ИЗЛОЖЕНИЕ НА НЯКОИ ПРИЛОЖЕНИЯ НА ЕЛИПТИЧНИТЕ ФУНКЦИИ НА ЯКОБИ С ЕЛЕМЕНТАРНИ СРЕДСТВА

Димитричка Шопова

Ние показахме в една наша по-ранна работа [1], че теорията на елиптичните функции на Якоби в реална област може да се изложи с елементарни средства. Сега ще покажем как този начин на изложение може да се използва за някои от известните приложения на тези функции.

1. Средна аритметико-геометрична на две числа

Първо ще докажем формулата на Гаус

$$\operatorname{sn}\left(u, \frac{2\sqrt{K}}{1+K}\right)=\frac{(1+K)\operatorname{sn}\left(\frac{u}{1+K}, K\right)}{1+K\operatorname{sn}^2\left(\frac{u}{1+K}, K\right)}, \tag{1}$$

където K е реална константа между 0 и 1, u — променлива, описваща реалната ос.

Нека означим

$$\operatorname{sn}\left(\frac{u}{1+K}, K\right)=v.$$

Тогава равенството (1) добива вида

$$\operatorname{sn}\left(u, \frac{2\sqrt{K}}{1+K}\right)=\frac{(1+K)v}{1+Kv^2}. \tag{2}$$

Ще използуваме означението $F(t, K)$ за обратната функция на $\operatorname{sn}(u, K)$ при $u \in [0, S_0(K)]$, където с $S_0(K)$ е означена четвъртината от периода на $\operatorname{sn}(u, K)$.

Нека

$$u \in \left[0, S_0\left(\frac{2\sqrt{K}}{1+K}\right)\right) \cap [0, (1+K)S_0(K)).$$

Тогава $v \in [0, 1)$, функцията $\frac{(1+K)v}{1+Kv^2}$ е растяща и следователно поради строгото растене и на $\operatorname{sn}\left(u, \frac{2\sqrt{K}}{1+K}\right)$, v, равенството (2), т. е. и (1), е еквивалентно на равенството

$$u=F\left(\frac{(1+K)v}{1+Kv^2},\ \frac{2\sqrt{K}}{1+K}\right). \tag{3}$$

Като използуваме, че $F'(t, K)=\dfrac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-K^2t^2)}}$,

$$\frac{dv}{du}=\frac{1}{1+K}\sqrt{(1-v^2)(1-K^2v^2)},$$

получаваме

$$\frac{dF}{du}=1.$$

Следователно в интервала $\left[0,(1+K)S_0(K)\right)\cap\left[0,S_0\left(\frac{2\sqrt{K}}{1+K}\right)\right)$ имаме

$$F\left(\frac{(1+K)v}{1+Kv^2},\ \frac{2\sqrt{K}}{1+K}\right)-u=C.$$

При $u=0$, $v=0$ и следователно $C=0$, т. е. равенството (3) е доказано в по-малкия от интервалите $[0,(1+K)S_0(K))$, $\left[0, S_0\left(\frac{2\sqrt{K}}{1+K}\right)\right)$. Обаче ще видим, че тези интервали съвпадат.

Да предположим, че

$$(1+K)S_0(K)<S_0\left(\frac{2\sqrt{K}}{1+K}\right).$$

Тогава можем да пишем

$$(1+K)S_0(K)=\lim_{\substack{u\to(1+K)S_0(K)\\ u<(1+K)S_0(K)}} u=\lim_{v\to 1}F\left(\frac{(1+K)v}{1+Kv^2},\ \frac{2\sqrt{K}}{1+K}\right)=S_0\left(\frac{2\sqrt{K}}{1+K}\right).$$

Да предположим, че

$$(1+K)S_0(K)>S_0\left(\frac{2\sqrt{K}}{1+K}\right).$$

При $u\in\left[0,\ S_0\left(\frac{2\sqrt{K}}{1+K}\right)\right)$ е вярно равенството (3), следователно и (2). Поради непрекъснатостта на $\mathrm{sn}(u, K)$ съществува границата $\lim\limits_{u\to S_0\left(\frac{2\sqrt{K}}{1+K}\right)} v=a$.

Като направим граничен преход в равенството (2) при u клонящо към $S_0\left(\frac{2\sqrt{K}}{1+K}\right)$ отляво, получаваме $1=\dfrac{(1+K)a}{1+Ka^2}$; $Ka^2-(1+K)a+1=0$.

Това уравнение има корени 1 и $\frac{1}{K}>1$. Тъй че

$$\lim_{\substack{u \to S_0\left(\frac{2\sqrt{K}}{1+K}\right) \\ u < S_0\left(\frac{2\sqrt{K}}{1+K}\right)}} v = 1 = \operatorname{sn}(S_0(K), K).$$

Но от непрекъснатостта на функцията v имаме

$$1 = \lim_{u \to S_0\left(\frac{2\sqrt{K}}{1+K}\right)} v = \operatorname{sn}\left(\frac{S_0\left(\frac{2\sqrt{K}}{1+K}\right)}{1+K}, K\right).$$

Тъй че

$$\operatorname{sn}\left(\frac{S_0\left(\frac{2\sqrt{K}}{1+K}\right)}{1+K}, K\right) = \operatorname{sn}(S_0(K), K). \tag{4}$$

Поради строгото растене на $\operatorname{sn}\left(\frac{u}{1+K}, K\right)$ при $u \in [0, S_0(K)]$, равенството (4) дава

$$S_0\left(\frac{2\sqrt{K}}{1+K}\right) = (1+K) S_0(K). \tag{5}$$

Така е доказано равенството (1) в интервала

$$[0, (1+K) S_0(K)] = \left[0, S_0\left(\frac{2\sqrt{K}}{1+K}\right)\right].$$

Но поради единствеността на функцията $\operatorname{sn}(u, K)$, $u \in (-\infty, +\infty)$, която съвпада с функцията $\operatorname{sn}(u, K)$, дефинирана като обратна на $F(t, K)$ при $u \in [0, S_0(K)]$, следва, че формулата на Гаус е доказана върху цялата реална ос.

Нека са дадени числата a и b, като $a>b>0$.

Разглеждаме редиците $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, дефинирани с условията $a_1=a$; $b_1=b$; $a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+b_n)$; $b_{n+1}=\sqrt{a_n b_n}$.

Лесно се вижда, че тези редици са сходящи и имат обща граница. Тази обща граница, да я означим с $\mu(a, b)$, се нарича средна аритметико-геометрична на a и b. Числото $\mu(a, b)$ е свързано с теорията на елиптичните функции на Якоби.

Да означим

$$K_n = \frac{a_n - b_n}{a_n + b_n}.$$

Понеже $a_n > b_n > 0$, $b_n > 0$, то $0 < K_n < 1$.

Тъй като $\operatorname{sn}(u, K) \in [-1, 1]$, то можем да въведем означенията

$$\operatorname{sn}\left(u, \frac{2\sqrt{K_n}}{1+K_n}\right) = \sin \varphi_n(u),$$

$$\operatorname{sn}\left(\frac{u}{1+K_n}, K_n\right) = \sin \psi_n(u),$$

като ъглите φ_n и ψ_n вземаме от интервала $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

При $u \in \left[0, S_0\left(\frac{2\sqrt{K_n}}{1+K_n}\right)\right] = [0, (1+K_n) S_0(K_n)]$ от тези равенства следва

$$u = F\left(\sin \varphi_n(u), \frac{2\sqrt{K_n}}{1+K_n}\right) = \frac{a_n}{a_{n+1}} F(\sin \psi_n(u), K_n).$$

Да означим

$$h_n(\varphi) = F\left(\sin \varphi, \frac{2\sqrt{K_n}}{1+K_n}\right),$$

$$g_n(\varphi) = \frac{a_n}{a_{n+1}} F(\sin \varphi, K_n).$$

Според дефиницията на $F(t, K)$ при $t \in [0, 1)$ и $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ имаме

$$\frac{dh_n}{d\varphi} = \frac{\cos \varphi}{\sqrt{(1-\sin^2\varphi)\left(1 - \frac{4K_n}{(1+K_n)^2}\sin^2\varphi\right)}} = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 \cos^2\varphi + b_n^2 \sin^2\varphi}},$$

$$\frac{dg_n}{d\varphi} = \frac{a_n \cos \varphi}{a_{n+1}\sqrt{(1-\sin^2\varphi)(1-K_n^2\sin^2\varphi)}} = \frac{2a_n}{\sqrt{(a_n+b_n)^2\cos^2\varphi + 4a_n b_n \sin^2\varphi}}.$$

Следователно при $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$g_n'(\varphi) = \frac{a_n}{a_{n+1}} h_{n+1}'(\varphi),$$

тъй че в този интервал

$$g_n(\varphi) - \frac{a_n}{a_{n+1}} h_{n+1}(\varphi) = C.$$

При $\varphi=0$ получаваме $C=0$, т. е. при $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$F\left(\sin\varphi, \frac{2\sqrt{K_{n+1}}}{1+K_{n+1}}\right)=F(\sin\varphi, K_n).$$

От непрекъснатостта на $F(t, K)$ при $t=1$ получаваме

$$S_0\left(\frac{2\sqrt{K_{n+1}}}{1+K_{n+1}}\right)=S_0(K_n).$$

От друга страна, равенството (5) дава

$$S_0\left(\frac{2\sqrt{K_n}}{1+K_n}\right)=\frac{a_n}{a_{n+1}}S_0(K_n),$$

тъй че

$$\frac{S_0\left(\frac{2\sqrt{K_{n+1}}}{1+K_{n+1}}\right)}{a_{n+1}}=\frac{S_0\left(\frac{2\sqrt{K_n}}{1+K_n}\right)}{a_n}$$

за всяко естествено число n. Оттук получаваме

$$\frac{S_0\left(\frac{2\sqrt{K_n}}{1+K_n}\right)}{a_n}=\frac{S_0\left(\frac{2\sqrt{K_1}}{1+K_1}\right)}{a}.$$

Понеже редицата $\{a_n\}$ е сходяща с граница $\mu(a, b)$, то и редицата $\left\{S_0\left(\frac{2\sqrt{K_n}}{1+K_n}\right)\right\}$ е сходяща и

$$\lim_{n\to\infty} S_0\left(\frac{2\sqrt{K_n}}{1+K_n}\right)=\frac{S_0\left(\frac{2\sqrt{K_1}}{1+K_1}\right)}{a}\mu(a, b).$$

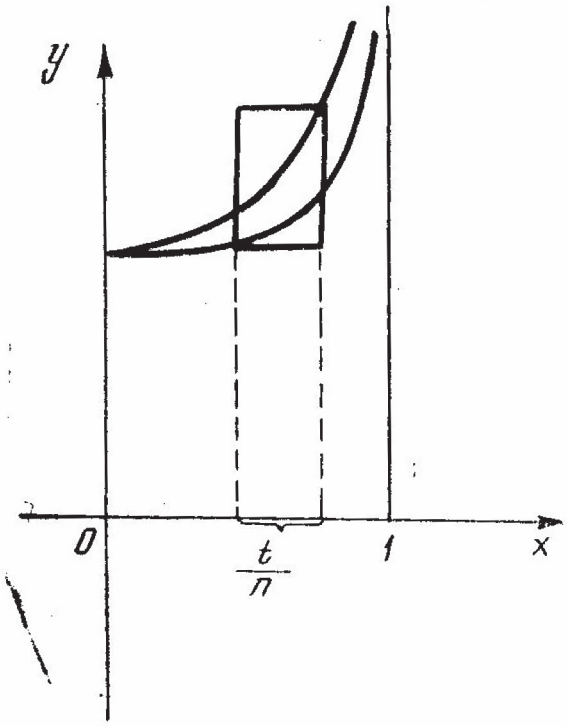
Ще докажем, че тази граница е равна на $\frac{\pi}{2}$.

Нека с $F(t, 0)$ да означим лицето на фигурата, заградена от кривата линия $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, координатните оси и правата $x=t$ при $t \in [0, 1)$. Същевременно $F\left(t, \frac{2\sqrt{K_n}}{1+K_n}\right)$ означава лицето на фигурата, заградена от кривата линия $y=\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)\left(1-\frac{4K_n}{(1+K_n)^2}x^2\right)}}$, координатните оси и правата линия $x=t$.

Понеже за всяко $x \in [0, 1)$ $\dfrac{1}{\sqrt{(1-x^2)\left(1-\dfrac{4K_n}{(1+K_n)^2}x^2\right)}} > \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

то $F\left(t, \dfrac{2\sqrt{K_n}}{1+K_n}\right) \geqq F(t, 0)$.

Фиксираме n и разделяме интервала $[0, t]$ на n равни части. Включваме фигурата, заградена между двете криви линии и правата $x=t$, в сбор от n правоъгълника. Получаваме



Фиг. 1

$$0 < F\left(t, \frac{2\sqrt{K_n}}{1+K_n}\right) - F(t, 0)$$

$$\leqq \frac{t}{n}\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{st}{n}\right)^2\right)\left(1-\left(\frac{st\,2\sqrt{K_n}}{n(1+K_n)}\right)^2\right)}} - \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{s-1}{n}t\right)^2}}\right).$$

Последното събираемо в тази сума е най-голямо. И наистина за кое да е събираемо можем да пишем

$$\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{st}{n}\right)^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2\,st\sqrt{K_n}}{(1+K_n)n}\right)^2}}-1\right)+\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{st}{n}\right)^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{s-1}{n}t\right)^2}}$$

$$\leqq \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4t^2K_n}{(1+K_n)^2}}}-1\right)$$

$$+\frac{\frac{2}{n}t^2-\frac{t^2}{n^2}}{\sqrt{(1-t^2)\left(1-\left(\frac{n-1}{n}t\right)^2\right)}\left(\sqrt{1-t^2}+\sqrt{1-\left(\frac{n-1}{n}t\right)^2}\right)},$$

така че

$$0<F\left(t,\ \frac{2\sqrt{K_n}}{1+K_n}\right)-F(t,\ 0)$$

$$\leqq \frac{t}{n}\,n\left(\frac{1}{\sqrt{(1-t^2)\left(1-\frac{4K_n}{(1+K_n)^2}t^2\right)}}-\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{n-1}{n}t\right)^2}}\right)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

Получаваме при $t\in[0,\ 1)$

$$\lim_{n\to\infty}F\left(t,\ \frac{2\sqrt{K_n}}{1+K_n}\right)=F(t,\ 0)\,.$$

Редицата $\{K_n\}$ е намаляваща. Затова

$$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)\left(1-\frac{4K_{n+1}}{(1+K_{n+1})^2}x^2\right)}}<\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)\left(1-\frac{4K_n}{(1+K_n)^2}x^2\right)}}. \tag{8}$$

Нека $0\leqq t<1$, $h>0$, $t+h<1$.

$$F\left(t+h,\ \frac{2\sqrt{K_n}}{1+K_n}\right)-F\left(t,\ \frac{2\sqrt{K_n}}{1+K_n}\right).$$

е лицето на фигурата, заградена от кривата

$$y=\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)\left(1-\frac{4K_n}{(1+K_n)^2}x^2\right)}},$$

абсцисната ос и правите $x=t$ и $x=t+h$.

От неравенството (8) и свойствата на лицата следва неравенството

$$0<F\left(t+h,\ \frac{2\sqrt{K_{n+1}}}{1+K_{n+1}}\right)-F\left(t,\ \frac{2\sqrt{K_{n+1}}}{1+K_{n+1}}\right) \tag{9}$$

$$\leqq F\left(t+h,\ \frac{2\sqrt{K_n}}{1+K_n}\right)-F\left(t,\ \frac{2\sqrt{K_n}}{1+K_n}\right).$$

Като фиксираме n и t и оставим h да клони към положителното число $1-t$ отляво, поради непрекъснатостта на функцията $F(t, k)$ неравенството (9) дава:

$$0 \leqq F\left(1, \frac{2\sqrt{K_{n+1}}}{1+K_{n+1}}\right) - F\left(t, \frac{2\sqrt{K_{n+1}}}{1+K_{n+1}}\right)$$

$$\leqq F\left(1, \frac{2\sqrt{K_n}}{1+K_n}\right) - F\left(t, \frac{2\sqrt{K_n}}{1+K_n}\right).$$

Сега можем да пишем:

$$\left|F\left(1, \frac{2\sqrt{K_n}}{1+K_n}\right) - F(1, 0)\right| \leqq F\left(1, \frac{2\sqrt{K_n}}{1+K_n}\right) - F\left(t, \frac{2\sqrt{K_n}}{1+K_n}\right)$$

$$+ \left|F\left(t, \frac{2\sqrt{K_n}}{1+K_n}\right) - F(t, 0)\right| + \left|F(t, 0) - F(1, 0)\right|$$

$$\leqq F\left(1, \frac{2\sqrt{K_1}}{1+K_1}\right) - F\left(t, \frac{2\sqrt{K_1}}{1+K_1}\right) + \left|F\left(t, \frac{2\sqrt{K_n}}{1+K_n}\right) - F(t, 0)\right|$$

$$+ \left|F(t, 0) - F(1, 0)\right|.$$

Нека вземем произволно положително число ε. От непрекъснатостта на $F\left(t, \frac{2\sqrt{K_n}}{1+K_n}\right)$ и $F(t, 0)$ при $t=1$ следва, че

$$\left|F(t, 0) - F(1, 0)\right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$0 \leqq F\left(1, \frac{2\sqrt{K_1}}{1+K_1}\right) - F\left(t, \frac{2\sqrt{K_1}}{1+K_1}\right) < \frac{\varepsilon}{3}$$

при t достатъчно близко до 1.

Фиксираме t. От (7) следва, че

$$\left|F\left(t, \frac{2\sqrt{K_n}}{1+K_n}\right) - F(t, 0)\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

при n достатъчно голямо.

С това е установено, че

$$\lim_{n\to\infty} F\left(1, \frac{2\sqrt{K_n}}{1+K_n}\right) = \lim_{n\to\infty} S_0\left(\frac{2\sqrt{K_n}}{1+K_n}\right) = F(1, 0) = S_0(0) = \frac{\pi}{2}\Big)^{*}.$$

* Тук използуваме, че в граничния случай $K=0$ елиптичната функция на Якоби $\operatorname{sn}(u, K)$, съвпада с тригонометричната функция $\sin u$ и че периодът на $\operatorname{sn} u$, $4S_0$, в този случай е периодът на $\sin u$, 2π, т. е. че $S_0(0) = \frac{\pi}{2}$.

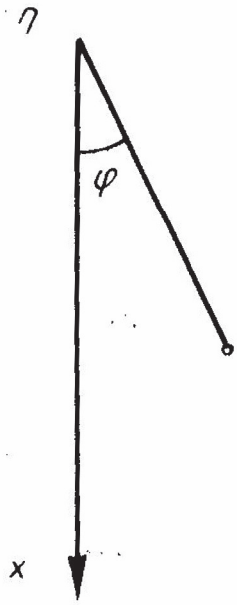
От равенството (6) получаваме за средната аритметико-геометрична на числата a и b

$$\mu(a, b) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{a}{S_0\left(\frac{2\sqrt{K_1}}{1+K_1}\right)},$$

където $S_0\left(\frac{2\sqrt{K_1}}{1+K_1}\right)$ представлява границата на лицето на фигурата, заградена от кривата линия $y = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)\left(1-\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2\right)}}$, координатните оси и правата $x=t$, при $t \to 1$, $t<1$.

2. Просто махало

За начало на координатната ос вземаме точката O на окачване на махалото. Отвесът през тази точка вземаме за координатна ос, която насочваме надолу (фиг. 2). За начално положение на махалото вземаме отвесното.



Фиг. 2

Ще ползуваме означенията: φ — ъгълът, образуван от положителната част на оста z и нишката на махалото, ориентиран тъй, че да е положителен в първия етап на движението на махалото, когато той започва от 0 и расте по големина; v — големината на скоростта на махалото, взета със знак + или — тъй, че да е изпълнено равенството $v = l\frac{d\varphi}{dt}$ не само по модул; v_0 — стойността на v при $t=0$; g — земното ускорение; m — масата на махалото; l дължината му; z — абсцисата на проекцията му в момента t върху оста z.

Кинетичната енергия на махалото в момента t е $\frac{mv^2}{2}$, а потенциалната е $-mgz$. Законът за запазване на енергията дава

$$\frac{v^2}{2} - gz = -ga, \tag{10}$$

където $a = l - \frac{v_0^2}{2g}$.

От $z = l\cos\varphi$, $v = l\frac{d\varphi}{dt}$ и (10) следва

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{l}\sqrt{2g}\sqrt{l\cos\varphi - a}. \tag{11}$$

Ще разгледаме случаите, в които законите за люлеенето на махалото се изразяват с елиптичните функции на Якоби:

Случай I.

$$a > -l, \text{ т. е. } v_0 < 2\sqrt{lg}.$$

Понеже $-1 < \frac{a}{l} < 1$, можем да въведем означението

$$\cos\alpha = \frac{a}{l},$$

като $\alpha \in (0, \pi)$. Тогава $\sin\frac{\alpha}{2}$ е еднозначно определен и е от интервала (0, 1). Означаваме

$$K = \sin\frac{\alpha}{2}.$$

Равенството (11) добива вида

$$\frac{d\varphi}{dt} = 2\sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{K^2 - \sin^2\frac{\varphi}{2}}. \tag{12}$$

Въвеждаме означението

$$x = \frac{1}{K}\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Като използуваме равенството (12), получаваме

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2K}\cos\frac{\varphi}{2}\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{(1-x^2)(1-K^2x^2)}.$$

Ако вместо t вземем променливата $u = \sqrt{\frac{g}{l}}\,t$, получаваме, че функцията $x(u)$ удовлетворява диференциалното уравнение

$$\left|\frac{dx}{du}\right| = \sqrt{(1-x^2)(1-K^2x^2)}. \tag{13}$$

Това уравнение може да се напише във вида

$$\frac{dx}{du} = \sqrt{(1-x^2)(1-K^2x^2)},$$

когато $\frac{dx}{du} \geqq 0$, и във вида

$$\frac{dx}{du} = -\sqrt{(1-x^2)(1-K^2x^2)},$$

когато $\frac{dx}{du} \leqq 0$.

Въвеждаме означенията:

$$g(u) = \sqrt{1-x^2(u)},$$

когато $\frac{dx}{du} \geqq 0$ и

$$g(u) = -\sqrt{1-x^2(u)},$$

когато $\frac{dx}{du} \leqq 0$; най-после

$$h(u) = \sqrt{1-K^2x^2(u)}.$$

Лесно се вижда, че функциите $x(u)$, $g(u)$, $h(u)$ удовлетворяват следните условия (когато са дефинирани и диференцируеми):

$$x'(u) = g(u)h(u), \qquad x(0) = 0,$$
$$g'u = -x(u)h(u), \qquad g(0) = 1,$$
$$h'(u) = -K^2x(u)g(u), \qquad h(0) = 1.$$

Поради единствеността на елиптичните функции $\mathrm{sn}(u, K)$, $\mathrm{cn}(u, K)$, $\mathrm{dn}(u, K)$, които удовлетворяват последните условия върху цялата реална ос, имаме

$$x(u) = \mathrm{sn}(u, K)$$

за всяко u, за което $x(u)$ е дефинирана.

Така получаваме закона за движението на махалото

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \mathrm{sn}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t,\ \sin\frac{\alpha}{2}\right). \tag{14}$$

Като се използват свойствата на елиптичната функция $\mathrm{sn}(u, K)$, законът (14) показва, че движението е периодично с период

$$4\sqrt{\frac{l}{g}}\,S_0,$$

където с $4S_0$ е означен периодът на функцията $\mathrm{sn}\left(u, \sin\frac{\alpha}{2}\right)$. От $t=0$ до $t=\sqrt{\frac{l}{g}}\,S_0$ ъгълът φ расте от 0 до α. След това φ намалява,

като при още четвърт период става 0. След това става отрицателен, като стига до $-\alpha$, и т. н. От

$$v = 2\sqrt{gl}\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{1-\mathrm{sn}^2\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t,\ \sin\frac{\alpha}{2}\right)}$$

се вижда, че големината на скоростта на махалото също се мени периодично, като става 0 при $t=(2n+1)\sqrt{\frac{l}{g}}\,S_0$, $n=0, 1, 2, \ldots$, и е най-голяма при $t=2n\sqrt{\frac{l}{g}}\,S_0$.

Случай II.

$$a<-l, \quad \text{т. е.} \quad v_0>2\sqrt{lg}.$$

Да означим

$$K=\sqrt{\frac{2l}{l-a}}<1.$$

Понеже $l-a>2l$, то K принадлежи на (0, 1).
Равенството (11) може да се напише във вида

$$\left|\frac{d\varphi}{dt}\right| = \frac{2}{K}\sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{1-K^2\sin^2\frac{\varphi}{2}}.$$

Въвеждаме означението

$$x=\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Получаваме

$$\left|\frac{dx}{dt}\right| = \frac{1}{K}\sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{(1-x^2)(1-K^2x^2)}.$$

Като въведем променливата $u=\frac{1}{K}\sqrt{\frac{g}{l}}\,t$, получаваме

$$\left|\frac{dx}{du}\right| = \sqrt{(1-x^2)(1-K^2x^2)}.$$

Оттук следва, че

$$x(u)=\mathrm{sn}(u, K),$$

т. е. за движението на махалото получаваме закона

$$\sin\frac{\varphi}{2}=\operatorname{sn}\left(\frac{1}{l\sqrt{2}}\sqrt{(l-a)g}\,t,\ \sqrt{\frac{2l}{l-a}}\right).$$

Като използуваме свойствата на елиптичната функция $\operatorname{sn}(u, K)$, намираме: движението е периодично с период $4l\sqrt{\frac{2}{(l-a)g}}S_0$, където $4S_0$ е периодът на $\operatorname{sn}\left(u, \sqrt{\frac{2l}{l-a}}\right)$. От $t=0$ до $t=l\sqrt{\frac{2}{g(l-a)}}S_0$ ъгълът φ расте от 0 до π. Големината на скоростта

$$v=\sqrt{2g(l-a)}\sqrt{1-\frac{2l}{l-a}\operatorname{sn}^2\left(\frac{1}{l\sqrt{2}}\sqrt{(l-a)g}\,t,\ \sqrt{\frac{2l}{l-a}}\right)}$$

се мени периодично, като никога не се анулира. Махалото не се колебае около началното си положение, а се върти кръгово.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шопова, Д.: Изложение на теорията на елиптичните функции на Якоби в реална област с елементарни средства. Год. на Соф. унив., Мат. фак., **65** (1970/71), 7—24.
2. Ахиезер, Н. И.: Элементы теории эллиптических функции. Москва, 1970.

Постъпила на 2. XII. 1972 г.

EXPOSÉ DE CERTAINES APPLICATIONS DES FONCTIONS ELLIPTIQUES DE JACOBI PAR DES MOYENS ÉLÉMENTAIRES

D. Chopova

(RÉSUMÉ)

On expose les applications des fonctions elliptiques de Jacobi pour obtenir les lois de la pendule simple et pour exprimer le nombre moyen arithmético-géométrique en n'utilisant que les notions de surface d'une figure plane et de dérivée d'une fonction à argument réel.