МОДИФИЦИРАН МЕТОД НА НЮТОН ЗА КОРЕНУВАНЕ НА МАТРИЦИ

Милко Петков, Стефка Боршукова

От теоретична гледна точка важният въпрос за коренуване на матрици е подробно разгледан например в [2]. С настоящата статия се предлага една модификация на метода на Нютон за числено решаване на уравнения, приложима за коренуване на положително дефинитни матрици.

Във връзка с по-нататъшните разглеждания да отбележим следната

Теорема. Ако матрицата A е положително дефинитна и m е естествено число, то матричното уравнение $X^m=A$ има единствено положително дефинитно решение $X=\sqrt[m]{A}$.

Да припомним, че симетричната матрица A от ред n се нарича положително полудефинитна, ако $(Ax, x)\geqq 0$ за всеки вектор $x \in R^n$, и положително дефинитна, ако знакът за равенство в последното неравенство е в сила само за $x=0$. По-нататък неравенствата $A>0$, $A>B$, $C\geqq 0$, $C\geqq D$ ще означават, че матриците A и $A-B$ са положително дефинитни, а C и $C-D$ са положително полудефинитни.

За коренуване на положително дефинитна матрица досега е използуван методът за диагонализиране на матрицата. С други думи, матрицата A се представя във вида $A=T\wedge T'$, където $TT'=E$ и $\wedge=[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]$ е диагонална матрица с диагонални елементи λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Тогава $\sqrt[m]{A}=T\sqrt[m]{\wedge}T'$. В частния случай, когато $m=2$, $\sqrt{A}$ може да се намери и чрез метода на полярното разлагане [1]. Той се състои в следното. Матрицата се разлага на произведение от вида $A=LL'$, където L е лява триъгълна матрица. След това матрицата L се представя във вида $L=MS$, където $M>0$ и $SS'=E$, т. е. осъществява се полярното разлагане на матрицата L. От равенствата $A=MS\,(MS)'=MSS'M=M^2$ следва, че $M=\sqrt{A}$.

Следва разглеждането на едно непосредствено видоизменение на итерационния метод на Нютон за коренуване на положителни числа в итерационен метод за коренуване на положително дефинитни матрици. За целта ще ни бъдат необходими следните леми:

Лема 1. (Неравенство на Бернули.) Ако $E+A=E+A'\geqq 0$ и m е естествено число, то

(1) $$(E+A)^m \geqq E+mA.$$

Доказателство. Разсъждаваме индуктивно. За $m=1$ (1) е очевидно вярно. Допускаме, че неравенството е вярно за някое произволно фиксирано m. Ще докажем верността му за $m+1$. Умножаваме почленно (1) с $E+A$. Посоката на неравенството ще се запази, тъй като матриците $E+A$ и $(E+A)^m-(E+mA)$ са положително полудефинитни и комутират. Получаваме

$$(E+A)^{m+1} \geqq E+(m+1)A+m\,A^2 \geqq E+(m+1)A,$$

т. е.

$$(E+A)^{m+1} \geqq E+(m+1)A.$$

Следователно неравенството (1) е вярно за всяко m.

Лема 2. Ако $\{A_k\}$ е безкрайна редица от матрици, за която

$$A_1=A_1' \geqq A_2=A_2' \geqq \ldots \geqq A_k=A_k' \geqq \ldots \geqq A=A',$$

то тази редица е сходяща.

Доказателство. Нека $A_k=(a_{ij}^{(k)})$ и $A=(a_{ij})$, $i, j=1, 2, \ldots, n$. Съгласно условието имаме

(2) $$(A\,x, x) \leqq (A_{k+1}\,x, x) \leqq (A_k\,x, x), \quad x \in R^n.$$

Ако в (2) заместим вектора x с i-тия ортонормален вектор $l_i=(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)'$, ще получим неравенствата

(3) $$a_{ii} \leqq a_{ii}^{(k+1)} \leqq a_{ii}^{(k)}, \quad i=1, 2, \ldots, n.$$

Следователно редиците $a_{ii}^{(k)}$, $i=1, 2, \ldots, n$, са сходящи.

Ако в (2) заместим вектора x с вектора

$$(0, \ldots, 0, 1, 1, 0, \ldots, 0)', \; i=1, 2, \ldots, n-1,$$

ще получим неравенствата

(4) $$S_{2,i} \leqq S_{2,i}^{(k+1)} \leqq S_{2,i}^{(k)},$$

където $S_{2,i}$ и $S_{2,i}^{(k)}$ са съответно сумите на елементите на онези минори от втори ред на матриците A и A_k, които имат диагонални елементи с номера i и $i+1$. От (4) и (3) се получава лесно, че редиците $a_{i,i+1}^{(k)}$, $i=1, 2, \ldots, n-1$, са сходящи.

С подходящ избор на вектора x в (2) и с подобни разсъждения се доказва последователно, че са сходящи редиците

$$a_{i,i+2}^{(k)}, \; i=1, 2, \ldots, n-2,$$

$$a_{i,i+3}^{(k)}, \; i=1, 2, \ldots, n-3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{1n}^{(k)}.$$

Следователно редицата $\{A_k\}$ е сходяща.

Тази лема е вярна и за монотонно растяща редица от симетрични матрици, която е ограничена отгоре от симетрична матрица.

Теорема. Нека $m \geq 2$ е естествено число, а $p \geq m$ е произволен параметър. Нека матриците A и X_0 са такива, че $A=A'>0$, $X_0=X_0'>0$, $X_0^m \geq A$ и $X_0A=AX_0$.

В такъв случай итерационният процес

$$X_{k+1}=\frac{(p-1)X_k+AX_k^{-m+1}}{p}, \quad k=0, 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

е сходящ към единственото положително дефинитно решение $\sqrt[m]{A}$ на уравнението $X^m=A$, т. е.

$$\lim_{k\to\infty} X_k=\sqrt[m]{A}.$$

Доказателство. Очевидно е, че от $AX_k=X_kA$ следва $AX_{k+1}=X_{k+1}A$. Оттук и от условието $AX_0=X_0A$ получаваме, че всеки член на редицата $\{X_k\}$ комутира с A. Следователно $X_k=X_k'>0$ за всяко k.

Ще покажем, че от $X_k^m \geq A$ следва $X_{k+1}^m \geq A$. Наистина от

$$X_{k+1}^m-A=\left(\frac{(p-1)X_k+AX_k^{-m+1}}{p}\right)^m-A \geq 0$$

получаваме

$$\left(\frac{(p-1)E+AX_k^{-m}}{p}\right)^m \geq AX_k^{-m}$$

или

$$\left(E-\frac{E-AX_k^{-m}}{p}\right)^m \geq AX_k^{-m}.$$

Това неравенство ще е вярно, ако са верни следните неравенства:

$$E+\frac{m(AX_k^{-m}-E)}{p} \geq AX_k^{-m};$$

$$pE+m(AX_k^{-m}-E) \geq pAX_k^{-m};$$

$$(p-m)E \geq (p-m)AX_k^{-m};$$

$$(p-m)(E-AX_k^{-m}) \geq 0;$$

$$(p-m)(X_k^m-A) \geq 0.$$

Но последното неравенство е вярно поради $p \geqq m$ и $X_k^m \geqq A$. Така показахме, че от $X_k^m \geqq A$ следва $X_{k+1}^m \geqq A$. По условие $X_0^m \geqq A$. Следователно неравенството $X_k^m \geqq A$ е изпълнено за всяко k.

Ще използуваме този резултат, за да покажем, че редицата $\{X_k\}$ е монотонно намаляваща. Изследваме разликата $X_{k+1}-X_k$. Имаме

$$X_{k+1}-X_k=\frac{(p-1)X_k+AX_k^{-m+1}}{p}-X_k$$

$$=\frac{AX_k^{-m+1}-X_k}{p}=\frac{X_k^{-m+1}(A-X_k^m)}{p}\leqq 0.$$

Следователно $X_{k+1} \leqq X_k$.

Оттук съгласно лема 2. следва, че редицата $\{X_k\}$ е сходяща, като за границата ѝ X ще имаме $X=X' \geqq 0$. От неравенството $X_k^m \geqq A > 0$ следва $X > 0$.

Забележка. Ако за степента X_0^m на началното приближение и матрицата A имаме другата възможна наредба, т. е. $X_0^m \leqq A$, по подобен начин се доказва неравенството $X_k^m \geqq A$ за $k=1, 2, \ldots$

Ще докажем, че скоростта на сходимост на този итерационен процес при $p=m$ е асимптотично квадратична. Нека k е такова естествено число, че за матрицата X_k, получена по горния итерационен процес, е изпълнено неравенството

$$\| X_k-B \| \leqq q < 1,$$

където $B=\sqrt[m]{A}$. Тук с $\| . \|$ сме означили такава матрична норма, за която от $0<P=P' \leqq Q=Q'$ следва $\|P\| \leqq \|Q\|$. Разглеждаме матричния полином

$$f(X)=X^m-A.$$

По формулата на Тейлор имаме

$$0=f(B)=f(X_k)+(B-X_k)f'(X_k)+\frac{(B-X_k)^2}{2}f''(\Omega), \tag{6}$$

където Ω е положително дефинитна матрица, за която $B \leqq \Omega \leqq X_k$, а $f'(X_k)=mX_k^{m-1}$, $f''(\Omega)=m(m-1)\Omega^{m-2}$.

От (6) получаваме

$$X_k-f(X_k)[f'(X_k)]^{-1}-B=\frac{(B-X_k)^2}{2}f''(\Omega)[f'(X_k)]^{-1},$$

т. е.

$$X_{k+1}-B=\frac{m-1}{2}(B-X_k)^2\,\Omega^{m-2}\,X_k^{-m+1}.$$

Оттук

$$\| X_{k+1}-B \| \leqq \frac{m-1}{2}\| B-X_k \|^2 \| \Omega \|^{m-2} \| X_k^{-1} \|^{m-1}$$

$$\leqq \frac{m-1}{2} \| X_0 \|^{m-2} \| B^{-1} \|^{m-1} \| B - X_k \|^2$$

$$= C \| X_k - B \|^2, \quad C = \frac{m-1}{2} \| X_0 \|^{m-2} \| B^{-1} \|^{m-1} = \text{const.}$$

Следователно

$$\| X_{k+1} - B \| \leqq C \| X_k - B \|^2 \leqq Cq^2,$$

от което следва асимптотично квадратичната сходимост.

Описаният итерационен процес бе експериментиран на АСМ „Минск-22" (вж. таблицата, стр. 346). Пресмятанията бяха извършени над матрици от ред n, които имат вида $A=(E-\alpha WW')^m$ и $A=E-\alpha WW'$, където $0<\alpha<1$ е параметър и $W=\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)'$. За начално приближение бе използувана матрицата $X_0=(E+A^{-1})^{-1}$. Получените резултати при различни стойности на α, m, n са приложени в таблица. Стълбовете a_{ii}, a_{ij} съдържат точните стойности на елементите (диагонален и извъндиагонален) на матрицата $\sqrt[m]{A}$, стълбовете $\tilde{a}_{ii}$, $\tilde{a}_{ij}$ съдържат стойностите на съответните елементи на $\sqrt[m]{A}$, получени по модифицирания метод на Нютон, а стълбът I дава броя на итерациите. Експериментите от № 1 до № 31 са извършени за матрицата $A=(E-\alpha WW')^m$, а тези от № 32 до № 34 — за матрицата $A=E-\alpha WW'$.

Както теоретичните изследвания, така и направените експерименти показват, че предложеният метод е удобен и ефективен за коренуване на положително дефинитни матрици, ако те са достатъчно добре обусловени.

Забележка. Всички разглеждания са направени за реални матрици. При несъществени изменения те могат да бъдат извършени и за матрици с комплексни елементи

Таблица

№	m	n	α	a_{ii}	a_{ij}	$\tilde{a}_{ii}$	$\tilde{a}_{ij}$	I
1	2	3	0,5	0,83(3)	—0,16(6)	0,8333333	—0,1666666	6
2	2	3	0,6	0,8	—0,2	0,8000000	—0,2000000	6
3	2	3	0,7	0,76(6)	—0,23(3)	0,7666666	—0,2333333	6
4	2	3	0,8	0,73(3)	—0,26(6)	0,7333333	—0,2666666	7
5	2	3	0,9	0,7	—0,3	0,7000016	—0,2999983	7
6	2	4	0,5	0,875	—0,125	0,8750000	—0,1250000	6
7	2	4	0,9	0,775	—0,225	0,7750001	—0,2249998	7
8	2	5	0,5	0,9	—0,1	0,9000000	—0,1000000	6
9	2	5	0,9	0,82	—0,18	0,8200001	—0,1799998	7
10	2	6	0,5	0,916(6)	—0,083(3)	0,9166666	—0,08333333	6
11	2	7	0,5	0,9285714	—0,07142856	0,9285714	—0,07142857	6
12	2	8	0,5	0,9375	—0,0625	0,9375000	—0,06250000	6
13	2	9	0,5	0,94(4)	—0,05(5)	0,9444444	—0,05555555	6
14	2	10	0,5	0,95	—0,05	0,9500000	—0,05000000	6
15	2	10	0,9	0,91	—0,09	0,9099997	—0,08999988	7
16	2	20	0,5	0,975	—0,025	0,9750000	—0,02500000	6
17	2	30	0,5	0,983(3)	—0,016(6)	0,9833333	—0,01666666	6
18	2	40	0,5	0,9875	—0,0125	0,9875000	—0,01249996	5
19	2	50	0,5	0,99	—0,01	0,9900001	—0,009999974	5
20	3	3	0,5	0,83(3)	—0,16(6)	0,8333333	—0,1666666	10
21	3	10	0,5	0,95	—0,05	0,9500000	—0,05000000	10
22	3	20	0,5	0,975	—0,025	0,9750000	—0,02500000	10
23	3	30	0,5	0,983(3)	—0,016(6)	0,9833333	—0,01666666	10
24	3	40	0,5	0,9875	—0,0125	0,9875000	—0,01250000	10
25	3	50	0,5	0,99	—0,01	0,9900001	—0,009999997	10
26	5	3	0,5	0,83(3)	—0,16(6)	0,8333335	—0,1666664	48
27	5	10	0,5	0,95	—0,05	0,9500001	—0,0499991	48
28	5	20	0,5	0,975	—0,025	0,9750000	—0,02499993	48
29	5	30	0,5	0,983(3)	—0,016(6)	0,9833333	—0,01666660	48
30	5	40	0,5	0,9875	—0,0125	0,9875000	—0,01250003	48
31	5	50	0,5	0,99	—0,01	0,9900086	—0,009991365	47
32	10	3	0,5	—		0,9776781	—0,02232180	71
33	10	10	0,5			0,9933034	—0,006696540	71
34	10	20	0,5			0,9966517	—0,003348270	71

ЛИТЕРАТУРА

1. Фаддеев, Д. К., В. Н. Фаддеева: Вычислительные методы линейной алгебры. Москва—Ленинград, 1963.
2. Гантмахер, Ф. Р.: Теория матриц. Москва, 1954.

Постъпила на 2. XII. 1972 г.

A MODIFICATION OF NEWTON'S METHOD FOR MATRIX ROOTING

M. Petkov, St. Borshukova

(SUMMARY)

A modification of Newton's method for rooting of numbers applied to the rooting of positively definite matrices is considered. The results from the numerical experiments are given in the paper. It is seen from them that the iterative method proposed is convenient and effective for rooting of positively definite matrices in case the latter are not ill-conditioned.