ЛОКАЛЬНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ БАНАХА

Васил А. Попов

В [4] получены оценки для локального приближения функции тригонометрическими многочленами и целыми функциями экспоненциального типа. В этой заметке перенесем результаты из [4] на случай пространства Банаха.

Известно [1], [2], что естественное обобщение результатов теории апроксимации функции на случай пространства Банаха можно получить, если в банаховом пространстве действует полугруппа операторов и аппаратом приближении являются собственные функции инфинитезимального оператора полугруппы (или его степены). Купцовым [2] получены прямые и обратные теоремы теории приближения, которые обобщают известные теоремы Джексона и Бернштейна.

Мы получим оценку для локального приближения в пространстве Банаха, из которой будет следовать прямая теорема Купцова. Метод получения оценки является комбинацией методов из [2] и [4].

§ 1.

Пусть X — пространство Банаха и X^* — его сопряженное пространство. Пусть $T(t)$, $0 \leq t < \infty$, — сильно непрерывная полугруппа операторов в X, т. е. $X \xrightarrow{T(t)} X$, и $T(t)$ удовлетворяют

$$\text{а)}\ T(t)\,T(s) = T(t+s),$$

$$\text{б)}\ s-\lim_{t\to+0} T(t) = T(0) = I,$$

где I — единичный оператор.

Пусть A — инфинитезимальный оператор полугруппы $T(t)$: Af существует для тех $f \in X$, для которых $\lim\limits_{t\to+0} \dfrac{T(t)f-f}{t}$ существует $(=Af)$.

Если обозначим через $D(A)$ область определения оператора A, то $D(A)$ плотно в X (см. напр. [1]). Для любого натурального r $D(A^r)$ плотно в X.

Рассмотрим модифицированную функцию Стеклова в банаховом случае $(f \in X)$:

$$f_{h,r,k}=\frac{(-1)^{k-1}}{h^r}\int_0^h\cdots\int_0^h[T(k(t_1+\ldots+t_r))$$

(1) $$-\binom{k}{1}T((k-1)(t_1+\ldots+t_r))+\ldots$$

$$+(-1)^{k-1}\binom{k}{k-1}T(t_1+\ldots+t_r)]f\,dt_1\ldots dt_r.$$

$f_{h,r,k}$ принадлежит области определения $D(A^r)$ оператора A.

Действительно, имеем

$$\frac{T(t)-I}{t}\int_0^h T(t_1)f\,dt_1=\frac{1}{t}\int_0^h T(t_1)[T(h)-I]f\,dt_1,$$

т. е. $$\lim_{t\to+0}\frac{T(t)-I}{t}\int_0^h T(t_1)f\,dt_1=[T(h)-I]f$$

и следовательно

$$Af_{h,r,k}=\frac{(-1)^{k-1}}{h^r}\underbrace{\int_0^h\cdots\int_0^h}_{r-1}\Bigg[\frac{T(kh)-I}{k}T(k(t_1+\ldots+t_{r-1}))$$

$$-\binom{k}{1}\frac{T((k-1)h)-I}{k-1}T((k-1)(t_1+\ldots+t_{r-1}))+\ldots$$

$$+(-1)^{k-1}\binom{k}{k-1}(T(h)-I)T(t_1+\ldots+t_{r-1})\Bigg]f\,dt_1\ldots dt_{r-1}.$$

Аналогично получаем

(2) $$A^rf_{h,r,k}=\frac{(-1)^{k-1}}{h^r}\left[\frac{(T(kh)-I)^r}{k^r}-\binom{k}{1}\frac{(T((k-1)h)-I)^{r-1}}{(k-1)^r}+\ldots\right.$$

$$\left.+(-1)^{k-1}\binom{k}{k-1}(T(h)-I)^r\right]f.$$

Введем r-тий модуль непрерывности элемента $f\in X$:

$$\omega_r(f;\ \delta)=\max_{0<h\leq\delta}\|(T(h)-I)^rf\|.$$

Из (2) получаем

(3) $$\|A^rf_{h,r,k}\|\leq\frac{2^k}{h^r}\omega_r(f;\ kh)$$

Если $r>k$, то

$$\omega_r(f;\ \delta)\leqq(1+e^{\beta\delta})^{r-k}\,\omega_k(f;\ \delta), \tag{4}$$

так как $\|T(\delta)\|\leqq e^{\beta\delta}$, если $T(\delta)$ — сильнонепрерывная полугруппа (см. напр. [3]), где β — некоторая константа.

Следовательно если $r>k$, то

$$A^r f_{h,r,k}\leqq\frac{2^k(1+e^{\beta kh})^{r-k}}{h^r}\,\omega_k(f;\ kh). \tag{5}$$

Теперь докажем одну лемму, которая уточняет лемму 2. 3 из [2].

Лемма 1. Пусть Q — оператор, спектр которого расположен на действительной оси и для резольвенты $R_\lambda(Q)$ оператора Q справедлива оценка

$$\|R_\lambda(Q)\|\leqq c/|\operatorname{Im}\lambda|,$$

где c — абсолютная постоянная.

Тогда

$$\|R_\lambda(Q^r)\|\leqq\frac{c_1^r}{|\operatorname{Im}\lambda|},$$

где c_1 — абсолютная постоянная.

Доказательство. Следую Купцову, положим

$$\omega_0=1,\quad \omega_1=e^{\frac{2\pi i}{r}},\ \ldots,\ \omega_{r-1}=e^{\frac{2\pi(r-1)}{r}i}.$$

Тогда (лемма 2. 1 из [2]) если

$$\mu=\sqrt[r]{\lambda},\quad -\pi<\arg\lambda<\pi,\quad -\frac{\pi}{r}<\arg\mu<\frac{\pi}{r},$$

то

$$R_\lambda(Q^r)=R_{\mu\omega_0}(Q)\,R_{\mu\omega_1}(Q)\ldots R_{\mu\omega_{r-1}}(Q). \tag{6}$$

Рассмотрим сначала случай r — четное.

Тогда из (6) получаем

$$\|R_\lambda(Q^r)\|\leqq\|R_{\mu\omega_0}(Q)\,R_{\mu\omega_{r/2}}(Q)\|\prod_{\substack{j=1\\ j\neq r/2}}^{r-1}\|R_{\mu\omega_j}(Q)\|.$$

Но

$$\|R_{\mu\omega_j}(Q)\|\leqq\frac{c}{|\mu|\,\left|\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{r}j\right)\right|},$$

где $\mu = |\mu| e^{i\theta}$, $-\frac{\pi}{r} < \theta < \frac{\pi}{r}$.

Следовательно

$$(7) \qquad R_\lambda(Q^r) \leqq |R_{\mu\omega_0}(Q) R_{\mu\omega_{r/2}}(Q)| \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq r/2}}^{r-1} \frac{c}{|\mu| \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{r} j\right)}$$

$$= |R_{\mu\omega_0}(Q) R_{\mu\omega_{r/2}}(Q)| \frac{c^{r-2}}{|\mu|^{r-2}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq r/2}}^{r-1} \frac{1}{\sin\left(\theta + \frac{2\pi}{r} j\right)}.$$

Оценим теперь $\prod_{j=1,\ j \neq r/2}^{r-1} 1/\left|\sin\left(\theta + \frac{2\pi}{r} j\right)\right|$. Так как

$$-\frac{\pi}{r} < \theta < \frac{\pi}{r}, \quad \sin x \geqq \frac{\pi}{2} x$$

для $x \leqq \frac{\pi}{2}$ и r — четное, то

$$(8) \qquad \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq r/2}}^{r-1} \frac{1}{\left|\sin\left(\theta + \frac{2\pi}{r} j\right)\right|} \leqq \left(\prod_{j=1}^{[r/4]} \frac{1}{\sin\left(\theta + \frac{2\pi}{r} j\right)}\right)^4$$

$$\leqq \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left[\frac{r}{4}\right]} \prod_{j=1}^{\left[\frac{r}{4}\right]} \frac{1}{\frac{\pi}{r}(2j-1)}\right)^4 \leqq \left(\frac{r^{\left[\frac{r}{4}\right]}}{\left[\frac{r}{4}\right]!}\right)^4 \leqq (4e)^r.$$

С другой стороны (см. [2], стр. 139)

$$(9) \qquad R_\mu(Q) R_{\mu\omega_{r/2}}(Q) \leqq \frac{c}{|\mu| \operatorname{Im} \mu} = \frac{c}{\mu^2 |\sin\theta|}.$$

Из (7), (8) и (9) получаем

$$R_\lambda(Q^k) \leqq \frac{c_2^r}{\mu^r |\sin\theta|} \leqq \frac{c_1^r}{\mu^r r \sin r\theta} = \frac{c_1^r}{|\operatorname{Im}\lambda|}.$$

В случае r — нечетное, из (6) получаем

$$|R_\lambda(Q^r)| \leqq |R_{\mu\omega_0}(Q)| \prod_{j=1}^{r-1} |R_{\mu\omega_j}(Q)|$$

$$\leqq \frac{c}{\mu \sin\theta} \prod_{j=1}^{r-1} \frac{c}{\mu \left|\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{r}j\right)\right|} = \frac{c^r}{\mu^r \sin\theta} \prod_{j=1}^{r-1} \frac{1}{\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{r}j\right)}$$

$$\leqq \frac{c^r r}{\mu^r \sin r\theta} \left(\prod_{j=1}^{[r/2]} \frac{1}{\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{r}j\right)} \right) \leqq \frac{c_1^r}{\operatorname{Im}\lambda}.$$

Этим лемма доказана.

§ 2.

Пусть f — 2π-периодическая непрерывная функция. Рассмотрим ее „локальный модуль“ непрерывности k — того порядка в точке x:

$$\omega_k(f, x; \delta) = \max_{t \leqq \delta} \sum_{l=0}^{k} (-1)^l \binom{k}{l} f(x+lt).$$

В [4] получен следующий результат:

Теорема А. Для любых k, s, $\alpha \geqq 0$, существует последовательность линейных операторов $\{u_n\}_1^\infty$, $u_n(f; x)$ является тригонометрическим многочленом n-ного порядка, такая, что для любой функции $f \in C_{2\pi}$ и каждого x имеет место при $\alpha n \geqq e$

$$f(x)-u_n(f; x) \leqq \omega_k\left(f, x; \frac{4kes \ln \alpha n}{n}\right) + c(k) \frac{\omega_k\left(f; \frac{1}{n}\right)}{(\alpha n)^s}, \tag{10}$$ [1]

где $c(k)$ — абсолютная постоянная (независящая от s, α, f).

В частности, для $\alpha = 1$ получаем

Следствие А. При предположения теоремы 1

$$f(x)-u_n(f; x) \leqq \omega_k\left(f, x; cs\frac{\ln n}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n^s}\right), \tag{11}$$

где c — абсолютная константа.

Полагая в (10) $\alpha = e/n$, $s = 1$ получаем теорему Джексона

$$f(x)-u_n(f; x) = O\left(\omega_k\left(f; \frac{1}{n}\right)\right).$$

Здесь и в теореме А $\omega_k(f; \delta)$ — k-тый модуль непрерывности функции f:

[1] $\omega_k(f; \delta) = \max \omega_k(f, x; \delta)$

$$\omega_k(f;\ \delta)=\max_x \omega(f,\ x;\ \delta).$$

Отметим также, что в [4] показано, что порядок $\ln n/n$ в (10), (11) нельзя улучшить.

Более точно, имеет место

Теорема В. Пусть $\varepsilon>0$. Не существует оценка типа: для каждой $f\in C_{2\pi}$ и каждого n существует тригонометрический многочлен T_n n-ного порядка такой, что для каждого x

$$f(x)-T_n(x)\leqq\omega\left(f,\ x;\left(1-\varepsilon\right)\frac{\ln n}{n}\right)+O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Цель настоящей заметки получить аналог теоремы А для пространств Банаха. Роль точки x будут играть крайные точки единичной сферы сопряженного пространства X^*, модулы непрерывности определяются как обычно через полугруппы $T(t)$, а апарат приближении будут линейные комбинации собственных элементов инфинитезимального оператора A или его степени.

§ 3.

Будем пользоваться понятием s-регулярного оператора [2]. Напомним, что оператор A называется s-регулярным, если для некоторого натурального s существует действительное число θ такое, что

$$|R_\lambda(e^{i\theta}A^s)|\leqq\frac{c}{|\operatorname{Im}\lambda|},$$

где $R_\lambda(A)$ обозначает резольвенту оператора A.

При этом, очевидно, спектр оператора $Q=e^{i\theta}A^s$ расположен на действительной оси.

Пусть оператор $Q=e^{i\theta}A^s$ имеет дискретный бесконечный спектр и модули собственных значении занумеруем в порядке их возрастания:

$$m_1<m_2<m_3<\ldots$$

Если μ_0 — полюс резолвенти $R_\lambda(Q)$ и c — маленькая окружность с центром μ_0, не содержащая других полюсов резольвенты $R_\lambda(Q)$, то оператор

$$p=-\frac{1}{2\pi i}\int_c R_\lambda(Q)\,d\lambda$$

является проектором на собственное подпространство оператора Q, соответствующее собственному значению μ_0.

Следовательно для любой аналитической функции $\varphi(\lambda)$ и любой $\rho\in(m_n,\ m_{n+1})$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\lambda=\rho}\varphi(\lambda)R_\lambda(Q)\,d\lambda$$

является линейной комбинацией собственных векторов оператора Q, соответствующих на собственных значении с модулей $\leqq m_n$.

То же самое относиться и к

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\lambda=\rho}\varphi(\lambda)R_\lambda(Q^r)\,d\lambda,\quad \rho\in(m_n^r,\ m_{n+1}^r),$$

которое является линейной комбинацией собственных векторов оператора Q, соответствующих собственным значениям λ, для которых $|\lambda|\leqq m_n$ (см. [2], стр. 144).

Будем обозначать подпространство, порожденное собственным векторам оператора Q, соответствующим собственным значениям с модулями $m_1, m_2, \ldots, m_n$, через L_n. Через P_ν обозначим проектор на подпространстве, соответствующее m_ν^r:

$$P_\nu=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\lambda=\rho_{\nu+1}^r}R_\lambda(Q^r)\,d\lambda+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\lambda=\rho_\nu^r}R_\lambda(Q^r)\,d\lambda,$$

$$\rho_{\nu+1}\in(m_\nu,\ m_{\nu+1}),\quad \rho_1=0.$$

Теорема 1. Пусть $f\in D(Q^r)$, r — четное. Тогда

$$\left(I-\sum_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{m_\nu^r}{m_{n+1}^r}\right)P_\nu\right)f\leqq\frac{c^r\,Q^r f}{m_{n+1}^r},$$

где c — абсолютная постоянная.

Доказательство. Так как r — четное, то собственные числа оператора Q^r является m_ν^r. Для $\rho_n\in(m_n,\ m_{n+1})$ имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\lambda=\rho_n^r}\left(1-\frac{\lambda}{\rho_n^r}\right)R_\lambda(Q^r)\,d\lambda=-\sum_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{m_\nu^r}{\rho_n^r}\right)P_\nu,$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\lambda=\rho_n^r}\left(1-\frac{\lambda}{\rho_n^r}\right)\frac{1}{\lambda}\,d\lambda=1.$$

Отсюда

$$\left(I-\sum_{\nu=1}^{r}\left(1-\frac{m_\nu^r}{\rho_n^r}\right)P_\nu\right)f=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\lambda=\rho_n^r}\left(1-\frac{\lambda}{\rho_\nu^r}\right)\left[\frac{I}{\lambda}+R_\lambda(Q^r)\right]d\lambda.$$

Так как $R_\lambda(Q^r)\,Q^r f=\lambda R_\lambda(Q^r)f+f$, то пользуясь леммы 1 получим

$$\left\|\left(I-\sum_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{m_\nu^r}{\rho_n^r}\right)P_\nu\right)f\right\|\leqq\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\lambda=\rho_n^r}\left(1-\frac{\lambda}{\rho_n^r}\right)\|R_\lambda(Q^r)\|\,\|Q^r f\|\,d\lambda$$

$$\leqq\frac{\|Q^r f\|\,c_1^r}{2\pi\rho_n^r}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{|1-e^{i\theta}|}{|\sin\theta|}\,d\theta=c_4\frac{c_1^r\,\|Q^r f\|}{\rho_n^r},$$

что и требовалось доказать.

Пусть S^* — единичная сфера сопряженного пространства X^* и $x^*\in S^*$. Введем k-тий модуль непрерывности элемента $f\in X$ для функционала x^*:

$$\omega_k(f,\,x^*;\,\delta)=\sup_{|t|\leqq\delta}|x^*(T(t)-I)^k f|;\quad \omega_k(f;\,\delta)=\sup_{x^*\in S^*}\omega_k(f,\,x^*;\,\delta).$$

Имеет место

Теорема 2. При сделанных предположении относительно инфинитезимального оператора A полугруппы для любых $k,\,p,\,\alpha\geqq 0$, существует последовательность линейных операторов $\{U_n\}_1^\infty$, $U_n f\in L_n$ для каждого $f\in X$, такие, что для любого $x^*\in S^*$ имеет место неравенство для $\alpha\,m_{n+1}\geqq e$

$$|x^*(f-U_n f)|\leqq\omega_k\left(f,\,x^*;\,\frac{cp\ln\alpha\,m_{n+1}}{m_{n+1}^{1/s}}\right)+c_1\frac{\omega_k(f;\,1/m_{n+1}^{1/s})}{(\alpha\,m_{n+1})^p},\tag{12}$$

где c и c_1 — постоянные, зависящие только от k, но не и от $p,\,\alpha,\,f$.

Доказательство. Пусть сначала $f\in D(A^{sr})$. Тогда имеют место неравенства

$$|x^*(f-f_{h,\,rs,\,k})|\leqq\omega_k(f,\,x^*;\;srh)\tag{13}$$

и (5)

$$\|A^{sr}f_{h,\,rs,\,k}\|\leqq\frac{2^k c_2^{sr-r}}{h^{sr}}\,\omega_k(f;\,kh).\tag{14}$$

Если положим

$$U_n f=\sum_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{m_\nu^r}{m_{n+1}^r}\right)P_\nu f_{h,\,rs,\,k}\ \text{и}\ r=2l,$$

пользуясь (13), (14) и теоремой 1, получим

$$|x^*(f-U_n f)|\leqq|x^*(f-f_{h,\,sr,\,k})|+|x^*(f_{h,\,rs,\,k}-U_n f_{h,\,rs,\,k})|$$

$$\leqq\omega_k(f,\,x^*;\,srh)+\frac{c_3^r\,2^k c_2^{sr-k}}{m_{n+1}^r\,h^{sr}}\,\omega_k(f;\,kh).$$

Полагая теперь $h = c_2 c_3^{1/s} e/m_{n+1}^{1/s}$, $r = 2\left[\frac{p \ln \alpha m_{n+1}}{2}\right]$, получим утверждение теоремы для $f \in D(A^{sr})$. Общий случай следует из того, что A^{sr} плотно в X.

Следствие 1. Полагая $\alpha = e/m_{n+1}$, $p = 1$, получим из (12) результать Купцова [2]:

$$E_n(f) = \inf_{p \in L_n} \|f - p\| = O\left(\omega_k\left(f; \frac{1}{m_{n+1}^{1/s}}\right)\right)$$

без предположения, что для A существует правый обратный ограниченный оператор.

Следствие 2. Полагая $\alpha = 1$, получим

$$|x^*(f - U_n f)| = \omega_k\left(f, x^*; cp \frac{\ln m_{n+1}}{m_{n+1}^{1/s}}\right) + O\left(\frac{1}{m_{n+1}^p}\right), \tag{15}$$

где c — абсолютная постоянная.

Отметим, что порядок $\ln m_{n+1}/m_{n+1}^{1/s}$ в оценках (12) и (15) в общем случае нельзя улучшить, как показывает теорема В.

ЛИТЕРАТУРА

1. Butzer, B. L., H. Berenz: Semi-Groups of Operators and Approximation. Springer—Verlag, 1967.
2. Купцов, Н. П.: Прямые и обратные теоремы теории приближений и полугруппы операторов. УМН, XXIII, вып. 4 (142), 1967, 117—178.
3. Йосида, К.: Функциональный анализ. М., ИЛ, 1967.
4. Попов, В. А.: Локальное приближение функции. Мат. заметки (в печати).

Постъпила на 2. XII. 1972 г.

LOCAL APPROXIMATIONS IN BANACH SPACE

V. A. Popov

(SUMMARY)

Let X be a Banach space and X^* be its conjugate space. Let $T(t)$, $0 \leq t < \infty$, be a strongly continuous one-parameter semi-group of operators in X and A be its infinitesimal operator. Let A be s-regular [2], that is for some natural number s there exists a real number θ such that $|e^{i\theta} R_\lambda(A^s)| \leq c/|\operatorname{Im} \lambda|$ where $R_\lambda(A^s)$ denote the resolvent of the operator A^s. Let $Q = e^{i\theta} A^s$ has discret infinite spectrum and the moduli of its

eigenvalues are $m_1, m_2, \ldots, m_n, \ldots$, L_n denotes the eigenspace of Q, generated from the eigenvectors, corresponding to the eigenvalues with moduli $m_1, m_2, \ldots, m_n$.

Let S^* be the unit sphere of X^* and $x^* \in S^*$. We introduce the k-modulus of continuity of the $f \in X$ for the functional $x^* \in S^*$:

$$\omega_k(f, x^*; \delta) = \sup_{0 \leq h \leq \delta} x^*(T(h)-I)^k f .$$

The k-modulus of continuity of f is

$$\omega_k(f; \delta) = \sup_{x^* \in S^*} \omega_k(f, x^*; \delta).$$

The following theorem is proved:

Theorem 1. Under the assumptions made above for the operator A for every k, p, $\alpha \geq 0$, k-integer, there exists a sequence of linear operators $\{U_n\}_1^n$, $U_n f \in L_n$ for every $f \in X$ such that for every $f \in X$ and $x^* \in S^*$ for $\alpha \geq e/m_{n+1}$ we have:

$$x^*(f-U_n f) \leq \omega_k\left(f, x^*; \frac{c(k)\, p \ln \alpha\, m_{n+1}}{m_{n+1}^{1/s}}\right) + c_1(k) \frac{\omega_k(f; 1/m_{n+1}^{1/s})}{(\alpha\, m_{n+1})^p}$$

where $c(k)$ and $c_1(k)$ are constants depending only on k but not on f, p, α.

This theorem is a generalization in the case of Banach space of the theorem for local approximation of 2π-periodic functions by means of trigonometrical polynomials, obtained in [4].

On the other hand from this theorem, setting $\alpha = e/m_{n+1}$, $p = 1$ we obtain the Kuptsov's theorem [2] which generalizes the wellknown Jackson's theorem for the best approximation of 2π-periodic functions by means of trigonometrical polynomials of degree n:

$$E_n(f) = \inf_{p \in L_n} \| f-p \| = O\left(\omega_k\left(f; \frac{1}{m_{n+1}^{1/s}}\right)\right). \tag{1}$$

Let us mention that (1) is obtained without the assumption from [2] that A has a right converse bounded operator.