ОБ ε-ЭНТРОПИИ ОДНОГО КЛАССА АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Борислав Д. Боянов

Обозначим через $A(B, M, \nu)$ класс всех вещественных аналитических на отрезке $[-1, 1]$ функций, для которых существуют аналитические продолжения, ограниченные по модулю в круге $|z| \leqq 1$ константой $B>0$ и для которых

$$|f^{(n)}(x)| \leqq BM^n n^{\nu n} \quad (n=0, 1, 2, \ldots)$$

на отрезке $[-1, 1]$. Рассмотрим задачу, поставленую Н. С. Бахваловым о вычислению ε-энтропии класса $A(B, M, \nu)$. Мы остановимся на случае $\nu \in (0, 1)$. Для этих значений параметра ν ясно, что каждая функция $f \in A(B, M, \nu)$ является целой поскольку

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{M^n n^{\nu n}}}{n} = 0.$$

Сначала сформулируем и докажем три леммы, которые будут нужны нам при доказательстве основного результата. За норму $f(z)$ принимается $\max\limits_{x \in [-1, 1]} f(x)$.

Лемма 1. Пусть n и p натуральные числа, $0<\nu<1$, $p \geqq n$. Тогда

$$\frac{p^{\nu p}}{p^p} \frac{n^n}{n^{\nu n}} \leqq \frac{(p-n)^{\nu(p-n)}}{(p-n)^{(p-n)}}. \tag{1}$$

Доказательство. Используя, что $p \geqq n$, получим

$$(p-n)^{(p-n)} . n^n \leqq \{\max(p-n, n)\}^{p-n} . \{\max(p-n, n)\}^n$$
$$\leqq \{\max(p-n, n)\}^p \leqq p^p$$

Это дает

$$\left(\frac{n^n}{p^p}\right)^{1-\nu} \leqq \frac{1}{(p-n)^{(1-\nu)(p-n)}},$$

из которого следует (1).

Лемма 2. Если $f \in A(B, M, \nu)$ и $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n T_n(x)$, где $T_n(x)$ — многочислены Чебышева, то $a_0 \leqq B\pi$,

$$|a_n| \leqq \frac{8}{\pi} \frac{B M^n n^{\nu n}}{n!\, 2^n} \quad (n=1, 2, \ldots).$$

Доказательство. Из неравенства $|f^{(n)}(x)| \leqq B M^n n^{\nu n}$ получим

$$E_{n-1}(f) \leqq B \frac{M^n n^{\nu n}}{n!\, 2^{n-1}},$$

где через $E_{n-1}(f)$ обозначили наилучшее приближение функции $f(x)$ многочленами степени $n-1$. Воспользуясь известной оценкой [1],

$$|a_n| \leqq \frac{4}{\pi} E_{n-1}(f), \quad \text{получим}$$

$$|a_n| \leqq \frac{8}{\pi} \frac{B M^n n^{\nu n}}{n!\, 2^n}.$$

Осталось оценить a_0. Из определения a_0 и ограниченности $f(x)$ через B сразу следует $|a_0| \leqq B\pi$.

Лемма 3. Если $|a_0| \leqq B/A$,

$$a_0 \leqq \frac{M^p p^{\nu p}}{e^p 2^p p!} \cdot \frac{B}{A} \quad (p=1, 2, \ldots),$$

где

$$A = 2 \sum_{p=0}^{\infty}{}' \left(\frac{Me}{2}\right)^p \left(\frac{1}{p^{(1-\nu)}}\right)^p,$$

то $f \in A(B, M, \nu)$.

Доказательство. Заметим, что

$$\max_{z \leqq 1} |T_p(z)| = \max_{z \leqq 1} \frac{1}{2} \left|(z+\sqrt{z^2-1})^p + (z-\sqrt{z^2-1})^p\right|$$

$$\leqq (1+\sqrt{2})^p < e^p.$$

Применяя это неравенство, получим

$$\left|\sum_{p=0}^{\infty}{}' a_p T_p(z)\right| \leqq \frac{B}{A} \sum_{p=0}^{\infty}{}' \frac{M^p p^{\nu p}}{2^p p!} < \frac{2B}{A} \sum_{p=0}^{\infty}{}' \left(\frac{Me}{2}\right)^p \frac{p^{\nu p}}{p^p} = B.$$

Здесь мы использовали формулу Стирлинга

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}\,(1-\varepsilon_n) \quad \varepsilon_n \to 0.$$

Оценим n-тую производну функции $f(x)$.

$$\max_{x\in[-1,1]} |f^{(n)}(x)| \leqq \sum_{p=n}^{\infty} a_p \frac{p^2(p^2-1)\ldots(p^2-(n-1)^2)}{1.\ 3.\ 5\ldots(2n-1)},$$

так как ([1], стр. 241)

$$|T_p^{(n)}(x)| \leqq T_p^{(n)}(1) = \frac{p^2(p^2-1)\ldots(p^2-(n-1)^2)}{1.\ 3.\ 5\ldots(2n-1)}.$$

Далее

$$\max_{x\in[-1,1]} |f^{(n)}(x)| \leqq \frac{B}{A} \sum_{p=n}^{\infty} \frac{M^p p^{\nu p}}{e^p\, 2^p\, p!} \frac{2^n n!\, p^{2n}}{(2n)!}$$

$$\leqq \frac{B}{A} M^n n^{\nu n} \sum_{p=n}^{\infty} \left(\frac{M}{2}\right)^{p-n} \frac{p^{\nu p} n!}{p!\, n^{\nu n}}$$

$$= \frac{B}{A} M^n n^{\nu n} \sum_{p=n}^{\infty} \left(\frac{M}{2}\right)^{p-n} \frac{p^{\nu p} e^p n^n \sqrt{2\pi n}(1+\varepsilon_n)}{p^p \sqrt{2\pi p}(1+\varepsilon_p)\, e^n n^{\nu n}}$$

$$\leqq \frac{B}{A} M^n n^{\nu n}\, 2 \sum_{p=n}^{\infty} \left(\frac{Me}{2}\right)^{p-n} \frac{p^{\nu p} n^n}{p^p n^{\nu n}}.$$

Отсюда по лемме 1. получим

$$\max_{x\in[-1,1]} |f^{(n)}(x)| \leqq BM^n n^{\nu n}.$$

Лемма доказана.

Обозначим через H_ε ε — энтропию класса $A(B, M, \nu)$. Имеет место следующая

Теорема 1. Для любого достаточно малого $\varepsilon>0$ справедлива оценка

$$H_\varepsilon = \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\ln^2 \frac{1}{\varepsilon}}{\ln\ln \frac{1}{\varepsilon}} + O\left(\frac{\ln^2 \frac{1}{\varepsilon} \ln\ln\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\left(\ln\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^2}\right).$$

Доказательство. Пусть $\delta>0$, натуральные числа $r\geqq 1$ и

$$q_p (p=0,\ 1, \ldots,\ r)$$

такие, что

$$\frac{8}{\pi} \frac{B M^r r^{\nu r}}{r!\ 2^r} \geqq \delta,$$

$$q_p+1 \geqq \frac{8}{\pi} \frac{B M^p p^{\nu p}}{p!\ 2^p \delta} \geqq q_p \quad (p=1,\ 2, \ldots,\ r),$$

$$q_0+1 \geqq \frac{B\pi}{\delta} \geqq q_0 .$$

Обозначим через N_1 число всех функций вида

$$k_0\delta+\sum_{p=1}^{r} k_p\delta\, T_p(x),$$

где $k_i \leqq q_i$ $(i=0,\ 1,\ \ldots,\ p)$. Получим верхную оценку для N_1.

$$N_1 \leqq \frac{2B\pi}{\delta}\prod_{p=1}^{r}\frac{8}{\pi}\ \frac{B\,M^p p^{\nu p}}{p!\ 2^p\delta} = \frac{2B\pi}{\delta^{r+1}}\left(\frac{2B}{\pi}\right)^{r+1}\left(\frac{Me}{2}\right)^{\frac{r(r+1)}{2}}\prod_{p=1}^{r}\frac{p^{\nu p}}{p!}.$$

Пусть теперь $\delta>0$, где $r \geqq 1$ и натуральные числа $q_p^*(p=0,\ 1,\ldots,\ r)$ выбраны так, что

$$\frac{B}{A}\ \frac{M^r r^{\nu r}}{e^r 2^r r!} \geqq \delta,$$

$$q_p^*+1 \geqq \frac{B}{A}\ \frac{M^p p^{\nu p}}{2^p e^p p!\,\delta} \geqq q_p^* \quad (p=1,\ 2,\ldots,\ r),$$

$$q_p^*+1 \geqq \frac{B}{A\delta} \geqq q_0^* .$$

Оценим снизу число N_2 всех функций вида $k_0\delta+\sum_{1}^{r} k_p\delta\, T_p(x)$, где

$$(*) \qquad k_i \leqq g_i^* \quad (i=0,\ 1,\ \ldots,\ r).$$

$$N_2 \geqq \frac{B}{A\delta}\prod_{p=1}^{r}\frac{B}{A}\left(\frac{M}{2e}\right)^p\frac{p^{\nu p}}{\delta\, p!}$$

$$\geqq \left(\frac{B}{A\delta}\right)^{r+1}\left(\frac{M}{2e}\right)^{\frac{r(r+1)}{2}}\prod_{p=1}^{r}\frac{p^{\nu p}}{p!}.$$

Отметим еще и следующее вспомагательное неравенство

$$\frac{r^2}{2}\ln r-\frac{1}{4}r^2 \leqq \prod_{p=1}^{r} p^p \leqq \frac{(r+1)^2}{2}\ln(r+1)-\frac{1}{4}(r+1)^2 .$$

Положим $\delta=\varepsilon(r+1)$ и

$$r = \frac{1}{1-\nu} \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln \ln \frac{1}{\varepsilon}}.$$

Сначала покажем, что для достаточно малых $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство

$$\frac{8}{\pi} \sum_{p=r+1}^{\infty} \frac{B M^p p^{\nu p}}{p!\, 2^p} \leqq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Действительно

$$\frac{8}{\pi} \sum_{p=r+1}^{\infty} \frac{B M^p p^{\nu p}}{p!\, 2^p} = \frac{8}{\pi} \frac{B M^r r^{\nu r}}{r!\, 2^r} \sum_{p=r+1}^{\infty} \frac{M^{p-r} p^{\nu p} r^r \sqrt{2\pi r}(1+\varepsilon_r) e^p}{2^{p-r} r^{\nu r} e^r p^p (1+\varepsilon_p) \sqrt{2\pi p}}.$$

$$\leqq \frac{8}{\pi} \frac{B M^r r^{\nu r}}{r!\, 2^r} \cdot 2 \sum_{p=r+1}^{\infty} \frac{M^{p-r} e^{p-r} (p-r)^{\nu(p-r)}}{2^{p-r} (p-r)^{(p-r)}} = \frac{16}{\pi} AB \frac{M^r r^{\nu r}}{r!\, 2^r}.$$

Утверждение будет справедливо, если

$$\frac{16}{\pi} AB \left(\frac{Me}{2}\right)^r \frac{1}{r^{(1-\nu) r}} \leqq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Беря логарифм, получим последовательно

$$\ln \frac{16AB}{\pi} + r \ln \frac{Me}{2} + \ln \frac{2}{\varepsilon} \leqq r(1-\nu) \ln r,$$

$$\ln \frac{32AB}{\pi} + \frac{1}{1-\nu} \ln \frac{Me}{2} \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln \ln \frac{1}{\varepsilon}} + \ln \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\leqq \frac{1}{1-\nu} \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln \ln \frac{1}{\varepsilon}} \left(\ln \ln \frac{1}{\varepsilon} - \ln \ln \ln \frac{1}{\varepsilon} + \ln \frac{1}{1-\nu}\right),$$

$$\ln \frac{32AB}{\pi} + \frac{1}{1-\nu} \ln \frac{Me}{2} \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln \ln \frac{1}{\varepsilon}} + \ln \frac{1}{\varepsilon} \leqq \frac{1}{1-\nu} \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln \ln \frac{1}{\varepsilon}}$$

$$+\frac{1}{1-\nu}\ln\frac{1}{1-\nu}\,\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}}-\frac{1}{1-\nu}\,\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}}\cdot\ln\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}.$$

Последнее неравенство очевидно верно для достаточно малых ε.

Пусть теперь $f\in A(B, M, \nu)$ и $f(x)=a_0+\sum_1^\infty a_p T_p(x)$. Подберем числа $k_p\,(p=0, 1, \ldots, r)$ так, чтобы

$$|a_p-k_p\delta|\leq\frac{1}{2}\delta=\frac{\varepsilon}{2(r+1)}.$$

Тогда функция $g(x)=k_0\delta+\sum_1^r k_p\delta\, T_p(x)$ будет уклоняться от $f(x)$ не больше чем ε. Следовательно $H_\varepsilon\leqq\ln N_1$. Из оценки для N_1, помня, что $\delta=\frac{\varepsilon}{r+1}$, получим

$$H_\varepsilon\leqq\frac{r(r+1)}{2}\ln\frac{Me^2}{2\sqrt{2\pi}}+(r+1)\ln\frac{8}{\pi}+\ln 2B\pi+(r+1\ln\frac{r+1}{\varepsilon}$$

$$-\frac{1-\nu}{2}r^2\ln r+\frac{r^2}{4}+r\ln e-r\ln r=\frac{1}{2(1-\nu)^2}\ln\frac{Me}{2}\,\frac{\ln^2\frac{1}{\varepsilon}}{\left(\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^2}$$

$$+\frac{1}{1-\nu}\,\frac{\ln^2\frac{1}{\varepsilon}}{\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}}-\frac{1}{2(1-\nu)}\,\frac{\ln^2\frac{1}{\varepsilon}}{\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}}+o\left(\frac{\ln^2\frac{1}{\varepsilon}\,\ln\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\left(\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^2}\right)$$

$$-\frac{1}{2(1-\nu)}\,\frac{\ln^2\frac{1}{\varepsilon}}{\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}}+o\left(\frac{\ln^2\frac{1}{\varepsilon}\,\ln\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\left(\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^2}\right).$$

Положим теперь $\delta=3\varepsilon$. Пусть $f_1(x)=\sum_0^r k_p' T_p(x)$ и

$$f_2(x)=\sum_0^r k_p'' T_p(x),$$

где k'_p и k''_p удовлетворяют неравенством (*). Тогда из известного свойства многочленов Чебышева $\|a\,T_p(x) - a\|$ следует $|f_1 - f_2| > 2\varepsilon$. Следовательно $H_\varepsilon \geqq \ln N_2$. Из оценки для N_2 легко получить

$$H_\varepsilon \geqq (r+1)\ln\frac{B}{A} + (r+1)\ln\frac{1}{3\varepsilon} + \frac{r(r+1)}{2}\ln\frac{M}{2\sqrt{2\pi}}$$

$$-\frac{(1-\nu)}{2}(r+1)^2\ln(r+1) + \frac{(r+1)^2}{4} - r\ln r = \frac{1}{1-\nu}\,\frac{\ln^2\frac{1}{\varepsilon}}{\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}}$$

$$-\frac{1}{2(1-\nu)}\,\frac{\ln^2\frac{1}{\varepsilon}}{\left(\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^2}\ln\ln\frac{1}{\varepsilon} - \ln\ln\ln\frac{1}{\varepsilon} + \ln\frac{1}{1-\nu}\Bigg)$$

$$+\left(\frac{1}{2}\ln\frac{M}{2\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{4}\right)\frac{1}{(1-\nu)^2}\,\frac{\ln^2\frac{1}{\varepsilon}}{\left(\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^2} + O\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

$$= \frac{1}{2(1-\nu)}\,\frac{\ln^2\frac{1}{\varepsilon}}{\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}} + O\left(\frac{\ln^2\frac{1}{\varepsilon}\,\ln\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\left(\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^2}\right)$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тиман, А. Ф.: Теория приближения функций действительного переменного. Москва, 1960.

Постъпила на 2. XII. 1972 г.

ÜBER DIE ε-ENTROPIE EINER KLASSE VON ANALYTISCHEN FUNKTIONEN

B. D. Bojanov

(ZUSAMMENFASSUNG)

Es wird eine Klasse reeller Funktionen betrachtet, die analytisch im Intervale $[-1, 1]$ sind, mit analytischer Fortsetzung im Kreise $|z| \leq 1$, wobei die Ungleichungen

$$|f(z)| \leq B \quad \text{in} \quad |z| \leq 1$$

und

$$|f^{(n)}(x)| \leq B M^n n^{\nu n} \quad (n=0, 1, 2, \ldots)$$

in $[-1, 1]$ gelten. Für die ε-Entropie dieser Klasse bei $\nu \in (0, 1)$ wird die folgende Abschätzung aufgestellt:

$$H_\varepsilon = \frac{1}{2(1-\nu)} \cdot \frac{\ln^2 \frac{1}{\varepsilon}}{\ln \ln \frac{1}{\varepsilon}} + O\left(\frac{\ln^2 \frac{1}{\varepsilon} \ln \ln \ln \frac{1}{\varepsilon}}{\left(\ln \ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^2} \right).$$