эндоморфизм τ алгебры L такой, что $d_{ip}\,\tau=f_{ip}\,\varphi_{ip}$, $h_{ij}\,\tau=g_{ij}\,\psi_{ij}$ и $b_{ijl}\,\tau=a_{ijl}$. Положим

$$v_i=\sum_{p=1}^{s_i} d_{ip}+\sum_{j=1}^{t_i}(\ldots((h_{ij}\,b_{ij1})\,b_{ij2})\ldots)\,b_{ijk_{ij}}.$$

Элементы v_i содержатся в идеале R и выполняются равенства $v_i\,\tau=w_i(i=1,\ 2,\ldots,m)$. Лемма доказана.

Теорема 3.3. Пусть L — свободная алгебра Ли над полем P нулевой характеристики, имеющая бесконечное число свободных образующих. Пусть R — ненулевой идеал в L, а V и U — два вербальные идеала базовой алгебры X_∞ над P. Тогда равенство $V(L)=U(R)$ влечет или (i) $V=U=(0)$ или (ii) существует вербальный идеал W алгебры X_∞ такой, что $R=W(L)$ и $V=U(W)$.

Доказательство. Пусть выполняется равенство $V(L)=U(R)$. Тогда мы имеем включение $V(L)=U(R)\leqq U(L)$. Так как алгебра L имеет бесконечное число свободных образующих, то последнее включение влечет $V\leqq U$. Если $U=(0)$, то и $V=(0)$. Допустим, что идеал U — ненулевой. Пусть φ — любой автоморфизм алгебры L. Тогда $U(R)\varphi=U(R\varphi)=V(L)\varphi=V(L)=U(R)$, то есть мы имеем $U(R)=U(R\varphi)$. По теореме 2.18, последнее равенство влечет за собой равенство $R=R\varphi$. Следовательно, идеал R является характеристическим идеалом в L. Пусть $W(L)$ — минимальный вполне инвариантный идеал в L, содержащий R. Так как идеал R содержится в $W(L)$, то выполнено включение $U(R)\leqq U(W(L))=U(W)(L)$. Пусть $f(w_1,\ w_2,\ldots,\ w_m)$ — любой элемент из $U(W(L))$, где $f(x_1,\ x_2,\ldots,x_m)$ — некоторый элемент из U, а $w_1,\ w_2,\ldots,\ w_m$ — элементы из $W(L)$. Тогда по лемме 3.2, существуют элементы

$v_i \in R$ $(i=1, 2, \ldots, m)$ и эндоморфизм τ алгебры L такие, что $w_i = v_i\tau$. Мы имеем $f(u_1, u_2, \ldots, u_m) = f(v_1\tau, v_2\tau, \ldots, v_m\tau) = f(v_1, \ldots, v_m)\tau$. Но элемент $f(v_1, v_2, \ldots, v_m)$ содержится в вполне инвариантном идеале $U(R) = V(L)$, то есть элемент $f(w_1, w_2, \ldots, w_m)$ содержится в $U(R)$. Таким образом, мы доказали, что выполняется и включение $U(R) \geqq U(W(L))$. Теперь мы имеем равенства $U(R) = V(L) = U(W(L)) = U(W)(L)$. По теореме 2.18, равенство $U(R) = U(W(L)$ влечет за собой равенство $R = W(L)$, а поскольку алгебра L имеет бесконечное число свободных образующих, то равенство $V(L) = U(W)(L)$ равносильно равенству $V = U(W)$. Теорема доказана.

Мы уже в состоянии доказать основной результат настоящей работы.

Теорема 3.4. Пусть L — свободная алгебра Ли над полем P нулевой храктеристики, имеющая бесконечное число свободных образующих, а R и S — два ненулевые идеала в L. Пусть V и U — ненулевые вербальные идеалы базовой алгебры X_∞ над P. Если $V(R) = U(S)$, то существует вербальный идеал W алгебры X_∞ такой, что или $(i) R = W(S)$ и $U = V(W)$, или $(ii) S = W(R)$ и $V = U(W)$.

Доказательство. Из теоремы 3.1 следует, что выполнение равенства $V(R) = U(S)$ влечет за собой некоторый из следующих случаев: 1) $V = U$; 2) $R = S$; 3) $R \subset S$ и $V \supset U$; 4) $R \supset S$ и $V \subset U$. Если мы имеем случай 1), то, по теореме 2.18, идеал R совпадает с идеалом S и мы можем положить $W = X_\infty$. В случае 2) равенство $R = S$ влечет немедленно равенство $V = U$, так как идеал R имеет бесконечное число свободных образующих, то есть результат такой же, как и в случае 1). Допустим, что имеет место случай 3). Тогда, по теореме 3.3, существует вербальный идеал W в X_∞ такой, что $R = W(S)$ и $U = V(W)$. Аналогично рассматривается и случай 4). Теорема доказана.

Из последней теоремы вытекает теорема В. А. Парфенова о свободе полугруппы многообразий алгебр Ли:

Следствие 3.5 [6; теорема 1] Полугруппа всех многообразий алгебр Ли над полем P нулевой характеристики является свободной полугруппой с нулем и единицей.

Доказательство. Пусть V — любое собственное нетривиальное многообразие алгебр Ли над P. По предложению 2.14 многообразие V разлагается в произведение неразложимых. Пусть $V = V_1 V_2 \ldots V_k = U_1 U_2 \ldots U_l$ — два разложения этого многообразия в виде произведений неразложимых многообразий. Положим $W_1 = V_2 V_3 \ldots V_k$ и $W_2 = U_2 U_3 \ldots U_l$. Мы имеем $V_1 W_1 = U_1 W_2$. По предложению 2.9 выполняется следующее равенство вербальных идеалов: $V_1(W_1) = U_1(W_2)$. Теперь, по предыдущей теореме, существует вербальный идеал W в базовой алгебре X_∞ такой, что или (i) $V_1 = U_1(W)$ и $W_2 = W(W_1)$, или (ii) $U_1 = V_1(W)$ и $W_1 = W(W_2)$. В обоих случаях, если $W \neq X_\infty$, мы получаем разложимость многообразия V_1 или многообразия U_1. Это противоречит тому, что эти многообразия неразложимы. Следовательно, мы имеем $W = X_\infty$ (то есть многообразие W — тривиальное) и $V_1 = U_1$, $W_1 = W_2$. Далее, по ин-

дукции, мы получаем, что выполняются равенства $k=l$ и $\overline{V}_i=\overline{U}_i$ $(i=1, 2,\ldots,k)$. Следствие доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бахтурин, Ю, А.: Два замечания о многообразиях алгебр Ли. Матем. заметки, 4 (1968) № 4, 387—398.
2. Генов, Г. К.: К теории операций на классе всех групп. Труды Моск. матем. об-ва, XXV (1971), 59—82.
3. Dunwoody, M. J.: On products varieties. Math. Z., 104 (1968), № 2, 91—97.
4. Мальцев, А. И.: Об алгебрах с тождественными определяющими соотношениями. Матем. сб., 26 (68) (1950), № 1, 19—33.
5. Нейман, Х.: Многобразия групп. Москва, „Мир", 1969.
6. Парфенов, В. А.: О многообразиях алгебр Ли. Алгебра и логика, 6 (1967), № 4, 61—73.
7. Ширшов, В. И.: Подалгебры свободных лиевых алгебр. Матем. сб., 33 (75) (1953), № 2, 441—452.

Постъпила на 11. XI. 1972 г.

ON THE VERBAL IDEALS OF FREE LIE ALGEBRAS

G. K. Genov

(SUMMARY)

The main results of this article are the following theorems.

Theorem 1. Let L be a free Lie algebra over a field P of characteristic zero and let L possesses an infinite set of free generators. If $\overline{V}$ and $\overline{U}$ are arbitrary varieties of Lie algebras over P and if R and S are ideals of L, then $V(R)\geqq U(S)$ implies that either $V\geqq U$ or $R\geqq S$.

Theorem 2. Let L be a free Lie algebra over a field P of characteristic zero and let L possesses an infinite set of free generators. Let $\overline{V}$ and $\overline{U}$ be non-trivial varieties of Lie algebras over P and let R and S be non-trivial ideals of L. Then $V(R)=U(S)$ implies that there exists a variety W such that either (i) $R=W(S)$ and $U=V\,W$ or (ii) $S=W(R)$ and $\overline{V}=U\,\overline{W}$.