О МОДУЛЯХ ВЫПУКЛОСТИ И ГЛАДКОСТИ ПРОСТРАНСТВ L_{pq}

Румен П. Малеев **Станимир Л. Троянски**

Пусть X пространство Банаха, а X^* его сопряженное. Функция

$$\delta_X(\varepsilon) = \inf_{\substack{\|x\|=\|y\|=1 \\ \|x-y\|\geq\varepsilon}} \left(1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\|\right)$$

называется модулем выпуклости пространства X. Если $\delta_X(\varepsilon)>0$ для любого $\varepsilon>0$, то X называют равномерно выпуклым.

Модулем гладкости пространства X называется функция

$$\rho_X(\tau) = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ \|y\|\leq\tau}} \frac{1}{2}\left(\|x+y\| + \|x-y\| - 2\right).$$

Говорят, что X равномерно гладкое, если $\lim\limits_{\tau\to 0} \frac{\rho_X(\tau)}{\tau} = 0$.

Линденштраус [4] установиль связь между модулем гладкости пространства X и модулем выпуклости пространства X^*:

$$\rho_X(\tau) = \sup_{0\leq\varepsilon\leq 2}\left(\frac{\tau\varepsilon}{2} - \delta_{X^*}(\varepsilon)\right). \tag{1}$$

Кларксоном [3] было показано, что пространства L_p, $p>1$ равномерно выпуклы и была получена точная по порядку оценка для модуля выпуклости в случае $p\geq 2$:

$$\delta_{L_p}(\varepsilon) \geq k_p\,\varepsilon^p, \tag{2}$$

где $k_p>0$ постоянная, зависящая лишь от p. Полученные им оценки в случае $1<p\leq 2$ неточны. Точные по порядку оценки в этом случае получены Ханнэром [8] и чуть позже и независимо от него Кадецом [2]:

$$\delta_{L_p}(\varepsilon) \geq k_p\,\varepsilon^2, \quad 1<p\leq 2. \tag{3}$$

Отметим, что Ханнэр нашел также точные константы k_p в (2) и (3).

Как заметил Линденштраус [4], из точных оценок Ханнэра и (1) для модуля гладкости ρ_{L_p} можно получить точную оценку

$$\rho_{L_p}(\tau) \leq c_p\,\tau^s, \tag{4}$$

где $s=\min(2, p)$, c_p постоянная, зависящая только от p.

Заметим, что ряд теорем о сходимости рядов и устойчивости минимальных систем в пространствах Банаха (см. напр. [5] и [6]) формулируются в терминах модулей выпуклости и гладкости, причем существенную роль играет их асимптотика в нуле.

В множестве всех действительных функций $u(x, y)$, определенных почти всюду в единичном квадрате, таких, что p-тая степень функции $|u(x, y)|$ суммируема по x для почти всех $y \in [0, 1]$, а q-тая степень функции $\left(\int_0^1 |u(x, y)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$ суммируема, норма вводится формулой:

$$\|u\| = \left[\int_0^1 \left(\int_0^1 |u(x, y)|^p dx\right)^{\frac{q}{p}}\right]^{\frac{1}{q}}.$$

Полученное нормированное пространство обозначается $L_{pq}[0, 1]$. Легко показать, что $L_{pq}[0, 1]$ банахово. В дальнейшем норма в пространствах L_p и L_{pq} будем обозначать соответственно $\|\cdot\|_p$, $\|\cdot\|_{pq}$.

В настоящей заметке получены точные по порядку оценки для модулей выпуклости и гладкости пространств L_{pq} при $p>1$, $q>1$, из которых сразу следует равномерная выпуклость и равномерная гладкость этих пространств.

Отметим, что равномерная выпуклость и равномерная гладкость L_{pq} при $p>1$, $q>1$ следует из более общего результата Дэя [1].

Сначала докажем несколько спомагательных лемм и предложений.

Лемма 1. Пусть $p>1$, $q>1$. Существует постоянная $K_{pq}>0$ такая, что в трапеции $D=\left\{(x, y): 0 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq \frac{1+x}{2}\right\}$ выполнено неравенство:

$$1+x^p-2y^p \geqq K_{pq}(1+x^q-2y^q). \tag{5}$$

Доказательство. Если $p=q$, то $K_{pq}=1$.

Пусть $p>q$. Рассмотрим в D функции

$$F(x, y)=x^q-x^p-2(y^q-y^p),$$

$$\varphi(x)=x^q-x^p.$$

При $x \geqq \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{p-q}}$ $\varphi'(x) \leqq 0$ и следовательно $\varphi(x)$ в $\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{p-q}}, 1\right]$ не возрастает. Отсюда в треугольнике

$$\Delta=\left\{(x\ y): \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{p-q}} \leqq x \leqq 1, \ \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{p-q}}+1}{2} \leqq y \leqq \frac{x+1}{2}\right\}$$

$$\varphi(x) \leqq \varphi(2y-1).$$

Так как $F(x, y) = \varphi(x) - 2(y^q - y^p)$, то в Δ имеет место

$$F(x, y) \leqq (2y-1)^q - (2y-1)^p - 2(y^q - y^p).$$

Рассмотрим в интервале $\left[\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{p-q}}+1}{2}, 1\right]$ функцию

$$\xi(y) = \varphi(2y-1) - 2\varphi(y), \quad \xi'(1) = 0, \quad \xi''(1) < 0.$$

Функция $\xi''(x)$ непрерывна и значит существует

$$a \in \left[\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{p-q}}+1}{2}, 1\right)$$

такое, что $\xi''(y) \leqq 0$, если $y \in [a, 1]$. В этом интервале $\xi'(y) \geqq 0$, так как $\xi'(1) = 0$ и $\xi(y) \leqq 0$ из-за $\xi(1) = 0$. Тогда в треугольнике

$$\Gamma = \left\{(x, y): 2a-1 \leqq x \leqq 1, \quad a \leqq y \leqq \frac{x+1}{2}\right\}$$

имеет место неравенство

$$F(x, y) \leqq 0.$$

Отсюда следует, что если $(x, y) \in \Gamma$, то

$$1 + x^p - 2y^p \geqq 1 + x^q - 2y^q.$$

В D выполнены неравенства

$$y^q \leqq \left(\frac{1+x}{2}\right)^q \leqq \frac{1+x^q}{2},$$

причем во втором неравенстве равенство достигается только для $x = 1$. Поэтому, если $(x, y) \in D$, то $1 + x^q - 2y^q = 0$ только в случае $x = y = 1$. Точка (1, 1) не принадлежит замыканию множества $D \backslash \Gamma$, которое обозначим через Ξ. Так как функция

$$\Phi(x, y) = \frac{1 + x^p - 2y^p}{1 + x^q - 2y^q}$$

положительна и непрерывна в Ξ, то существует постоянная k_{pq} такая, что $\Phi(x, y) \geqq k_{pq}$ или, что то же самое,

$$1+x^p-2y^p \geqq k_{pq}(1+x^q-2y^q)$$

для всех $(x, y) \in \Xi$. Для $K_{pq}=\min(1, k_{pq})$ выполнено (5).

Пусть $p<q$. Теперь в D зададимся функции

$$G(x, y)=q(q-1)(1+x^p-2y^p)-p(p-1)(1+x^q-2y^q),$$

$$\Psi(x)=q(q-1)x^p-p(p-1)x^q.$$

В $[0, 1]$ $\Psi'(x) \geqq 0$ и если $0 \leqq 2y-1 \leqq x \leqq 1$, то для $G(x, y)$ получим оценку:

$$G(x, y) \geqq \Psi(2y-1)-2\Psi(y)-(p-q)(p+q-1)=\eta(y).$$

Функция $\eta(y)$ определена в $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ и при $y>\frac{1}{2}$ имеет производные произвольного порядка. Заметим, что $\eta(1)=\eta'(1)=\eta''(1)=0$ и $\eta'''(1)<0$. Поэтому для некоторого $b \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ в интервале $[b, 1]$ $\eta'''(y) \leqq 0$, $\eta''(y) \geqq 0$, $\eta'(y) \leqq 0$ и $\eta(y) \geqq 0$.

Отсюда следует, что в

$$\Lambda=\left\{(x, y): 2b-1 \leqq x \leqq 1,\ b \leqq 2y \leqq \frac{1+x}{2}\right\}$$

выполнено неравенство

$$1+x^p-2y^p \geqq \frac{p(p-1)}{q(q-1)}(1+x^q-2y^q).$$

С другой стороны, пользуясь рассуждениями предыдущего случая, легко найти постоянную c_{pq} такую, что

$$1+x^p-2y^p \geqq c_{pq}(1+x^q-2y^q)$$

для всех (x, y), принадлежащих замыканию $D \backslash \Lambda$. Для

$$K_{pq}=\min\left(\frac{p(p-1)}{q(q-1)}, c_{pq}\right)$$

выполнено (5). Этим доказательство леммы 1 закончено.

Следствие 1. Если $p>1$, $q>1$, то имеет место неравенство

$$\left\|\frac{f}{p}^p+\frac{g}{p}^p\right\| \left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p \tag{6}$$

$$\geqq K_{pq}\left(\frac{f}{p}^q+\frac{g}{p}^q-\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^q\right)[\max(\|f\|_p, \|g\|_p)]^{p-q}$$

для любых $f, g \in L_p$.

Доказательство. Пусть $\|f\|_p \geqq \|g\|_p$. Полагая $x = \frac{\|g\|_p}{\|f\|_p}$ и $y = \frac{\|f+g\|_p}{2\|f\|_p}$ в (5) и приводя к общему знаменателю, получим (6).

Лемма 2. Пусть $p>1$, $q>1$. Существует постоянная $A_{pq}>0$ такая, что

$$(7)\qquad \left(\frac{\|f\|_p^q+\|g\|_p^q}{2}-\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^q\right)\left(\frac{\|f\|_p^q+\|g\|_p^q}{2}\right)^{\frac{r-q}{q}} \geqq A_{pq}\left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^r,$$

где $r=\max(p, q, 2)$, для всех $f, g \in L_p$.

Доказательство. Пусть $f, g \in L_p$. Известно [7], что

$$(8)\qquad \frac{\|f\|_p^p+\|g\|_p^p}{2}-\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p \geqq d_p\left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^s[\max(\|f\|_p, \|g\|_p)]^{p-s},$$

где $s=\max(p, 2)$, $d_p>0$. Меняя местами p и q в (6) и пользуясь (8), получим

$$(9)\qquad \frac{\|f\|_p^q+\|g\|_p^q}{2}-\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^q \geqq K_{qp}d_p\left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^s[\max(\|f\|_p, \|g\|_p)]^{q-s}.$$

Оценим $[\max(\|f\|_p, \|g\|_p)]^{q-s}$. Если $q \geqq s$, то

$$[\max(\|f\|_p, \|g\|_p)]^{q-s} \geqq \left(\frac{\|f\|_p+\|g\|_p}{2}\right)^{q-s} \geqq \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^{q-s}.$$

Отсюда и из (9) следует (7).

Если $q<s$, то

$$[\max(\|f\|_p, \|g\|_p)]^{q-s} \geqq 2^{q-s}\left(\frac{\|f\|_p^q+\|g\|_p^q}{2}\right)^{\frac{q-s}{q}},$$

что вместе с (5) дает (7).

Предложение 1. Пусть $p>1$, $q>1$. Существует постоянная $a_{pq}>0$ такая, что

$$(10)\qquad \left(\frac{\|u\|_{pq}^q+\|v\|_{pq}^q}{2}-\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_{pq}^q\right)\left(\frac{\|u\|_{pq}^q+\|v\|_{pq}^q}{2}\right)^{\frac{r-q}{q}} \geqq a_{pq}\left\|\frac{u-v}{2}\right\|_{pq}^r,$$

где $r=\max(p, q, 2)$, для любых $u, v \in L_{pq}$.

Доказательство. Зафиксируем y. Положим $u_y(x)=u(x, y)$, $v_y(x)=v(x, y)$. Почти для всех $y\in[0, 1]$ $u_y, v_y\in L_p$. Согласно леммы 2:

$$(11)\qquad \left(\frac{\|u_y\|_p^q+\|v_y\|_p^q}{2}-\left\|\frac{u_y+v_y}{2}\right\|_p^q\right)\left(\frac{\|u_y\|_p^q+\|v_y\|_p^q}{2}\right)^{\frac{r-q}{q}} \geqq A_{pq}\left\|\frac{u_y-v_y}{2}\right\|_p^r,$$

где $r=\max(p, q, 2)$.

Если $q=r$, интегрируя (11) по y в $[0, 1]$, получим (10).

Пусть $q<r$. Возведем (10) в степень $\frac{q}{r}$, После интегрирования полученного неравенства по y в $[0, 1]$, при помощи неравенства Гельдера получим:

$$(12)\qquad \left(\frac{\|u\|_{pq}^q+\|v\|_{pq}^q}{2}-\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_{pq}^q\right)^{\frac{q}{r}}\left(\frac{\|u\|_{pq}^q+\|v\|_{pq}^q}{2}\right)^{\frac{r-q}{r}} \geqq A_{pq}^{\frac{q}{r}}\left\|\frac{u-v}{2}\right\|_{pq}^q.$$

Взводя (12) в степень $\frac{r}{q}$, получим (10).

Лемма 3. Пусть $p>1$, $q>1$. Существует постоянная $B_{pq}>0$ такая, что для любых $f, g\in L_p$:

$$(13)\qquad \frac{\|f\|_p^q+\|g\|_p^q}{2}-\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^q \leqq B_{pq}\left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^r\left(\frac{\|f\|_p^q+\|g\|_p^q}{2}\right)^{\frac{q-r}{q}},$$

где $r=\min(p, q, 2)$.

Доказательство. Пусть $f, g\in L_p$. В [7] было показано

$$(14)\qquad \frac{\|f\|_p^p+\|g\|_p^p}{2}-\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p \leqq b_p'\left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^2\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^{p-2}+b_p''\left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^p,$$

где $b_p'>0$, $b_p''>0$ и $b_p'=0$ при $p<2$. При $p\geqq 2$ оценим сверху правая часть (14):

$$(15)\qquad b_p'\left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^2\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^{p-2}+b_p''\left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^p \leqq (b_p'+b_p'')\left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^2[\max(\|f\|_p, \|g\|_p)]^{p-2}.$$

Имея ввиду (14) и (15), получим

$$(16)\qquad \frac{\|f\|_p^p+\|g\|_p^p}{2}-\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p\leqq b_p\left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^s[\max(\|f\|_p,\|g\|_p)]^{p-s},$$

где $b_p>0$, $s=\min(p, 2)$.

Из (6) и (16) следует:

$$(17)\qquad \frac{\|f\|_p^q+\|g\|_p^q}{2}-\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^q\leqq\frac{b_p}{k_{pq}}\left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^s[\max(\|f\|_p,\|g\|_p)]^{q-s},$$

где $s=\min(p, 2)$.

Оценим $[\max(\|f\|_p,\|g\|_p)]^{q-s}$. Если $q>s$,

$$[\max(\|f\|_p,\|g\|_p)]^{q-s}\leqq 2^{q-s}\left(\frac{\|f\|_p^q+\|g\|_p^q}{2}\right)^{\frac{q-s}{q}}.$$

В случае $q\leqq s$

$$[\max(\|f\|_p(\|g\|_p)]^{q-s}\leqq\left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^{q-s}.$$

Пользуясь этими оценками и (17), получим (13). Этим доказательство леммы 3 закончено.

Предложение 2. Пусть $p>1$, $q>1$. Съществует постоянная $b_{pq}>0$ такая, что для любых $u, v\in L_{pq}$:

$$(18)\qquad \frac{\|u\|_{pq}^q+\|v\|_{pq}^q}{2}-\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_{pq}^q\leqq b_{pq}\left\|\frac{u-v}{2}\right\|_{pq}^r\left(\frac{\|u\|_{pq}^q+\|v\|_{pq}^q}{2}\right)^{\frac{q-r}{q}},$$

где $r=\min(p, q, 2)$.

Доказательство. Можно получить (18) из леммы 3 точно также как получалось (10) при помощи леммы 2.

Теорема 1. Пусть $p>1$, $q>1$. Существует постоянная $\alpha_{pq}>0$ такая, что

$$(19)\qquad \delta_{L_{pq}}(\varepsilon)\geqq\alpha_{pq}\varepsilon^r,$$

где $0\leqq\varepsilon\leqq 2$, $r=\max(p, q, 2)$.

Доказательство. Воспользуемся предложением 1. Пусть $u, v\in L_{pq}$ и $\|u\|_{pq}=\|v\|_{pq}=1$. Из (10) получим:

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_{pq}\leqq\left(1-a_{pq}\left\|\frac{u-v}{2}\right\|_{pq}^r\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Отсюда

$$\delta_{L_{pq}}(\varepsilon)\geqq 1-\left[1-a_{pq}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^r\right]^{\frac{1}{q}}\geqq\frac{a_{pr}}{q2^r}\varepsilon^r.$$

Теорема 2. Пусть $p>1$, $q>1$. Существует постоянная $\beta_{pq}>0$ такая, что

$$\rho_{L_{pq}}(\tau) \leqq \beta_{pq}\tau^r(1+\tau)^{q-r}, \tag{20}$$

где $r=\min(p, q, 2)$.

Доказательство. Пусть $w_1, w_2 \in L_{pq}$. Для функций $u=w_1+w_2$ и $v=w_1-w_2$ выпишем неравенство (18):

$$\left(\frac{\|w_1+w_2\|_{pq}+\|w_1-w_2\|_{pq}}{2}\right)^q - \|w_1\|_{pq}^q \tag{21}$$

$$\leqq b_{pq}\|w_2\|_{pq}^r\left(\frac{\|w_1+w_2\|_{pq}^q+\|w_1-w_2\|_{pq}^q}{2}\right)^{\frac{q-r}{q}},$$

где $r=\min(p, q, 2)$. Если $\|w_1\|_{pq}=1$, $\|w_2\|_{pq}\leqq\tau$, то

$$\frac{\|w_1+w_2\|_{pq}+\|w_1-w_2\|_{pq}}{2} \leqq (1+b_{pq}\tau^r(1+\tau)^{q-r})^{\frac{1}{q}},$$

откуда и следует (20).

ЛИТЕРАТУРА

1. Day, M. M.: Some uniformly convex spaces. Bull. Amer. Math. Soc., **47** (1941) 504—507.
2. Кадец, М. И.: Безусловно сходящиеся ряды в равномерном выпуклом пространстве. Усп. мат. наук, т. IX, вып. 5 (71) (1956), 185—190.
3. Clarkson, J. A.: Uniformly convex spaces. Trans. Amer. Math. Soc., **40** (1936) 396—404.
4. Lindenstrauss, J.: On the modulus of smoothness and divergent series in Banach spaces. Michigan Math. J., **10** (1963), 241—252.
5. Мильман, В. Д.: Геометрическая теория пространств Банаха, ч. I. Усп. мат. наук т. XXV, вып. 3 (153) (1970), 113—174.
6. Мильман. В. Д.: Геометрическая теория пространств Банаха, ч. II. Геометрия единичной сферы. Усп. мат. наук, т. XXVI, вып. 6 (1971), 73—149.
7. Marawetz, C. S.: Two L_p inequalities. Bull. Amer. Math. Soc., **75**, № 2 (1959) 1299—1302.
8. Hanner, O.: On the uniform convexity of L^p and l^p. Ark. Mat. **3**, № 3 (1956) 239—244.

Постъпи а на 2. XII. 1972 г.

ON THE MODULI OF CONVEXITY AND SMOOTHNESS IN L_{pq} SPACES

R. P. Maleev, S. L. Troyanski

(SUMMARY)

The modulus of convexity of a Banach space X is defined by

$$\delta_X(\varepsilon)=\inf\left\{1-\left\|\frac{x+y}{2}\right\|;\ x,\ y\in X,\ \|x\|=\|y\|=1,\ \|x-y\|\geqq\varepsilon\right\}.$$

The modulus of smoothness of a Banach space X is defined by

$$\rho_X(\tau)=\frac{1}{2}\sup\{\|x+y\|+\|x-y\|-2;\ x,y\in X,\ \|x\|=1,\ \|y\|\leqq\tau\}.$$

Let $L_{pq}[0,1]\,(p,q>1)$ be the space of all measurable functions $u(x,y)$ defined in $[0,1]\times[0,1]$ such that

$$\left(\int_0^1\left(\int_0^1|u(x,y)|^p dx\right)^{\frac{q}{p}}dy\right)^{\frac{1}{q}}<+\infty \text{ with}$$

$$\|u\|=\left(\int_0^1\left(\int_0^1|u(x,y)|^p dx\right)^{\frac{q}{p}}dy\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Then

$$k_{pq}\varepsilon^s\leqq\delta_{L_{pq}}(\varepsilon)\leqq K_{pq}\varepsilon^s,\quad 0\leqq\varepsilon\leqq 2,$$

$$c_{pq}\tau^r\leqq\rho_{L_{pq}}(\tau)\leqq C_{pq}\tau^r,\quad 0\leqq\tau\leqq 1,$$

where $s=\max(p,q,2)$, $r=\min(p,q,2)$ and k_{pq}, K_{pq}, c_{pq}, C_{pq} are positive constants.