НЕВОЗМОЖНОСТЬ НЕКОТОРЫХ АЛГОРИТМОВ РАСПОЗНАВАНИЯ ГРУППОВЫХ СВОЙСТВ В МИНИМАЛЬНЫХ АЛФАВИТАХ

Радослав Д. Павлов

§ 1. Предварительные замечания

Проблема алгоритмического распознавания инвариантных свойств алгебрических систем исследовалась в работах А. А. Маркова (1), Г. С. Цейтина (2), С. И. Адяна (3), (4), М. О. Рабина (5) и других авторов. В связи с этой проблемой возникает следующая задача: установить насколько алгоритмическая неразрешимость проблемы распознавания инвариантных свойств зависит от алгебраической системы и рассматриваемого свойства и насколько от алфавита, в котором данная проблема рассматривается. Другими словами, требуется найти минимальный алфавит, в котором алгоритмическая проблема неразрешима.

В теории полугрупп А. А. Марков (1) доказал для ряда свойств конечно-определенных полугрупп, что проблема распознавания этих свойств неразрешима в алфавитах с числом букв, большим или равным 4. Г. С. Цейтин (2) уменьшил число букв до 2. Он также доказал для полугрупповых марковских свойств, что хотя и проблема распознавания этих свойств неразрешима в алфавите с числом букв, большим или равным $p+2$ (p — число образующих полугруппы, обладающей рассматриваемым свойством), существует свойство этого вида, для которого проблема распознавания в алфавитах с меньшим числом букв уже разрешима. Тем самым установлена минимальность $p+2$ буквенного алфавита для класса полугрупповых свойств.

В данной работе рассматривается вопрос о минимальных алфавитах, в которых неразрешима проблема распознавания групповых марковских свойств (относительно определения марковского свойства см. § 3 настоящей работы). Для этих свойств получены результаты, аналогичные результатам Г. С. Цейтина.

Точнее, доказывается неразрешимость проблемы распознавания любого марковского свойства в $p+1$ — буквенном алфавите, где p — число образующих конечно-определенной группы, обладающей рассматриваемым свойством ($p \geqq 1$). Этот алфавит является минимальным для

рассматриваемого класса групповых свойств, ибо в алфавитах с меньшим числом букв уже разрешима проблема распознавания некоторого свойства из этого класса. Показывается также неразрешимость проблемы распознавания изоморфизма единичной группе, неразрешимость метапроблемы тождества слов и неразрешимость проблемы распознавания ряда групповых свойств в минимальном 2-буквенном алфавите.

Настоящая работа продолжает исследования, начатые в работах (6) и (7). Некоторые результаты (6) и (7) также существенно усилены. Доказанная в (6) неразрешимость проблемы распознавания в $p+1$-буквенном алфавите для марковских свойств таких, что обладающая данным свойством группа содержит бесконечную циклическую подгруппу, здесь переносится на весь класс марковских свойств, лишь бы обладающая свойством группа имела хотя бы одну образующую. Основанием для этого дает доказанная здесь неразрешимость проблемы распознавания в $p+1$-буквенном алфавите для класса марковских свойств таких, что обладающая данным свойством группа имеет образующий элемент конечного порядка.

В настоящей работе приводятся также подробные доказательства некоторых результатов из (7). С целю упрощения, в намеченном в работе (7) плане доказательства сделаны некоторые изменения.

Результаты настоящей работы докладывались на III конгрессе болгарских математиков (Варна, 1972).

Конечно-определенную группу (к. о. группа) Г будем записывать так: $\Gamma \ll S;\ D \gg$, где S — множество образующих, а D — множество нетривиальных определяющих соотношений группы Г. Если P и Q слова в алфавите группы Г, то равенство в этой группе будем обозначать через $P \overset{\Gamma}{=} Q$, равенство в свободной группе — через $P = Q$, графическое равенство — через $P \circ Q$. Произвольное слово группы Г, порожденное словами $P_1, \ldots, P_n$, будем обозначать через $\varphi(P_1, \ldots, P_n)$, $\psi(P_1, \ldots, P_n), \ldots$

Рассмотрим группу $\Gamma = \ll S_1 \cup S_2; D_1 \cup D_2 \gg$. Если пересечение S_1 и S_2 пусто, в D_2 буквы из S_1 не входят и каждое соотношение из D_1 имеет вид $A_i p = p B_i$, где $p \in S_1$ и слова A_i, B_i $(i=1, \ldots, k)$ не содержат букв из S_1, то будем говорить, что S_1 — система проходных букв в Г. Группа $\Gamma = \ll S_2; D_2 \gg$ называется основанием группы Г по системе проходных букв S_1.

Система проходных букв S_1 группы Г называется правильной если соответствие L_{s_1}:

$$A_i \longleftrightarrow B_i \quad (i=1, \ldots, k)$$

порождает в группе Г изоморфизм ее подгрупп A_{s_1} и B_{s_1}, порожденные

соответственно словами $A_1,\ldots, A_k$ и $B_1,\ldots, B_k$. Если $S_1=\{p\}$, то будем говорить, что p — правильная проходная буква.

В доказательствах используются следующие леммы:

Лемма N (П. С. Новиков [8]). Если в группе Γ система проходных букв S_1 является правильной, то Γ есть подгруппа группы Γ.

Лемма B (J. Britton [9]). Если в группе Γ система проходных букв S_1 является правильной, $P \overset{\Gamma}{=} 1$ и в слово P входить хотя бы одна буква p из S_1, то P содержит подслово вида $p^{\delta}Tp^{-\delta}$, $\delta=\pm 1$, где при $\delta=1$ $T\in B_{s_1}$, а при $\delta=-1$ $T\in A_{s_1}$, а B_{s_1} и A_{s_1} — подгруппы, порожденные соответственно правыми и левыми частями соответствия L_{s_1}.

§ 2. Технические результаты

Пусть G_0 — к. о. группа с неразрешимой проблемой тождества $X=1$ для класса слов **A**, обладающего следующим свойством: если произвольный элемент из **A** отличен от 1 в G_0, то этот элемент имеет бесконечный порядок (см. [6], стр. 170).

Пусть A — произвольная к. о. группа. Определим группу G_1 как свободное произведение G_0 и A:

$$G_1=G_0 * A=\langle\langle g_1,\ldots, g_n;\quad B_1=1,\ldots,\quad B_m=1\rangle\rangle.$$

Пусть элементы g, g_{n+1}, g_{n+2} не принадлежат группе G_1. Рассмотрим группу G_2:

$$G_2=G_1 * \langle\langle g_{n+1},\ g_{n+2}\rangle\rangle * \langle\langle g;\ g^r=1\rangle\rangle,$$

где r — натуральное число, $r\geq 1$. Добавим к этой группе новые образующие $b, v, u_1,\ldots, u_{n+2}$ и новые определяющие соотношения $u_1=vg_1,\ldots$ $u_{n+2}=vg_{2+2}$. Получим группу

$$G_3=\langle\langle g,\ g_1,\ldots, g_{n+2},\ b,\ v,\ u_1,\ldots,\ u_{n+2};\ B_1=1,\ldots, B_m=1,\ g^r=1,$$

$$u_1=vg_1,\ldots,\ u_{n+2}=vg_{n+2}\rangle\rangle.$$

Легко видно, что группа G_3 изоморфна группе

$$G_4=\langle\langle g,\ g_1,\ldots, g_{n+2},\ b,\ v;\ B_1=1,\ldots, B_m=1,\ g^r=1\rangle\rangle=G_2 * \langle\langle b,\ v\rangle\rangle$$

(см. [10], стр. 261). Однако соотношения $u_i=vg_i$ можно переписать как $g_i=v^{-1}u_i$ и тогда на этом же основании, заменяя всюду в определяющих соотношениях G_3 элементы $g_1,\ldots, g_{n+2}$ словами $v^{-1}u_1,\ldots,$ $v^{-1}u_{n+2}$, получим, что группа G_3 изоморфна группе $G_5=\langle\langle g,\ u_1,\ldots,$ $u_{n+2},\ b,\ v;\ A_1=1,\ldots, A_m=1,\ g^r=1\rangle\rangle$, где $A_j=\eta(B_j)$, $j=1,\ldots, m$, а кодировка η определяется так:

$$\eta(g_i) \circ v^{-1} u_i, \quad i=1,\ldots, n+2,$$
$$\eta(b) \circ b,$$
$$\eta(v) \circ v,$$
$$\eta(g) \circ g.$$

Следовательно группа G_5 изоморфна группе G_4, поскольку обе они изоморфны G_3.

Добавим к G_5 новую образующую u и новые определяющие соотношения. Получим группу

$$G_6 = \langle\langle g, b, v, u_1, \ldots, u_{n+2}, u;\ A_1=1, \ldots, A_m=1,\ g^r=1,$$
$$b^i v b^{-i} u = u b^i u_i b^{-i} \quad (i=1,\ldots, n+2)\rangle\rangle.$$

Лемма 1. В группе G_6 буква u — правильная проходная.

Доказательство. u — проходная буква, ибо $A_1, \ldots, A_m$ не содержат букв u. Сответствие L_u имеет вид:

$$bvb^{-1} \longrightarrow bu_1b^{-1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$b^{+2}vb^{-n-2} \longrightarrow b^{n+2} u_{n+2} b^{-n-2},$$

а G_5 является основанием G_6 по проходной букве u. Покажем, что в G_5 соответствие L_u есть изоморфизм подгрупп, порожденных левыми и правыми частями L_u.

$bvb^{-1}, \ldots, b^{n+2}vb^{-n-2}$ являются свободными образующими порожденной ими подгруппы группы G_5. Действительно, для любого $k: (b^i v b^{-i})^k = b^i v^k b^{-i}$. Тогда любое нетривиальное произведение рассматриваемых элементов перейдет в нетривиальное произведение b и v. Следовательно, не может равняться 1, поскольку b и v являются свободными образующими. $bu_1 b^{-1}, \ldots, b^{n+2} u_{n+2} b^{-n-2}$ являются свободными образующими порожденной ими подгруппы группы G_5. Действительно, пусть $\varphi: G_2 \to G_5$ — эндоморфизм, определенный равенствами

$$b\varphi = b,\ v\varphi = v,\ g\varphi = 1,\ u_i\varphi = v \quad (i=1,\ldots, n+2).$$

Эндоморфизм φ существует, так как $G_5 \cong G_4 = G_2 * \langle\langle b, v\rangle\rangle$. Ясно, что $(b^i u_i b^{-i})\varphi = b^i v b^{-i}$. Но элементы $b^i v b^{-i}$ $(i=1,\ldots, n+2)$ являются свободными образующими порожденной ими подгруппы группы G_5. Следовательно, элементы $b^i u_i b^{-i}$ $(i=1,\ldots, n+2)$ тоже являются свободными образующими порожденной ими подгруппы в G_5. Но тогда L_u есть изоморфизм соответствующих подгрупп группы G_5. Лемма доказана.

Из равенства $b^i v b^{-i} u = u b^i u_i b^{-i}$ можно выразить u_i:

$$u_i = b^{-i} u^{-1} b^i v b^{-i} u b^i \quad (i=1,\ldots, n+2).$$

Подставляя это выражение вместо u_i в кодировку η, получим кодировку μ

$$\mu(g_i) \circ v^{-1} b^{-i} u^{-1} b^i v b^{-i} u b^i, \quad i=1,\ldots, n+2,$$

$$\mu(b) \circ b,$$

$$\mu(v) \circ v,$$

$$\mu(u) \circ u,$$

$$\mu(g) \circ g.$$

Видно, что G_6 изоморфна группе

$$G_7 = \langle\langle g, b, v, u;\ A_1' = 1, \ldots, A_m' = 1,\ g^r = 1 \rangle\rangle,$$

где $A_j \circ \mu(B_j)$ $(j=1,\ldots, m)$.

Лемма 2. Пусть Q — слово в алфавите группы G_4 и $P \circ \mu(Q)$. Тогда

$$P \overset{G_7}{=} 1 \Leftrightarrow Q \overset{G_4}{=} 1.$$

Доказательство. Пусть $Q \overset{G_4}{=} 1$. Это означает, что существует последовательность элементарных преобразований группы G_4:

$$Q \to \ldots \to 1.$$

Но определяющие соотношения G_7 — это определяющие соотношения G_4, закодированные кодировкой μ. Отсюда переход в $G_7: P \to \ldots \to 1$ легко получается.

Пусть $P \overset{G_7}{=} 1$. Подставим в P вместо $b^{-i}u^{-1}b^i v b^{-i} u b^i$ буквы u_i, $i=1,\ldots, n+2$. P перейдет в $\eta(Q)$ и, очевидно, $\eta(Q) \overset{G_6}{=} 1$. Но $\eta(Q)$ уже не содержит букв u, а в G_6 буква u — правильная проходная. По лемме $N\ \eta(Q) \overset{G_5}{=} 1$. Но $G_5 \cong G_4$ и при этом изоморфизме $\eta(Q)$ перейдет в Q на основании кодировки η. Следовательно, $Q \overset{G_4}{=} 1$. Лемма доказана.

Пусть $W \circ \mu(X)$, где X — произвольное слово из класса слов **A**, $Y \circ \mu(g_{n+1})$, $Z \circ \mu(g_{n+2})$.

Лемма 3. Пусть $W \overset{G_7}{\neq} 1$. Тогда u, b, W, YgY, Z являются свободными образующими порожденной ими подгруппы группы G_7.

Доказательство. Обозначим через $\varphi(u, b, W, YgY, Z)$ произвольное слово, составленное из u, b, W, YgY, Z.

Пусть $\varphi(u, b, W, YgY, Z) \overset{G_7}{=} 1$. Докажем, что тогда $\varphi(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5)=1$ в $\langle\langle t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 \rangle\rangle$. Подставим в W, Y, Z вместо $b^{-i}ub^i v b^{-i} u b^i$ элементы u_i $(i=1,\ldots, n+2)$. Получим

$$\varphi(u,\ b,\ \eta(X),\ \eta(g_{n+1}\,g\,g_{n+1}),\ \eta(g_{n+2}))\overset{G_6}{=}1.$$

Утверждение докажем индукцией по числу λ множителей типа u^k, входящих в слово φ.

$$\lambda=0.\ \text{Тогда}\ \varphi(b,\ \eta(X),\ \eta(g_{n+1}\,g\,g_{n+1}),\ \eta(g_{n+2}))\overset{G_6}{=}1.$$

Но в G_6 буква u — правильная проходная. $\lambda=0$ и тогда по лемме N это равенство будет выполнено и в G_5. Но G_5 изоморфна G_4 и при этом изоморфизме получим, что $\varphi(b,\ X,\ g_{n+1}\,g\,g_{n+1},\ g_{n+2})\overset{G_4}{=}1$. Поскольку $W\neq 1$ в G_7, то по лемме 2: $X\neq 1$ в G_4. Следовательно, X — элемент бесконечного порядка в $G_0(X\in \mathbf{A})$. Но

$$G_4=G_0*A*\langle\langle g_{n+1},\ g_{n+2},\ g;\ g^r=1\rangle\rangle*\langle\langle b,\ v\rangle\rangle.$$

Тогда, поскольку $g_{n+1}\,gg_{n+1}$ и g_{n+2} являются свободными образующими порожденной ими в $\langle\langle g_{n+1},\ g_{n+2},\ g;\ g^r=1\rangle\rangle$ подгруппы, то $\varphi(b,\ X,\ g_{n+1}g\,g_{n+1},\ g_{n+2})=1$ и следовательно, $\varphi(t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4)=1$.

Пусть утверждение доказано для $\lambda<\lambda_0$, докажем его для $\lambda=\lambda_0$. Можно считать, что $\lambda_0\neq 0$. Тогда φ содержит хотя бы одну букву. u (правильная проходная) и по лемме B содержит подслово

$$u^{\varepsilon}\psi(b,\ \eta(X),\ \eta(g_{n+1}\,g\,g_{n+1}),\ \eta(g_{n+2}))u^{-\varepsilon},\quad \varepsilon=\pm 1,$$

такое, что либо

1) $\psi(b,\ \eta(X),\ \eta(g_{n+1}\,g\,g_{n+1}),\ \eta(g_{n+2}))\overset{G_5}{=}\alpha(bvb^{-1},\ldots,\ b^{n+2}vb^{-n-2})$,

либо 2) $\psi(b,\ \eta(X),\ \eta(g_{n+1}\,g\,g_{n+1}),\ \eta(g_{n+2}))\overset{G_5}{=}\alpha(bu_1b^{-1},\ldots,\ b^{n+2}u_{n+2}\,b^{-n-2})$

Рассмотрим случай 2). Случай 1) рассматривается аналогично. Пусть $\psi\neq 1$, $\alpha\neq 1$ и в слове $\psi\alpha^{-1}$ сделаны все возможные сокращения. В полученном слове будут содержаться буквы b, ибо $\alpha\neq 1$ и множитель $b^iu_ib^{r-i}$ не может полностью сократиться в ψ — в слове ψ буквы v^{-1}, u_i находятся всегда рядом. Но в G_5 буква b — правильная проходная и по лемме B слово $\psi\alpha^{-1}$ содержит подслово вида $b^{\sigma}\beta(\eta(X),\ \eta(g_{n+1}\,g\,g_{n+1}),\ \eta(g_{n+2}))\,u_{i_1}{}^{l}\,b^{-\sigma}$ $(\sigma=\pm 1)$, такое что

$$\beta(\eta(X),\ \eta(g_{n+1}\,g\,g_{n+1}),\ \eta(g_{n+2}))\,u_{i_1}{}^{l}=1\ \text{в}\ G_5=\langle\langle v,\ u_1,\ldots,u_{n+1},\ g;$$
$$g^r=1,\ A_1=1,\ldots,\ A_m=1\rangle\rangle.$$

Определяющие соотношения G_5 таковы, что в каждом из них сумма степенных показателей v и u_i равна 0. Следовательно $l=0$. Но тогда, как и в случае $\lambda=0$, получим, что $\beta(\eta(X),\ \eta(g_{n+1}\,g\,g_{n+1}),\ \eta(g_{n+2}))=1$. Это означает, что $\psi\alpha^{-1}$ сокращается дальше в противоречие с допущением. Следовательно, либо $\psi=1$, либо $\alpha=1$. Если $\alpha=1$, то, как и в случае $\lambda=0$, получим, что $\psi=1$. Но тогда, сокращая в слово φ подслово ψ и соединяя соседные ψ множители u^{k_1} и u^{k_2} в $u^{k_1+k_2}$, полу-

чим слово, к которому применимо индукционное предположение. Лемма доказана.

Лемма 4. b, v, YbY^{-1}, $Za^{-1}Z$ являются свободными образующими порожденной ими в $G_7 * \langle\langle a \rangle\rangle$ подгруппы.

Доказательство. Пусть φ произвольное слово, составленное из b, v, YbY^{-1}, $Za^{-1}Z$, и пусть

$$\varphi(b,\ v,\ YbY^{-1},\ Za^{-1}Z)=1 \quad \text{в} \quad G_7 * \langle\langle a \rangle\rangle.$$

Индукцией по числу множителей $Za^{-1}Z$ в слове φ докажем, что

$$\varphi(t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4)=1 \quad \text{в} \quad \langle\langle t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4 \rangle\rangle.$$

$\lambda=0$. Тогда $\varphi(b,\ v,\ YbY^{-1})=1$ в $G_7 * \langle\langle a \rangle\rangle$. a — правильная проходная буква в $G_7 * \langle\langle a \rangle\rangle$ и, следовательно, $\varphi(b,\ v,\ YbY^{-1}) \overset{G_7}{=} 1$. По лемме 2:

$$\varphi(b,\ v,\ g_{n+1}\, b g_{n+1}^{-1})=1 \quad \text{в} \quad G_4.$$

Но в G_4 элементы b, v, $g_{n+1}\, b\, g_{n+1}^{-1}$ очевидно являются свободными образующими порожденной ими подгруппы. Следовательно, $\varphi(t_1,\ t_2,\ t_3) = 1$.

Допустим, что лемма доказана для $\lambda<\lambda_0$, докажем ее для случая $\lambda=\lambda_0$. Можно считать, что $\lambda_0>0$ и, следовательно, φ содержит множители $Za^{-1}Z$. По лемме B, ввиду того, что a — правильная проходная в $G_7 * \langle\langle a \rangle\rangle$, получим, что φ содержит подслово вида $a^{\varepsilon}\psi a^{-\varepsilon}$, где $\psi \circ Z^{-\varepsilon}\psi_1(b,\ v,\ YbY^{-1})\ Z^{\varepsilon} \overset{G_7}{=} 1$.

Отсюда $\psi_1(b,\ v, YbY^{-1}) \overset{G_7}{=} 1$; повторяя рассуждения случая $\lambda=0$, получим, что $\psi_1(t_1,\ t_2,\ t_3) = 1$. Но тогда ψ_1 можно сократить, соседние ψ_1 множители a^{k_1} и a^{k_2} объединить, и к полученнному слову уже применимо индукционное предположение. Лемма доказана.

Лемма 5. Z, YbY^{-1}, b, v являются свободными образующими порожденной ими в G_7 подгруппы.

Доказательство. Если $\varphi(b,\ v,\ YbY^{-1},\ Z) \overset{G_7}{=} 1$, то $\varphi(b,\ v,\ g_{n+1}\, bg_{n+1}^{-1},\ g_{n+2})=1$ в G_4, ибо $\varphi(b,\ v,\ YbY^{-1},\ Z) \circ \mu\,[\varphi(b,\ v, g_{n+1}\, b\, g_{n+1}^{-1},\ g_{n+2})]$.

Но в G_4 b, v, $g_{n+1}\, b\, g_{n+1}^{-1}$, g_{n+2} очевидно являются свободными образующими порожденной ими подгруппы. Следовательно, $\varphi(t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4) = 1$. Лемма доказана.

Рассмотрим группу:

$$G_x=\langle\langle g,\ a,\ b,\ u,\ v;\ A_1'=1,\ldots,\ A_m'=1,\ Wa=aYbY^{-1},\ u=aba^{-1},$$
$$v=a^{-1}ba,\ g^r=1,\ g=Y^{-1}aZa^{-1}Za^{-1}Y^{-1}\rangle\rangle,$$

где, как и раньше, $W \circ \mu(X)$, $X \in \mathbf{A}$, $Y \circ \mu(g_{n+1})$, $Z \circ \mu(g_{n+2})$.

Для G_x и буквы a введем такие понятия как тождество по индивидуальности, каноническая последовательность преобразований, связанная с буквой a, каноническая последовательность преобразований, связанная с наследственной цепочкой, порождающей данной буквой a^σ, которые С. И. Адян ввел в работе [3], § 2, для квазипроходной буквы q_n группы $\mathbf{A}_{q,\,A,\,B}$.

Определяющие соотношения группы G_x, содержащие букву a, перепишем так:

$$a=u^{-1}ab,\quad a=b^{-1}av,\quad a=W^{-1}aYbY^{-1},\quad a=Y^{-1}g^{-1}Y^{-1}aZa^{-1}Z,$$

$$a=uab^{-1},\quad a=bav^{-1},\quad a=WaYb^{-1}Y^{-1},\quad a=YgYaZ^{-1}aZ^{-1}.$$

Как и в [3], § 2, в преобразованиях группы G_x можно ограничиться лишь переходами:

$$i)\quad \begin{array}{l} a\to u^{-1}ab,\quad a\to b^{-1}av,\quad a\to W^{-1}aYbY^{-1},\\ a\to uab^{-1},\quad a\to bav^{-1},\quad a\to WaYb^{-1}Y^{-1};\end{array}$$

$$ii)\quad a\to Y^{-1}g^{-1}Y^{-1}aZa^{-1}Z,\quad a\to YgYaZ^{-1}aZ^{-1};$$

$$iii)\quad A_1'=1,\ldots,\ A_m'=1,\ g^r=1.$$

Для $i)$ и $ii)$ обратные переходы легко исключаются.

В последующих доказательствах относительно G_x будут употребляться только переходы $i)$, $ii)$, $iii)$, вставки и сокращения.

Число всех элементарных преобразований последовательности

$$P_1\to P_2\to\ldots\to P_l,\quad P_1\in G_x$$

групп G_x, являющихся либо вставками букв a и a^{-1}, либо ii-преобразованиями, назовем **индексом** данной последовательности.

В элементарных преобразованиях $i)$ и $ii)$:

$$a\to u^{-1}ab,\quad a\to b^{-1}av,\quad a\to W^{-1}aYbY^{-1},\quad a\to Y^{-1}g^{-1}Y^{-1}aZa^{-1}Z,$$

$$a\to uab^{-1},\quad a\to bav^{-1},\quad a\to WaYb^{-1}Y^{-1},\quad a\to YgYaZ^{-1}aZ^{-1}$$

подчеркнутые буквы a слева и справа данного преобразования имеют одинаковую индивидуальность. Если буква a^σ не затрагивается элементарным преобразованием, то она также сохраняет свою индивидуальность. Для последовательности элементарных преобразований определение распространяется транзитивно. Про буквы a и a^{-1}, которые в $ii)$-преобразованиях остаются не подчеркнутыми, будем говорить, что они непосредственно порожденны буквой a с левой стороны.

Последовательность $a^{(1)},\ldots,a^{(k)}$, a^{σ_1} $(\sigma_1=\pm1)$ индивидуальностей букв a^σ, появляющихся в данной последовательности элементарных преобразований группы G_x, является наследственной цепочкой букв a,

порождающей букву a^{σ_1}, если каждая буква $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{\sigma_1}$ непосредственно порождает следующую.

Пусть дана последовательность элементарных преобразований групп G_x:

(1) $$P_1 \to P_2 \to \ldots \to P_q, \quad P_1 \text{ — слово в алфавите } G_x.$$

Последовательность

(2) $$P_1 \to P_2' \to \ldots \to P_q \quad (P_1 = P_1' a P_1''),$$

в которой сначала на данной индивидуальностью a совершаются все i)- и ii)-преобразования из (1), в которых она участвует, а потом все остальные преобразования из (1), будем называть **канонической последовательностью элементарных преобразований** для (1), связанная с данной индивидуальностью a.

Пусть в (1) фиксирана наследственная цепочка

(3) $$a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(k)}, a^{\sigma_1}; \ \sigma_1 = \pm 1, \ a^{(1)} \text{ входит в } P_1.$$

Будем говорить, что (2) является канонической последовательностью для (1), связанной с наследственной цепочкой (3), если в (2) сначала над $a^{(1)}$ совершаются все i-) и ii)-преобразования из (1), в которых она участвует, потом все i)- и ii)-преобразования из (1), в которых $a^{(2)}$ участвует и т. д. и наконец все остальные преобразования из (1).

Следующие леммы 6.1, 6.2, 6.3 доказываются аналогично соответственно леммам 1, 2 и 3 работы (3), § 2.

Лемма 6.1. Для любой последовательности элементарных преобразований (1) без вставок букв a^{σ} и любой индивидуальности a, входящей в P_1, существует каноническая последовательность, связанная с буквой a.

Каноническая последовательность для (1), связанная с буквой a, выглядит так:

(4) $$P_1 = P_1' a P_1'' \to \ldots \to P_1' \alpha(u, b, W, YgY) a \alpha^{-1}(b, v, YbY^{-1}, Za^{-1}Z) P_1'' \to \ldots \to P_q,$$

где $\alpha(u, b, W, YgY)$ — слово, составленное из указанных в скобках элементов. Все i)- и ii)-преобразования над a совершаются в первой части (4), а все остальные преобразования из (1) — во второй части (4).

Лемма 6.2. Для любой последовательности элементарных преобразований (1) без вставок букв a^{σ} и любой заданной индивидуальности a^{σ_1}, которая порождается в (1), существует каноническая последовательность, связанная с наследственной цепочкой (3), порождающей в (1) букву a^{σ_1}.

Если $\sigma_1 = 1$, то каноническая последовательность, связанная с наследственной цепочкой, порождающей в (1) букву a, имеет следующий вид:

$$P_1'a^{(1)}P_1'' \to \ldots \to P_1'\alpha_1(u,\ b,\ W,\ YgY)a^{(1)}\beta_1(b,\ v,\ YbY^{-1},$$
$$Za^{-1}Z)\,Z^{-1}a^{(2)}Z^{-1}$$
$$\beta_1'(b,\ v,\ YbY^{-1},\ Za^{-1}Z)P_1'' \to \ldots \to P_1'\alpha_1(u,\ b,\ W,\ YgY)a^{(1)}$$
$$\beta_1(b,\ v,\ YbY^{-1},\ Za^{-1}Z)$$
$$Z^{-1}\alpha_2(u,\ b,\ W,\ YgY)a^{(2)}\beta_2(b,\ v,\ YbY^{-1},\ Za^{-1}Z)Z^{-1}$$
$$\alpha_3(u,\ b,\ W,\ YgY)a^{(3)}\ldots$$
$$\beta_k(b,\ v,\ YbY^{-1},\ Za^{-1}Z)Z^{-1}\alpha_{k+1}(u,\ b,\ W,\ YgY)\underline{a}\,\beta_{k+1}(b,\ v,$$
$$YbY^{-1},\ Za^{-1}Z)Z^{-1}\ldots$$
$$\ldots\beta_2'(b,\ v,\ YbY^{-1},\ Za^{-1}Z)Z^{-1}\beta_1'\ (b,\ v,\ YbY^{-1},\ Za^{-1}Z)$$
$$P_1'' \to \ldots \to P_q,$$

где $\beta_{k+1}(b,\ v,\ YbY^{-1},\ Za^{-1}Z) \underline{\circ} \alpha_{k+1}^{-1}(b,\ v,\ YbY^{-1},\ Za^{-1}Z)$,

$$\beta_i(b,\ v,\ YbY^{-1},\ Za^{-1}Z)Z^{-1}aZ^{-1}\beta_i'(b,\ v,\ YbY^{-1},\ Za^{-1}Z)$$
$$\underline{\circ}\ \alpha_i^{-1}(b,\ v,\ YbY^{-1},\ Za^{-1}Z),\quad i=1,\ldots,k.$$

Если $\sigma_1=-1$, то каноническая последовательность, связанная с наследственной цепочкой, порождающей в (1) букву a^{-1}, имеет вид:

$$P_1'a^{(1)}P_1'' \to \ldots \to P_1'\alpha_1(u,\ b,\ W,\ YgY)a^{(1)}\beta_1(b,\ v,\ YbY^{-1},$$
$$Za^{-1}Z)Z^{-1}a^{(2)}Z^{-1}$$
$$\beta_1'(b,\ v,\ YbY^{-1},\ Za^{-1}Z)P_1'' \to \ldots \to P_1'\alpha_1(u,\ b,\ W,\ YgY)a^{(1)}$$
$$\beta_1(b,\ v,\ YbY^{-1},\ Za^{-1}Z)$$
$$Z^{-1}\alpha_2(u,\ b,\ W,\ YgY)a^{(2)}\beta_2(b,\ v,\ YbY^{-1},\ Za^{-1}Z)Z^{-1}\alpha_3(u,\ b,\ W,$$
$$YgY)a^{(3)}$$
$$\beta_3(b,\ v,\ YbY^{-1},\ Za^{-1}Z)Z^{-1}\ldots\alpha_k(u,\ b,\ W,\ YgY)a^{(k)}\beta_k'(b,\ v,\ YbY^{-1},$$
$$Za^{-1}Z)Za^{-1}Z$$
$$\beta_k''(b,\ v,\ YbY^{-1},\ Za^{-1}Z)Z^{-1}\beta'_{k-1}(b,\ v,\ YbY^{-1},\ Za^{-1}Z)Z^{-1}\ldots$$
$$\ldots\beta_1'(b,\ v,\ YbY^{-1},\ Za^{-1}Z)P_1'' \to \ldots \to P_q,$$

где $\beta'_k(b,\ v,\ YbY^{-1},\ Za^{-1}Z)Za^{-1}Z\beta''_k(b,\ v,\ YbY^{-1},\ Za^{-1}Z)$

$$\underline{\circ}\ \alpha_k^{-1}(b,\ v,\ YbY^{-1},\ Za^{-1}Z),$$
$$\beta_i(b,\ v,\ YbY^{-1},\ Za^{-1}Z)Z^{-1}aZ^{-1}\beta_i'(b,\ v,\ YbY^{-1},\ Za^{-1}Z)$$
$$\underline{\circ}\ \alpha_i^{-1}(b,\ v,\ YbY^{-1},\ Za^{-1}Z),\quad i=1,\ldots,\ k-1.$$

Лемма 6. 3. Пусть последовательность элементарных преобразований в G_x:

$$P_1P_2 \to \ldots \to 1, \quad \text{где } P_1, P_2 \text{ — слова из } G_x,$$

имеет индекс λ и не содержит вставок букв a^σ. Тогда существует последовательность элементарных преобразований в G_x:

$$P_2P_1 \to \ldots \to 1$$

с индексом λ и без вставок букв a^σ.

Обозначим через $\varphi(b, u, v, g)$ произвольное слово, составленное из b, u, v, g.

Лемма 7. Пусть $W \neq 1$ в G_τ. Тогда

$$\varphi(b, u, v, g) \overset{G_x}{=} 1 \Rightarrow \varphi(b, u, v, g) \overset{G_\tau}{=} 1.$$

Доказательство. Пусть $P_1 \equiv \varphi(b, u, v, g)$. Лемму будем доказывать индукцией по индексу λ перехода

$$(5) \qquad P_1 \to P_2 \to \ldots \to 1 \text{ в } G_x.$$

$\lambda=0$. Это означает, что в (5) нет вставок букв a^σ и *ii*)-преобразований. Но тогда в (5) отсутствуют и *i*)-преобразования, поскольку P_1 не содержит букв a^σ и в (5) нет вставок a^σ. Следовательно, $P_1 \overset{G_\tau}{=} 1$, ибо все остальные определяющие соотношения G_x, не содержащие букв a, являются определяющими соотношениями G_τ.

Пусть лемма доказана для всех λ таких, что $\lambda \leq \lambda_0$, и пусть (5) имеет индекс λ_0+1. Так как $\lambda_0+1>0$, то в (5) имеется хотя бы одна вставка букв a^σ — иначе не могут применяться *ii*)-преобразования. Пусть последняя из этих вставок есть переход $P_i \to P_{i+1}$. Возможны следующие случаи:

А. Правосторонняя вставка:

$$(6) \qquad P_1 \to \ldots \to P_i' P_i'' \to P_i' a^{-1} a P_i'' \to \ldots \to 1.$$

В конечном слове последовательности (6) нет буквы a^{-1}, а преобразования *i*), *ii*), *iii*) не затрагивают a^{-1}. Следовательно, в (6) a^{-1} должна сократиться. Рассмотрим все возможные сокращения буквы a^{-1}.

А. 1. a^{-1} сокращается в (6) с буквой a, появляющейся в (6) слева от нее.

В этом случае:

$$P_1 \to \ldots \to P_i' P_i'' \to P_i' a^{-1} a P_i'' \to \ldots \to P_j' a a^{-1} P_j''$$
$$\to P_j' P_j'' \to \ldots \to 1.$$

Так как после вставки a^{-1} участвует только в сокращении, то получаем следующие независимые переходы:

а) $P_1 \to \ldots \to P_i' P_i''$; в) $aP_i'' \to \ldots \to P_j''$;

б) $P_i' \to \ldots \to a P_j'$; г) $P_j' P_j'' \to \ldots \to 1$.

Из них строим последовательность с индексом λ_0 (нет вставки $a^{-1} a$):

$$P_1 \to \ldots \to P_i' P_i'' \to \ldots \to P_j' a P_i'' \to \ldots \to P_j' P_j'' \to \ldots \to 1.$$

К этой последовательности применяем индукционное предположение.

А. 2. a^{-1} сокращается с буквой a той индивидуальности, с которой она вставлена.

Имеем следующую последовательность без вставок букв a^σ:

$$P_i' a^{-1} a P_i'' \to \ldots \to 1. \tag{7}$$

Заменяем (7) канонической последовательностью, связанной с букой a. Получаем

$$P_i' a^{-1} a P_i'' \to \ldots \to P_i' a^{-1} \alpha(u, b, W, YgY) a\, \alpha^{-1}(b, v, YbY^{-1}, Za^{-1}Z) P_i''$$

$$\to \ldots \to P_j' a^{-1} a P_j'' \to P_j' P_j'' \to \ldots \to 1.$$

После совершения всех i)- и ii)-преобразований, в которых a участвует, она может лишь сократиться, Поэтому получаем независимые переходы без вставок букв a^σ:

а) $a \to \ldots \to \alpha(u, b, W, YgY) a\, \alpha^{-1}(b, v, YbY^{-1}, Za^{-1}Z)$;

б) $\alpha(u, b, W, YgY) \to \ldots \to 1$; в) $P_1 \to \ldots \to P_i' P_i''$;

г) $P_i' \to \ldots \to P_j'$; д) $\alpha^{-1}(b, v, YbY^{-1}, Za^{-1}Z) P_i'' \to \ldots \to P_j''$;

е) $P_j' P_j'' \to \ldots \to 1$.

В переходе б) нет вставок букв a^σ, следовательно, могут применяться лишь элементарные преобразования группы G_x, в которых буквы a не участвуют, т. е. б) есть последовательность преобразований в G_τ. По лемме 3: $\alpha(u, b, W, YgY) = 1$. Но тогда $\alpha^{-1}(b, v, YbY^{-1}, Za^{-1}Z) = 1$. Следовательно, можно построить последовательность из одних вставок с индексом не больше индекса перехода а):

$$1 \to \ldots \to \alpha^{-1}(b, v, YbY^{-1}, Za^{-1}Z). \tag{9}$$

Используя в), (9), д), г), е), строим последовательность

$$P_1 \to \ldots \to P_i' P_i'' \to \ldots \to P_i' \alpha^{-1}(b, v, YbY^{-1}, Za^{-1}Z) P_i'' \to \ldots \to P_i' P_j''$$

$$\to \ldots \to P_j' P_j'' \to \ldots \to 1$$

с индексом не больше λ_0 (нет вставки $a^{-1}a$). К этой последовательности применяем индукционное предположение.

А. 3 a^{-1} сокращается с буквой a, появляющейся в (6) справа от нее и отличной по индивидуальности от той буквы a, с которой a^{-1} вставлена.

Имеются 2 возможности:

I. Буква a, с которой сокращается a^{-1}, порождается буквой a, вставленная вместе с a^{-1}.

Заменяем $P_i' a^{-1} a P_i'' \to \ldots \to 1$ канонической последовательностью, связанной с наследственной цепочкой, порождающей букву a. Получаем

$$P_i' \underline{a}^{-1} a P_i'' \to \ldots \to P_i' \underline{a}^{-1} \alpha_1 a \beta_1 Z^{-1} \alpha_2 a \beta_2 Z^{-1} \ldots$$

$$\ldots \alpha_k \underline{a} \beta_k Z^{-1} \beta'_{k-1} Z^{-1} \ldots \beta_2' Z^{-1} \beta_1' Z^{-1} P_i''$$

$$\to \ldots P_j' \underline{a}^{-1} a P_j'' \to P_j' P_j'' \to \ldots \to 1,$$

где через $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ обозначены слова, составленные из u, b, W, YgY, а через $\beta_1, \ldots, \beta_k$, $\beta_1', \ldots, \beta'_{k-1}$ — слова, составленные из b, v, YbY^{-1}, $Za^{-1}Z$. После подчеркивания a, a^{-1} и a могут лишь сократиться, ибо ни в каких других преобразованиях они больше не участвуют. Поэтому получаем независимый переход без вставок букв a^σ:

$$\alpha_1 a \beta_1 Z^{-1} \alpha_2 a \beta_2 Z^{-1} \ldots \alpha_{k-1} a \beta_{k-1} Z^{-1} \alpha_k \to \ldots \to 1. \tag{10}$$

В этом переходе все буквы a^σ должны сократиться — все остальные преобразования G_x сохраняют индивидуальность, а в конечном слове последовательности (10) нет букв a^σ. Рассмотрим первое в (10) сокращение букв a^σ.

I. 1. Буква a^{-1}, которая сокращается первой в (10), порождается некоторой буквой a из множителя β_i. Тогда

$$\beta_i(b, v, YbY^{-1}, Za^{-1}Z) = \beta'(b, v, YbY^{-1}, Za^{-1}Z) Z^{-1} a Z^{-1}$$
$$\beta''(b, v, YbY^{-1}, Za^{-1}Z).$$

Слова $\beta'(b, v, YbY^{-1}, Za^{-1}Z)$ и $\beta''(b, v, YbY^{-1}, Za^{-1}Z)$ будем коротко обозначать через β' и β''.

Заменим (10) канонической последовательностью, связанной с наследственной цепочкой, порождающей a^{-1}:

$$\alpha_1 a \beta_1 Z^{-1} \alpha_2 a \beta_2 Z^{-1} \ldots \alpha_i a \beta' Z^{-1} a Z^{-1} \beta'' Z^{-1} \ldots \alpha_k \to \ldots \tag{11}$$

$$\to \alpha_1 a \beta_1 Z^{-1} \alpha_2 a \beta_2 Z^{-1} \ldots \alpha_i a \beta' Z^{-1} \xi_1 a \zeta_1 Z^{-1} \xi_2 a \zeta_2 Z^{-1} \ldots$$

$$\ldots \xi_l'' Y^{-1} g^{-1} Y^{-1} \xi_l' a \zeta_l' Z a^{-1} Z \zeta_l'' Z^{-1} \zeta'_{l-1} Z^{-1} \ldots \zeta_2' Z^{-1} \zeta_1' Z^{-1} \beta''$$

$$Z^{-1} \ldots \alpha_k \to \ldots \to 1,$$

где через $\xi_1, \ldots, \xi_{l-1}, \xi_l', \xi_l''$ обозначены слова, составленные из u, b, W, YgY, а через $\zeta_1, \ldots, \zeta_{l-1}, \zeta_l', \zeta_l'', \zeta'_{l-1}, \ldots, \zeta_1'$ — слова, составленные из b, v, YbY^{-1}, $Za^{-1}Z$.

I. 1. 1. a^{-1} сокращается с буквой a из ζ_l' или из ζ_l''.

а) пусть a^{-1} сокращается с буквой a из ζ_l'. Тогда

$$\zeta_l'(b, v, YbY^{-1}, Za^{-1}Z) \overset{\circ}{=} \zeta_0'(b, v, YbY^{-1},$$
$$Za^{-1}Z)Z^{-1}aZ^{-1}\gamma^{-1}(b, v, YbY^{-1})$$

($\zeta_0'(b, v, YbY^{-1}, Za^{-1}Z)$ будем обозначать через ζ_0'). Буква a должна быть правее всех букв a^σ в ζ_l', так как рассматриваемое сокращение букв a^{-1} и a — первое. Очевидно, над a ii)-преобразования совершаться не могут, ибо a^{-1} и a сокращаются первыми — иначе между ними появятся новые буквы a^σ. Следовательно, над $\underline{a}$ могут совершаться только i)-преобразования. Заменяем вторую часть (11) (после порождения $\underline{a}^{-1}$) канонической последовательностью, связанной с буквой a:

$$\alpha_1 a\beta_1 Z^{-1}\alpha_2 a\beta_2 Z^{-1}\ldots\alpha_i a\beta' Z^{-1}\xi_1 a\zeta_1 Z^{-1}\xi_2 a\zeta_2 Z^{-1}\ldots$$
$$\ldots\xi_l'' Y^{-1}g^{-1}Y^{-1}\gamma YgY\xi_0' a\zeta_0' Z^{-1}\underline{a}Z^{-1}\gamma^{-1}Za^{-1}Z\zeta_l'' Z^{-1}\zeta'_{l-1}Z^{-1}\ldots$$
$$\zeta_1' Z^{-1}\beta'' Z^{-1}\ldots$$
$$\ldots\alpha_k \to \ldots \to \alpha_1 a\beta_1 Z^{-1}\alpha_2 a\beta_2 Z^{-1}\ldots\alpha_i a\beta' Z^{-1}\xi_1 a\zeta_1 Z^{-1}\xi_2 a\zeta_2 Z^{-1}\ldots$$
$$\ldots\xi_l'' Y^{-1}g^{-1}Y^{-1}\gamma YgY\xi_0' a\zeta_0' Z^{-1}\gamma_1(u, b, W)\underline{a}\gamma_1^{-1}(b, v, YbY^{-1})Z^{-1}\gamma^{-1}Z\underline{a}^{-1}$$
$$Z\zeta_l'' Z^{-1}\ldots$$
$$\ldots\zeta_1' Z^{-1}\beta'' Z^{-1}\ldots\alpha_k \to \ldots \to 1$$

($\xi_l'(u, b, W, YgY) \overset{\circ}{=} \gamma(u, b, W)YgY\xi_0'(u, b, W, YgY)$, поскольку $\zeta_l' \overset{\circ}{=} \zeta_0' Za^{-1}Z\gamma^{-1}(b, v, YbY^{-1})$).

В этой последовательности получаем независимые переходы без вставок букв a^σ:

а) $\gamma_1^{-1}(b, v, YbY^{-1})Z^{-1}\gamma^{-1}(b, v, YbY^{-1})Z \to \ldots \to 1$;

б) $\alpha_1 a\beta_1 Z^{-1}\alpha_2 a\beta_2 Z^{-1}\ldots\alpha_i a\beta' Z^{-1}\xi_1 a\zeta_1 Z^{-1}\xi_2 a\zeta_2 Z^{-1}\ldots$

$\ldots\xi_l'' Y^{-1}g^{-1}Y^{-1}\gamma YgY\xi_0' a\zeta_0' Z^{-1}\gamma_1(u, b, W)Z\zeta_l'' Z^{-1}\zeta'_{l-1}Z^{-1}\ldots$

$\ldots\zeta_1' Z^{-1}\beta'' Z^{-1}\ldots\alpha_k \to \ldots \to 1.$

Из а) следует, что $\gamma_1^{-1}(b, v, YbY^{-1})Z^{-1}\gamma^{-1}(b, v, YbY^{-1})Z \overset{G_i}{=} 1$ и, следовательно, по лемме **5**: $\gamma_1^{-1}(b, v, YbY^{-1}) \quad 1$, $\gamma^{-1}(b, v, YbY^{-1}) \equiv 1$.

Но тогда можно построить последовательности из одних вставок:

$$1 \to \ldots \to Z^{-1}\gamma_1(u,\ b,\ W)Z;\ 1 \to \ldots \to Yg^{-1}Y^{-1}\gamma(u,\ b,\ W)YgY.$$

В таком случае (11) можно заменить следующей последовательностью:

$$(12)\qquad \alpha_1 a\beta_1 Z^{-1}\alpha_2 a\beta_2 Z^{-1}\ldots\alpha_i a\beta' Z^{-1}aZ^{-1}\beta'' Z^{-1}\ldots\alpha_k$$

$$\to\ldots\to\alpha_1 a\beta_1 Z^{-1}\alpha_2 a\beta_2 Z^{-1}\ldots\alpha_i a\beta' Z^{-1}\xi_1 a\zeta_1 Z^{-1}\xi_2 a\zeta_2 Z^{-1}\ldots$$

$$\ldots\xi_l''\xi_0' a\zeta_0'\zeta_l'' Z^{-1}\zeta'_{l-1}Z^{-1}\ldots\zeta_1' Z^{-1}\beta'' Z^{-1}\ldots\alpha_k$$

$$\to\ldots\alpha_1 a\beta_1 Z^{-1}\alpha_2 a\beta_2 Z^{-1}\ldots\alpha_i a\beta' Z^{-1}\xi_1 a\zeta_1 Z^{-1}\xi_2 a\zeta_2 Z^{-1}\ldots$$

$$\ldots\xi_l' Y^{-1}g^{-1}Y^{-1}\gamma YgY\xi_0' a\zeta_0' Z^{-1}\gamma_1 Z\zeta_l'' Z^{-1}\zeta'_{l-1}Z^{-1}\ldots\zeta_1' Z^{-1}\beta'' Z^{-1}\ldots$$

$$\ldots\alpha_k \to\ldots\to 1.$$

С индексом, меньшим чем индекс перехода (11), в (12) совершаются 2 *ii*)-преобразования меньше чем у (11), а сделанные во второй части (12) вставки не меняют индекса. Заменяя в (6) последовательность (10) последовательностью (12), получим новую последовательность с меньшим чем λ_0+1 индексом, к которой применяем индукционное предположение.

б) пусть a^{-1} сокращается с буквой a из ζ_l''. Тогда

$$\zeta_l'' \overset{\circ}{=} \gamma^{-1}(b,\ v,\ YbY^{-1})Z^{-1}aZ^{-1}\zeta_0''(b,\ v,\ YbY^{-1},\ Za^{-1}Z),$$

$$\xi_l'' \overset{\circ}{=} \xi_0''(u,\ b,\ W,\ YgY)YgY\gamma(u,\ b,\ W).$$

Заменяем вторую часть (11) канонической последовательностью, связанной с буквой a. В новой последовательности получим независимые переходы без вставок букв a^σ:

а) $Z^{-1}\gamma^{-1}(b,\ v,\ YbY^{-1})Z^{-1}\varkappa(u,\ b,\ v,\ YgY) \to\ldots\to 1$;

б) $\alpha_1 a\beta_1 Z^{-1}\alpha_2 a\beta_2 Z^{-1}\ldots\xi_0'' YgY\gamma\, Y^{-1}g^{-1}Y^{-1}\xi_l' a\zeta_l' Z\varkappa^{-1}(b,\ v,\ YbY^{-1},\ Za^{-1}Z)$
$Z^{-1}\zeta_0'' Z^{-1}\zeta'_{l-1}Z^{-1}\ldots\zeta_1' Z^{-1}\beta'' Z^{-1}\ldots\alpha_k \to\ldots\to 1.$

Из а) следует, что $Z\gamma^{-1}(b,\ v,\ YbY^{-1})\ Z^{-1}\varkappa(u,\ b,\ W,\ YgY) \overset{G_1}{=} 1$ и, следовательно, рассуждая точно так же, как и в доказательстве леммы 3, получим $\varkappa(u,\ b,\ W,\ YgY) = 1$. Но тогда $\varkappa(u,\ b,\ W,\ YgY)$ можно сократить, а к полученному слову применима лемма 5, т. е. $\gamma^{-1}(b,\ v,\ YgY^{-1}) = 1$. В таком случае можно построить последовательности из одних вставок:

$$1 \to\ldots\to Z\varkappa^{-1}(b,\ v,\ YbY^{-1},\ Za^{-1}Z)Z^{-1}$$

с индексом, равным индексу последовательности

$$a \to\ldots\to \varkappa(u,\ b,\ W,\ YgY)a\varkappa^{-1}(b,\ v,\ YbY^{-1},\ Za^{-1}Z)$$

всех i)- и ii)-преобразований над a в (11), и

$$1 \to \ldots \to YgY\gamma(u, b, W)Y^{-1}g^{-1}Y^{-1}.$$

Но в этом случае (11) можно заменить последовательностью

$$(13)\quad \alpha_1 a\beta_1 Z^{-1}\alpha_2 a\beta_2 Z^{-1}\ldots\alpha_i a\beta' Z^{-1}aZ^{-1}\beta'' Z^{-1}\ldots\alpha_k$$
$$\to\ldots\to\alpha_1 a\beta_1 Z^{-1}\alpha_2 a\beta_2 Z^{-1}\ldots\alpha_i a\beta' Z^{-1}\xi_1 a\zeta_1 Z^{-1}\xi_2 a\zeta_2 Z^{-1}\ldots$$
$$\ldots\xi_0''\xi_l' a\zeta_l'\zeta_0'' Z^{-1}\zeta'_{l-1}Z^{-1}\ldots\zeta_1' Z^{-1}\beta'' Z^{-1}\ldots\alpha_k$$
$$\to\ldots\to\alpha_1 a\beta_1 Z^{-1}\alpha_2 a\beta_2 Z^{-1}\ldots\alpha_i a\beta' Z^{-1}\xi_1 a\zeta_1 Z^{-1}\xi_2 a\zeta_2 Z^{-1}\ldots$$
$$\ldots\xi_0'' YgY\gamma(u, b, W)Y^{-1}g^{-1}Y^{-1}\xi_l' a\zeta_l' Z\varkappa^{-1}(b, v, YbY^{-1},$$
$$Za^{-1}Z)Z^{-1}\zeta_0'' Z^{-1}\zeta'_{l-1}Z^{-1}\ldots\zeta_1' Z^{-1}\beta'' Z^{-1}\ldots\alpha_k\to\ldots\to 1$$

с меньшим чем (11) индексом. Заменяя в (6) последовательность (10) последовательностью (13), получим новую последовательность с меньшим чем λ_0+1 индексом, к которой применимо индукционное предположение.

I. 1. **2.** a^{-1} сокращается с буквой a, порожденной буквой a из множителя $\zeta_l' \circ \zeta_0'(b, v, YbY^{-1}, Za^{-1}Z)Z^{-1}aZ^{-1}\gamma^{-1}(b, v, YbY^{-1})$. Заменяя вторую часть (11) канонической последовательностью, связанной с наследственной цепочкой, порождающей a, получим в новой последовательности независимый переход без вставок букв a^σ:

$$\varkappa_h' Z^{-1}\varkappa'_{h-1}Z^{-1}\ldots\varkappa_2' Z^{-1}\varkappa_1' Z^{-1}\gamma^{-1}(b, v, YbY^{-1})Z\to\ldots\to 1,$$

где через $\varkappa_1',\ldots,\varkappa_h'$ обозначены слова, составленные из b, v, YbY^{-1}, $Za^{-1}Z$. Но рассматриваемое сокращение букв a^{-1} и a — первое и, следовательно,

$$\varkappa_i'(b, v, YbY^{-1}, Za^{-1}Z)\circ\gamma_i^{-1}(b, v, YbY^{-1}),\quad i=1,\ldots,h.$$

Тогда

$$\gamma_h^{-1}(b, v, YbY^{-1})Z^{-1}\gamma_{h-1}^{-1}(b, v, YbY^{-1})Z^{-1}\ldots$$
$$\ldots\gamma_1^{-1}(b, v, YbY^{-1})Z^{-1}\gamma^{-1}(b, v, YbY^{-1})Z\to\ldots\to 1$$

без вставок букв a^σ, т. е. в группе G_7. По лемме 5 $h=1$ в противоречие с тем, что буква a порождается в (11) буквой a из множителя ζ_l'. Следовательно, этот случай невозможен.

I. 1. 3. a^{-1} сокращается с буквой a, порожденной буквой a из ζ_l''. Поскольку a^{-1} и a сокращается первыми, этот случай невозможен, так как при построении канонической последовательности, связанной с

наследственной цепочкой, порождающей $\underline{a}$, между $\underline{a}^{-1}$ и $\underline{a}$ появятся буквы a^{σ}.

I. 1. 4. a^{-1} сокращается с буквой a, находящейся слева от множителя ζ_l'.

Очевидно, это может быть только та буква a, которая находится непосредственно до ζ_l', иначе сокращение a^{-1} и $\underline{a}$ не будет первым. В таком случае $\zeta_l' \overset{\circ}{=} \gamma^{-1}(b, v, YbY^{-1})$ и над a не могут совершаться ii)-преобразования, так как в результате этих преобразований между $\underline{a}^{-1}$ и $\underline{a}$ появятся буквы a^{σ}. Заменяя вторую часть (11) канонической последовательностью, связанной с a, получим в этой последовательности независимый переход без вставок букв a^{σ}:

$$\varkappa^{-1}(b, v, YbY^{-1})\gamma^{-1}(b, v, YbY^{-1})Z \to \ldots \to 1.$$

Но тогда $\varkappa^{-1}(b, v, YbY^{-1})\gamma^{-1}(b, v, YbY^{-1})Z \overset{G_7}{=} 1$, в противоречии с леммой 5. Этот случай невозможен.

I. 1. 5. a^{-1} сокращается с буквой $\underline{a}$, порождаемой в (11) некоторой буквой a слева от ζ_l'.

Порождающей буквой может быть лишь буква a, находящаяся непосредственно до ζ_l'. Заменяем вторую часть (11) канонической последовательностью, связанной с наследственной цепочкой, порождающей a:

$$(14)\qquad \alpha_1 a\beta_1 Z^{-1}\alpha_2 a\beta_2 Z^{-1}\ldots\alpha_i a\beta' Z^{-1}\xi_1 a\zeta_1 Z^{-1}\xi_2 a\zeta_2 Z^{-1}\ldots$$

$$\ldots\xi_l'' Y^{-1}g^{-1}Y^{-1}\xi_l' a\zeta_l' Z\underline{a}^{-1}Z\zeta_l'' Z^{-1}\zeta'_{l-1}Z^{-1}\ldots\zeta_1' Z^{-1}\beta'' Z^{-1}$$

$$\ldots\alpha_k \to \ldots$$

$$\to \alpha_1 a\beta_1 Z^{-1}\alpha_2 a\beta_2 Z^{-1}\ldots\alpha_i a\beta' Z^{-1}\xi_1 a\zeta_1 Z^{-1}\xi_2 a\zeta_2 Z^{-1}\ldots$$

$$\ldots\xi_l'' Y^{-1}g^{-1}Y^{-1}\xi_l''\varkappa_1 a\chi_1 Z^{-1}\varkappa_2 a\chi_2 Z^{-1}\ldots\varkappa_s a\chi_s Z^{-1}\chi'_{s-1}Z^{-1}\ldots$$

$$\ldots\chi_1' Z^{-1}\zeta_l' Z\underline{a}^{-1}Z\zeta_l'' Z^{-1}\zeta'_{l-1}Z^{-1}\ldots\zeta_1' Z^{-1}\beta'' Z^{-1}\ldots\alpha_k \to \ldots \to 1,$$

где через $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_s$ обозначены слова, составленные из u, b, W, YgY, а через $\chi_1, \ldots, \chi_s$, $\chi_1', \ldots, \chi'_{s-1}$ — слова, составленные из b, v, YbY^{-1}, $Za^{-1}Z$. В второй части (14) a^{-1} и $\underline{a}$ могут лишь сократиться. Поэтому получаем независимый переход без вставок a^{σ}:

$$\chi_s Z^{-1}\chi'_{s-1}Z^{-1}\ldots\chi_1'\zeta_l' Z \to \ldots \to 1.$$

Но $\underline{a}^{-1}$ и $\underline{a}$ сокращаются первыми и, следовательно,

$$\chi_i'(b, v, YbY^{-1}, Za^{-1}Z) \overset{\circ}{=} \gamma_i^{-1}(b, v, YbY^{-1}), \quad i=1, \ldots, s-1,$$

$$\chi_s(b, v, YbY^{-1}, Za^{-1}Z) \overset{\circ}{=} \gamma_s^{-1}(b, v, YbY^{-1}),$$

$\zeta_l'(b, v, YbY^{-1}, Za^{-1}Z) \circ \gamma^{-1}(b, v, YbY^{-1})$. Но тогда и $\xi_l'(u, b, W, YgY) \circ \gamma(u, b, W)$. Кроме того

$$\gamma_s^{-1}(b, v, YbY^{-1})Z^{-1}\ldots\gamma_1^{-1}(b, v, YbY^{-1})\gamma^{-1}(b, v, YbY^{-1})Z \to \ldots \to 1$$

без вставок букв a^σ, т. е. в группе G_τ. По лемме 5 $s=2$, т. е.

$$\gamma_2^{-1}Z^{-1}\gamma_1^{-1}\gamma^{-1}Z \overset{G}{=} 1,\ \gamma_2^{-1}(b, v, YbY^{-1}) = 1, \gamma_1^{-1}(b, v, YbY^{-1})\ \gamma^{-1}(b, v, YbY^{-1}) = 1.$$

В этом случае (14) выглядит так:

$$(15)\qquad \alpha_1 a\beta_1 Z^{-1}\alpha_2 a\beta_2 Z^{-1}\ldots\alpha_i a\beta' Z^{-1}\xi_1 a\zeta_1 Z^{-1}\xi_2 a\zeta_2 Z^{-1}\ldots$$
$$\ldots\xi_l' Y^{-1}g^{-1}Y^{-1}\gamma(u, b, W)a\gamma^{-1}(b, v, YbY^{-1})Za^{-1}Z\zeta_l'' Z^{-1}\zeta'_{l-1}Z^{-1}$$
$$\ldots\zeta_1' Z^{-1}\beta'' Z^{-1}\ldots$$
$$\ldots\alpha_k \to \ldots \to \alpha_1 a\beta_1 Z^{-1}\alpha_2 a\beta_2 Z^{-1}\ldots\alpha_i a\beta' Z^{-1}\xi_1 a\zeta_1 Z^{-1}\xi_2 a\zeta_2 Z^{-1}\ldots$$
$$\ldots\xi_l'' Y^{-1}g^{-1}Y^{-1}\gamma(u, b, W)\gamma_1(u, b, W)YgY\varkappa(u, b, W, YgY)$$
$$a\chi_1(b, v, YbY^{-1}, Za^{-1}Z)$$
$$Z^{-1}\gamma_2(u, b, W)a\gamma_2^{-1}(b, v, YbY^{-1})Z^{-1}\gamma_1^{-1}(b, v, YbY^{-1})$$
$$\gamma^{-1}(b, v, YbY^{-1})Za^{-1}Z\zeta_l'' Z^{-1}\ldots$$
$$\ldots\zeta_1' Z^{-1}\beta'' Z^{-1}\ldots\alpha_k \to \ldots \to P_j' a a^{-1}P_j'' \to P_j' P_j' \to \ldots \to 1.$$

Получаем следующие независимые переходы:

а) $a \to \ldots \to \gamma_1(u, b, W)YgY\varkappa(u, b, W, YbY)a\chi(b, v, YbY^{-1}, Za^{-1}Z)$
$Z^{-1}\gamma_2(u, b, W)a\gamma_2^{-1}(b, v, YbY^{-1})Z^{-1}\gamma_1^{-1}(b, v, YbY^{-1})$;

б) $\alpha_1 a\beta_1 Z^{-1}\alpha_2 a\beta_2 Z^{-1}\ldots\alpha_i a\beta' Z^{-1}\xi_1 a\zeta_1 Z^{-1}\xi_2 a\zeta_2 Z^{-1}\ldots\xi_l'' Y^{-1}g^{-1}Y^{-1}$
$\gamma(u, b, W)\gamma_1(u, b, W)YgY\varkappa(u, b, W, YgY)a\chi_1(b, v, YbY^{-1},$
$Za^{-1}Z)\ Z^{-1}\gamma_2(u, b, W) \to \ldots \to P_j'$;

в) $Z\zeta_l'' Z^{-1}\zeta'_{l-1}Z^{-1}\ldots\zeta_1' Z^{-1}\beta'' Z^{-1}\ldots\alpha_k \to \ldots \to P_j''$;

г) $P_j' P_j'' \to \ldots \to 1$.

Но $\gamma_1^{-1}(b, v, YbY^{-1})\gamma^{-1}(b, v, YbY^{-1}) = 1$, $\gamma_2^{-1}(b, v, YbY^{-1}) = 1$ и, следовательно, существуют последовательности из одних вставок:

д) $1 \to \ldots \to Y^{-1}g^{-1}Y^{-1}\gamma(u, b, W)\gamma_1(u, b, W)YgY$;

е) $1 \to \ldots \to Z^{-1}\gamma_2(u, b, W)Z$.

Используя переходы а) — е), (11) можно заменить в (6) следующей последовательностью с меньшим индексом (здесь число ii) преобразований на единицу меньше):

$$(16)\quad \alpha_1 a\beta_1 Z^{-1}\alpha_2 a\beta_2 Z^{-1}\ldots\alpha_i a\beta' Z^{-1} a Z^{-1}\beta'' Z^{-1}\ldots\alpha_k \to\ldots\to$$

$$\alpha_1 a\beta_1 Z^{-1}\alpha_2 a\beta_2 Z^{-1}\ldots\alpha_i a\beta' Z^{-1}\xi_1 a\zeta_1 Z^{-1}\xi_2 a\zeta_2 Z^{-1}\ldots\xi_l''\varkappa(u, b, W, YgY)$$

$$a\chi(b, v, YbY^{-1}, Za^{-1}Z)\zeta_l'' Z^{-1}\ldots\zeta_1' Z^{-1}\beta'' Z^{-1}\ldots\alpha_k\to\ldots\to$$

$$\alpha_1 a\beta_1 Z^{-1}\alpha_2 a\beta_2 Z^{-1}\ldots\alpha_i a\beta' Z^{-1}\xi_1 a\zeta_1 Z^{-1}\xi_2 a\zeta_2 Z^{-1}\ldots\xi_l'' Y^{-1}g^{-1}Y^{-1}$$

$$\gamma(u, b, W)\gamma_1(u, b, W)YgY\varkappa(u, b, W, YgY)a\chi(b, v, YbY^{-1}, Za^{-1}Z)Z^{-1}$$

$$\gamma_2(u, b, W)Z\zeta_l'' Z^{-1}\zeta'_{l-1}Z^{-1}\ldots\zeta_1' Z^{-1}\beta'' Z^{-1}\ldots\alpha_k\to\ldots\to P_j' Z\zeta_l'' Z^{-1}\zeta'_{l-1}Z^{-1}\ldots$$

$$\ldots\zeta_l' Z^{-1}\beta'' Z^{-1}\ldots\alpha_k\to\ldots\to P_j' P_j''\to\ldots\to 1.$$

Но тогда получим последовательность с меньшим чем λ_0+1 индексом, к которой применимо индукционное предположение.

I. 1. 6. a^{-1} сокращается с буквой a справа от ζ_l''.

Пусть a входит в множител ζ_s' $(1\leqq s\leqq l-1)$. Ввиду того, что a^{-1} и a сокращаются первыми, получаем:

$\zeta_s'\circ\gamma_s'(b, v, YbY^{-1})Z^{-1}a\,Z^{-1}\zeta_0'(b, v, YbY^{-1}, Za^{-1}Z)$, $\zeta_l''\circ\gamma_l''(b, v, YbY^{-1})$, $\zeta_i'\circ\gamma_i'(b, v, YbY^{-1})$, $i=s-1,\ldots, l-1$. Заменяя вторую часть (11) канонической последовательностью, связанной с a, получаем независимый переход без вставок букв a^σ:

$$Z\gamma_l''(b, v, YbY^{-1})Z^{-1}\gamma'_{l-1}(b, v, YbY^{-1})Z^{-1}\ldots$$

$$\ldots\gamma_s'(b, v, YbY^{-1})Z^{-1}\varkappa(u, b, W, YgY)\to\ldots\to 1,$$

т. е. в группе G_7. Рассуждая совершенно так же, как и в доказательстве леммы 3, получаем $\varkappa(u, b, W, YgY)=1$. Но тогда $\varkappa$ можно сократить, а к полученному слову уже применима лемма 5. Получаем, что $s=l$ в противоречие с тем, что a входит в множитель ξ' $(1\leqq s\leqq l-1)$.

I. 1. 7. a^{-1} сокращается с буквой a, порождаемой некоторой буквой a справа от ζ_l''.

Рассматривая каноническую последовательность, для второй части (11), связанную с наследственной цепочкой, порождающей a, получаем противоречие с тем, что a^{-1} и a сокращаются первыми, ибо между ними появятся новые буквы a^σ.

Случай I. 1 рассмотрен.

I. 2. a^{-1}, которая сокращается первой в (10), порождается буквой a, не входящей в множитель типа $\beta(b, v, YbY^{-1}, Za^{-1}Z)$.

Этот случай рассматривается аналогично случаю I. 1.

I. 3. a^{-1}, которая сокращается первой в (10), содержится в начальном слове перехода (10).

Очевидно, она должна входить в некоторое слово типа $\beta(b, v, YbY^{-1}, Za^{-1}Z)$. Рассмотрение этого случая аналогично случаю I. 1., однако здесь не будет канонической последовательности, связанной с наследственной цепочкой, порождающей a^{-1}.

II. Буква a, с которой сокращается a^{-1} в (6), порождается буквой a из слова P_i'', или содержится в P_i''.

В этом случае $P_i'' \circ P_{i_1}''aP_{i_2}''$. Заменяем (6) канонической последовательностью, связанной с наследственной цепочкой, порождающей a. Получаем

$$P_i'\underline{a}^{-1}aP_{i_1}''aP_{i_2}'' \to \ldots \to P_i'\underline{a}^{-1}aP_{i_1}''\alpha_1 a\beta_1 Z^{-1}\alpha_2 a\beta_2 Z^{-1}\ldots\alpha_k a\beta_k Z^{-1}\ldots$$

$$\ldots\beta_1' P_{i_2}'' \to \ldots \to P_j'\underline{a}^{-1}aP_j'' \to P_j' P_j'' \to \ldots \to 1.$$

Имеются следующие независимые переходы без вставок букв a^{σ}:

а) $a \to \ldots \to \alpha_1 a\beta_1 Z^{-1}\alpha_2 a\beta_2 Z^{-1}\ldots\alpha_k \underline{a}\beta_k Z^{-1}\beta'_{k-1}Z^{-1}\ldots\beta_1'$;

б) $aP_{i_1}''\alpha_1 a\beta_1 Z^{-1}\alpha_2 a\beta_2 Z^{-1}\ldots\alpha_k \to \ldots \to 1$;

в) $\beta_k Z^{-1}\beta'_{k-1}Z^{-1}\ldots\beta_1' P_{i_2}'' \to \ldots \to P_j''$;

г) $P_i' \to \ldots \to P_j'$;

д) $P_j'P_j'' \to \ldots \to 1$.

Применяя лемму 6.3 к последовательности б), получаем

$$P_{i_1}''\alpha_1 a\beta_1 Z^{-1}\alpha_2 a\beta_2 Z^{-1}\ldots\alpha_k a \to \ldots \to 1$$

с тем же индексом. Используя эти переходы, строим новую последовательность

$$P_1 \to \ldots \to P_i'P_{i_1}''aP_{i_2}'' \to \ldots \to P_i'P_{i_1}''\alpha_1 a\beta_1 Z^{-1}\alpha_2 a\beta_2 Z^{-1}\ldots$$

$$\ldots\alpha_k a\beta_k Z^{-1}\beta'_{k-1}Z^{-1}\ldots\beta_1' P_{i_2}' \to \ldots \to P_i'\beta_k Z^{-1}\beta'_{k-1}Z^{-1}\ldots\beta_1' P_{i_2}'' \to$$

$$\to \ldots \to P_i'P_j'' \to \ldots \to P_j'P_j'' \to \ldots \to 1$$

с индексом λ_0 (нет вставки $\underline{a}^{-1}a$). К этой последовательности применяем индукционное предположение.

В. Левосторонняя вставка

(17) $$P_1 \to \ldots \to P_i'P_i'' \to P_i'a\underline{a}^{-1}P_i'' \to \ldots \to 1.$$

Возможны 3 случая:

В. 1. a^{-1} сокращается в последовательности (17) с буквой a, появляющейся в (17) справа от нее.

Рассматривается аналогично случаю А. 1.

В. 2. a^{-1} сокращается в (17) с буквой a той индивидуальности, с которой она вставлена.

Рассмотрение идет, как и в А. 2., с этой разницей, что вместо леммы 3 будем пользоваться леммой 4.

В. 3. a^{-1} сокращается в (17) с буквой a, появляющейся в (17) слева от нее и отличной по индивидуальности от той буквы a, с которой буква a^{-1} вставлена.

Рассуждая, как и в случаю А. 3., получим вместо (10) последовательность

$$\beta_k(b,\ v,\ YbY^{-1},\ Za^{-1}Z)Z^{-1}\beta'_{k-1}(b,\ v,\ YbY^{-1},\ Za^{-1}Z)Z^{-1}\ldots$$

$$\ldots\beta_2'(b,\ v,\ YbY^{-1},\ Za^{-1}Z)Z^{-1}\beta_1'(b,\ v,\ YbY^{-1},\ Za^{-1}Z)\to\ldots\to 1.$$

Дальнейшее рассмотрение этого случая идет, как и в пунктах I. 1. и I. 3., только здесь не все возможности пунктов I, 1. и I. 3. будут появляться.

Лемма 7 доказана.

Лемма 8: Пусть $W\neq 1$ в G_τ. Тогда группа G_τ является подгруппой группы G_x.

Доказательство этой леммы следует из леммы 7 и из того, что все образующие и определяющие соотношения группы G_τ являются таковыми и в группе G_x.

Обозначим через τ кодировку, полученную при подстановке в μ слов aba^{-1} и $a^{-1}ba$ соответственно вместо u и v. Получим

$$\tau(g_i)\circ\!\!-\ a^{-1}b^{-1}ab^{-i}ab^{-1}a^{-1}b^ia^{-1}bab^{-i}aba^{-1}b^i,\quad i=1,\ldots,\ n+2,$$

$$\tau(g)\circ\!\!-\ g,\quad \tau(b)\circ\!\!-\ b,\quad \tau(u)\circ\!\!-\ aba^{-1},\quad \tau(v)\circ\!\!-\ a^{-1}ba.$$

Тогда группа G_x изоморфна группе G_x':

$$G_x'=\langle\!\langle a,\ b,\ g;\ A_1''=1,\ldots,\ A_m''=1,\ W_1a=aY_1bY_1^{-1},\ g^r=1,$$

$$g=Y_1^{-1}aZ_1a^{-1}Z_1a^{-1}Y_1^{-1}\rangle\!\rangle,$$

где $$A_j''\circ\!\!-\ \tau(B_j),\ j=1,\ldots,\ m;\ W_1\circ\!\!-\ \tau(X),\ X\in\mathbf{A};\ Y_1\circ\!\!-\ \tau(g_{n+1}),$$

$$Z_1\circ\!\!-\ \tau(g_{n+2}).$$

Поскольку образующая g группы G_x' выражается через a и b, то G_x' изоморфна группе

$$G_x''=\langle\!\langle a,\ b;\ A_1''=1,\ \ldots,A_m''=1,\ W_1a=aY_1bY_1^{-1},$$

$$(Y_1^{-1}aZ_1a^{-1}Z_1a^{-1}Y_1^{-1})^r=1\rangle\!\rangle.$$

§ 3. Невозможность некоторых алгоритмов распознавания групповых свойств в минимальных алфавитах.

Абстрактное (т. е. сохраняющееся при изоморфизме) групповое свойство M будем называть марковским свойством, если имеется к. о. группа J_1, обладающая свойством M, и имеется к. о. группа J_2, не вложимая ни в какую группу с этим свойством.

Если J_1 — к. о. группа с p образующими, то будем говорить, что M марковское свойство в p-буквенном алфавите. Класс всех марковских свойств в p-буквенном алфавите обозначим через $\mathbf{M}_p$.

Марковское свойство M в p-буквенном алфавите ($p \geqq 1$) будем относить к классу $\mathbf{F}_p$ тогда и только тогда, когда соответствующая свойству M группа J_1 имеет образующий элемент конечного порядка. Марковское свойство $M \in \mathbf{M}_p$ ($p \geqq 1$) будем относить к классу $\mathbf{L}_p$ тогда и только тогда, когда J_1 имеет элемент бесконечного порядка.

В последующих доказательствах будем пользоваться обозначениями § 2 настоящей работы.

Теорема 1. Пусть $M \in \mathbf{F}_p$. Тогда для всякого алфавита с числом букв большим или равным $p+1$, неразрешима проблема распознавания свойства M в этом алфавите.

Доказательство. Возьмем в качестве произвольной к. о. группы A (см. начало § 2) к. о. группу J_2, не вложимую ни в какую группу со свойством M, а в качестве r — порядок той образующей d_1 группы $J_1 = \langle\langle d_1, \ldots, d_p;\ D_1 = 1, \ldots, D_l = 1 \rangle\rangle$, которая имеет конечный порядок. Рассмотрим свободное произведение групп G_x и J_1 с объединенными подгруппами, порожденными соответственно словами $(Y_1^{-1} a Z_1 a^{-1} Z_1 a^{-1} Y_1^{-1})^{-1}$ и d_1. E_x записывается так:

$$E_x = \langle\langle a,\ b,\ d_1, \ldots, d_p;\ A_1'' = 1, \ldots, A_m'' = 1,\ W_1 a = a Y_1 b Y_1^{-1},\ D_1 = 1, \ldots,$$

$$D_l = 1, (Y_1^{-1} a Z_1 a^{-1} Z_1 a^{-1} Y_1^{-1})^r = 1,\ (Y_1^{-1} a Z_1 a^{-1} Z_1 a^{-1} Y_1^{-1})^{-1} = d_1 \rangle\rangle.$$

Очевидно E_x изоморфна группе

$$\langle\langle a,\ b,\ d_2, \ldots, d_p;\ A_1'' = 1, \ldots, A_m' = 1,\ W_1 a = a Y_1 b Y_1^{-1},\ (Y_1^{-1} a Z_1 a^{-1}$$

$$Z_1 a^{-1} Y_1^{-1})^r = 1,\ \tilde{D}_1 = 1, \ldots, \tilde{D}_l = 1 \rangle\rangle,$$

где $\tilde{D}_1, \ldots, \tilde{D}_l$ — слова $D_1, \ldots, D_l$, в которых вместо d_1 подставлено слово $(Y_1^{-1} a Z_1 a^{-1} Z_1 a^{-1} Y_1^{-1})^{-1}$.

Пусть $X \neq 1$ в G_0 ($X \in \mathbf{A}$). Тогда $X \neq 1$ в G_4 и по лемме 2: $W \neq 1$ в G_7. По лемме 8 к. о. группа G_7 является подгруппой к. о. группы G_x. Но $G_7 \cong G_6$, а в группе G_6 буква u — правильная проходная. Из леммы N следует, что G_5 есть подгруппа группы G_6, ибо G_5 является основа-

нием группы G_6 по проходной букве u. Далее $G_5 \cong G_4$, а $G_4 = G_0 * J_2 * \langle\langle g, g_{n+1}, g_{n+2}, b, v; g^r = 1 \rangle\rangle$.

Следовательно к. о. группа J_2 изоморфно вкладывается в группе G_x, а поскольку $G_x \cong G_x''$ — и в G_x''. На основании свойств свободного произведения с объединенными подгруппами получаем, что J_2 изоморфна подгруппе группы E_x' и, следовательно, J_2 вкладывается в E_x'. Но тогда E_x' не может обладать свойством M.

Пусть $X \overset{G_0}{=} 1$. Тогда $X \overset{G_4}{=} 1$ и, следовательно, $W \overset{G_7}{=} 1$. Но в таком случае $W \overset{G_x}{=} 1$ — все образующие и определяющие соотношения G_7 являются таковыми и в группе G_x. Отсюда следует, что $W_1 \overset{G_x''}{=} 1$, следовательно, $W \overset{E_x'}{=} 1$.

Из этого равенства и из определяющего соотношения $W_1 a = a Y_1 b Y_1^{-1}$ получаем $b=1$. В таком случае $A_j'' = 1$, $Y_1 = 1$, $Z_1 = 1$, $j=1,\ldots, m$ на основании кодировки τ. Поэтому E_x' изоморфна группе

$$\langle\langle a, d_2, \ldots, d_p;\ a^{-r}=1,\ D_1=1, \ldots, D_l=1 \rangle\rangle,$$

где $D_1, \ldots, D_l$ получаются из $D_1, \ldots, D_l$ подстановкой буквы a вместо буквы d_1. Однако эта группа изоморфна группе $J_1 = \langle\langle d_1, \ldots, d_p;\ D_1=1, \ldots, D_l=1 \rangle\rangle$ при соответствии $a \langle\!-\!\rangle d_1$, $d_i \langle\!-\!\rangle d_i$ $(i=2, \ldots, p)$, так как по условии $d_1^r = 1$ в J_1.

Следовательно, в этом случае E_x' обладает свойством M.

Получаем, что E_x' обладает M тогда и только тогда, когда $X \overset{G_0}{=} 1$. Из неразрешимости проблемы тождества $X=1$ для класса слов **A** и из того, что все группы E_x' в $p+1$-буквенном алфавите, следует, что для класса к. о. групп в $p+1$-буквенном алфавите

$$\{E_x'\}_{x \in A}$$

невозможен алгоритм распознавания свойства M. Теорема 1 доказана.

Следствие 1. Для всякого алфавита с числом букв большим или равным 2, неразрешима проблема распознавания в этом алфавите следующих свойств:

а) быть конечной группой;

б) быть периодической группой;

в) быть абелевой группой;

г) быть нильпотентной группой;

д) быть группой с разрешимой проблемой тождества слов (метапроблема тождества слов);

е) быть простой группой

и другие.

Для доказательства достаточно заметить, что всеми этими свойствами обладает группа $\langle\langle d;\ d^2=1 \rangle\rangle$ и, следовательно, они принадлежать классу $\mathbf{F}_1$.

Для этих свойств двухбуквенный алфавит является минимальным алфавитом, в котором неразрешима проблема распознавания рассматриваемых свойств. Действительно, все к. о. группы в однобуквенном алфавите обладают свойствами в), г) и д) и, следовательно, алгоритм распознавания в этом алфавите тривиален. Для свойств а) и б) в однобуквенном алфавите достаточно проверить имеет ли рассматриваемая группа определяющие соотношения, неравные 1 в свободной группе. Поскольку в однобуквенном алфавите все эти соотношения приводятся к виду $d^k=1$, то для распознавания свойства е) достаточно проверить является ли простым числом наибольший общий делитель всех показателей k.

В работе [6] доказано, что для класса марковских свойств $\mathbf{L}_p$ $p+1$-буквенный алфавит является минимальным алфавитом, в котором неразрешима проблема распознавания свойств этого класса. Точнее, доказаны следующие теоремы:

Теорема А. Пусть $M \in \mathbf{L}_p$. Тогда для всякого алфавита с числом букв, большим или равным $p+1$, неразрешима проблема распознавания свойства M в этом алфавите.

Теорема В. Для всякого положительного p существует марковское свойство $M_p \in \mathbf{L}_p$ такого, что для всякого алфавита, содержащего не более p букв, проблема распознавания свойства M_p уже разрешима.

Из теоремы 1 и теоремы А следует:

Теорема 2. Пусть $M \in \mathbf{M}_p$ и $p \geqq 1$. Тогда для всякого алфавита с числом букв, большим или равным $p+1$, неразрешима проблема распознавания свойства M в этом алфавите.

Действительно, допустим, что существует алгоритм распознавания свойства M из $\mathbf{M}_p$ $(p \geqq 1)$ в $p+1$-буквенном алфавите. Но $p \geqq 1$ и, следовательно, соответстующая M к. о. группа J_1 имеет хотя бы одну образующую d. Индукцией по n докажем, что $d^n \neq 1$ в J_1 для любого натурального n. Если $d^1=1$ в J_1, то образующая d группы J_1 — первого порядка. Но тогда $M \in \mathbf{F}_p$ и, следовательно, проблема распознавания M в $p+1$-буквенном алфавите неразрешима на основании теоремы 1, что противоречит нашему допущению.

Допустим, что для всех $k \leqq n$ утверждение доказано. Если $d^{n+1}=1$ в J_1, то на основании правильности утверждения в случае $k \leqq n$ получаем, что образующая d группы J_1 имеет порядок $n+1$. Но тогда $M \in \mathbf{F}_p$, по теореме 1 заключаем, что проблема распознавания M в $p+1$-буквенном алфавите неразрешима в противоречии с допущением. Утверждение доказано. Но если $d^n \neq 1$ в J_1 для любого натурального n, то d имеет в J_1 бесконечный порядок. В этом случае $M \in \mathbf{L}_p$ и, следовательно, проблема распознавания M в $p+1$-буквенном алфавите неразрешима по теореме A в противоречии с допущением о разрешимости проблемы распознавания свойства M в $p+1$-буквенном алфавите. Следовательно, алгоритм распознавания свойства M в $p+1$-буквенном алфавите невозможен. Теорема 2 доказана.

Легко видно, что $\mathbf{M}_0 \subset \mathbf{M}_1$, поскольку к классу $\mathbf{M}_0$ относятся марковские свойства единичной группы, а эту группу можно задать еще

как $\ll d;\ d=1\gg$. Следовательно, теорема 2 охватывает все марковские свойства, только свойств из $\mathbf{M}_0$ следует рассматривать в классу $\mathbf{M}_1$. В частности из этого замечания следует

Теорема 3. Для всякого алфавита с числом букв, большим или равным 2, неразрешима проблема распознавания изоморфизма единичной группе.

Этот двубуквенный алфавит является минимальным алфавитом, в котором неразрешима проблема распознавания изоморфизма единичной группе. Действительно, любая к. о. группа в меньшем чем 2-буквенном алфавите абелева и следовательно, с разрешимой проблемой тождества слов. Но тогда можно определить равен ли 1 образующий элемент группы или нет.

Следствие 2. Для всякого алфавита с числом букв, большим или равным 2, неразрешима проблема распознавания следующих свойств:

а) быть свободной группой;

б) быть бесконечной циклической группой;

в) быть группой без кручения;

г) быть относительно свободной группой данной экспонентой;

д) быть относительно свободной абелевой группой и другие.

Легко проверяется, что все эти свойства принадлежат классу $\mathbf{M}_1$.

Этот алфавит является минимальным алфавитом, в котором неразрешима проблема распознавания рассматриваемых свойств. Действительно, в однобуквенном алфавите легко установить какого порядка образующий элемент исследуемой к. о. группы и тем самым определить обладает ли она некоторым из вышеперечисленных свойств.

Теорема 4. Для всякого положительного p существует свойство $M_p \in \mathbf{M}_p$ такое, что для всякого алфавита, содержащего не более p букв, проблема распознавания свойства M_p в этом алфавите уже разрешима.

В качестве M_p можно взять свойство „быть изоморфным свободной группе p-ого ранга". Видно, что $M_p \in \mathbf{M}_p$. Алгоритм распознавания свойства M_p в алфавитах с меньшим чем $p+1$ числом букв приводится в доказательстве теоремы 3 работы [6].

Из теоремы 2 и теоремы 4 следует, что $p+1$-буквенный алфавит является минимальным алфавитом, в котором неразрешима проблема распознавания всех свойств из класса $\mathbf{M}_p$ ($p=1, 2, 3, \ldots$).

В связи с теоремой 2 следует заметить, что можно и директно построить класс к. о. групп в $p+2$-буквенном алфавите, для которого невозможен алгоритм распознавания некоторого произвольного марковского свойства. Действительно, пусть в группе

$$G_x''=\ll a,\ b;\ A_1''=1,\ldots,A_m''=1,\ W_1a=aY_1bY_1^{-1},$$
$$(Y_1^{-1}aZ_1a^{-1}Z_1a^{-1}Y_1^{-1})^r=1\gg$$

показатель r равен 1. Определим к. о. группу Γ_x как свободное произведение групп G_x'' и J_1 (J_1 соответствует рассматриваемого марковского свойства M). Если J_1 имеет вид $J_1=\langle\langle d_1,\ldots, d_p; D_1=1,\ldots, D_l=1\rangle\rangle$, то Γ_x можно записать так:

$$\Gamma_x=\langle\langle a, b, d_1,\ldots, d_p; A_1''=1,\ldots, A_m''=1, W_1a=aY_1bY_1^{-1}, D_1=1,\ldots, D_l=1,$$
$$Y_1^{-1}aZ_1a^{-1}Z_1a^{-1}Y_1^{-1}=1\rangle\rangle.$$

Пусть $X\neq 1$ в G_0 ($X\in \mathbf{A}$). Тогда $X\neq 1$ в G_4 и, следовательно, $W\neq 1$ в G_7 по лемме 2. По лемме 8 группа G_7 является подгруппой группы G_x. Кроме того $G_7\cong G_6$, а G_5 является подгруппой группы G_6 (по лемме 1 и лемме N). Имея ввиду, что G_x'' — подгруппа Γ_x, а $G_x''\cong G_x$, $G_4=G_0 * A * \langle\langle b, v\rangle\rangle * \langle\langle g, g_{n+1}, g_{n+2}; g^r=1\rangle\rangle$ получаем, что к. о. группа A изоморфно вкладывается в группе Γ_x. Если вместо A поставим к. о. группу J_2, не вложимую ни в какую группу со свойством M то Γ_x свойством M обладать не будет.

Пусть $X=1$ в G_0. Тогда $W=1$ в G_7 и, следовательно, $W_1=1$ в G_x''. Из $W_1=1$ в G_x'' из определяющих соотношений G_x'' следует, что $b=1$. Но тогда $A_j''=1$ ($j=1,\ldots,m$), $Y_1=1$, $Z_1=1$ на основании кодировки τ. В таком случае из $Y_1^{-1}aZ_1a^{-1}Z_1a^{-1}Y_1^{-1}=1$ следует $a=1$ и, следовательно, $G_x''\cong 1$. Получаем, что $\Gamma_x\cong J_1$, т. е. Γ_x обладает свойством M.

Из неразрешимости проблемы тождества $X=1$ для класса слов $\mathbf{A}$ из G_0 и из того, что все группы Γ_x в $p+2$-буквенном алфавите, следует, что невозможен алгоритм распознавания свойства $M\in \mathbf{M}_p$ ($p=0$, 1, 2, 3,...) для класса групп:

$$\{\Gamma_x\}_{x\in \mathbf{A}}.$$

Тем самым для любого свойства $M\in \mathbf{M}_p$ ($p=0, 1, 2,\ldots$) можно построить класс к. о. групп в $p+2$-буквенном алфавите, так что для этого класса неразрешима проблема распознавания свойства M.

ЛИТЕРАТУРА

1. Марков, А. А.: Теория алгорифмов. Труды МИАН, 42 (1954).
2. Цейтин, Г. С.: Относительно проблемы распознавания свойства ассоциативных исчислений. Докл. АН СССР, 107 (1956), № 2, 209—212.
3. Адян, С. И.: Неразрешимость некоторых алгоритмических проблем теории групп. Труды Моск. мат. об-ва, 6 (1957), 231—298.
4. Адян, С. И.: Конечно-определенные группы и алгоритмы. Докл. АН СССР, 117 (1957), № 1, 9—12.
5. Rabin, M. O.: Recursive unsolvability of group theoretic problems. Ann. of Math., 67 (1958), № 1, 172—194.
6. Павлов, Р. Д.: К проблеме распознавания групповых свойств. Математич. заметки, 10 (1971), вып. 2, 169—180.
7. Павлов, Р. Д.: Неразрешимость некоторых алгоритмических проблем теории групп в минимальных алфавитах. Докл. БАН, 24 (1971), № 7, 855—858.
8. Новиков, П. С.: Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества в теории групп. Труды МИАН, 44 (1955).

9. Britton, J. L.: The word problem. Ann. of Math., 77 (1963), № 1, 16—32.
10. Курош, Г. А.: Теория групп. М., 1967.

Постъпила на 11. XI. 1972 г.

IMPOSSIBILITY OF CERTAIN ALGORITHMS FOR RECOGNITION OF GROUP PROPERTIES IN MINIMAL ALPHABETS

R. D. Pavlov

(SUMMARY)

The problem of algorithmic recognition of invariant properties of algebraic systems is developed in the works of A. A. Markov, P. S. Novikov, S. I. Adjan, M. O. Rabin and other authors. In connection with this problem the following question arises: how much does the algorithmic unsolvability of the problem of recognition of invariant properties depend on the algebraic system and how much on the alphabet, in which the given problem is considered. In other words, the minimal alphabet is sought in which the algorithmic problem is unsolvable.

In the case of a semigroup A. A. Markov has proved that a number of properties of finitely presented semigroups are unrecognizable in n-letter alphabet, if $n>3$. G. S. Ceĭtin has improved these results, proving that they are true for $n\geq 2$. He has also proved that for invariant semigroup properties of a certain type, there exists a property of that type for which the recognition problem is solvable in $p+1$-letter alphabet, although they are algorithmically unrecogizable in $p+2$-letter alphabet.

In the present paper results similar to those of A. A. Markov and G. S. Ceĭtin are exposed, but in the case of group theory. More precisely, the unsolvability of the problem of recognition of any Markov property in $p+1$-letter alphabet (where p is the number of generators of a finitely presented group, which enjoys this property, $p\geq 1$) is proved. It is proved, that this alphabet is minimal, because in p-letter alphabet there exists a property of this class with solvable recognition problem.

The proof of unsolvability of the problem of recognition of isomorphism to the identity group is exposed, as well as the unsolvability of the meta word problem and the unsolvability of the recognition of many group properties in minimal 2-letter alphabet.

The results of this paper are a development of the results of [6]. Theorems 1 and 2 from [7] (without proofs there) have been also proved here in details. The other results have been announced at the 3 rd congress of Bulgarian mathematicians held in Varna 1972.