О ТЕОРЕМЕ РУШЕ

Генчо С. Скордев

1. Хорошо известна следующая теорема. Руше: пусть G — ограниченная область в плоскости R^2 и $f, g: G \to R^2$ — голоморфные функции в G. Если Γ — граница G и для любого $z \in \Gamma$ имеем $f(z) > g(z) > 0$, то $f(z)$ и $f(z)+g(z)$ имеют одинаковое число нулей в G, см. [1], гл. 6, § 10, 33. Хотя эта теорема сформулирована для голоморфных функций, то ее содержание топологическое. Это было замечено давно и рассмотрение теоремы Руше в рамках топологической теории функции комплексного переменного сделано например в [2], гл. 3, § 20.

Топологическая трактовка теоремы Руше основана на следующей ее интерпретации. Рассмотрим f и $f+g$ как векторные поля, определенные на $\overline{G}$. Так как $f(z) > g(z) > 0$ для любого $z \in \Gamma$, то эти векторные поля не имеют особенностей на Γ. Тогда определено их вращение (см. [3], гл. 2, § 1) — $\gamma(f)$, $\gamma(f+g)$. Числа $\gamma(f)$ и $\gamma(f+g)$ равны сумме индексов особых точек f и $f+g$ в G, соответственно (так как $f(z)$ и $g(z)$ — голоморфны и не равны тождественно нулю, то они имеют лишь конечное число нулей в G). Любая особая точка $f(z)$ $(f(z)+g(z))$ в G есть нуль $f(z)$ $(f(z)+g(z))$ и ее индекс равен кратности этого нуля (при этом мы выбрали стандартную ориентацию G). Так что $\gamma(f)$ $(\gamma(f+g))$ есть сумма нулей $f(z)$ $(f(z)+g(z))$ взятых вместе с кратностями. Следовательно, теорема Руше утверждает, что $\gamma(f)=\gamma(f+g)$. Но для определения $\gamma(f)$ и $\gamma(f+g)$ не нужна голоморфность $f(z)$ и $g(z)$, а только их непрерывность. В классе непрерывных функций теорема Руше тоже справедлива, см. например [3, 4].

Теорема Руше играет важную роль при вычислении вращений нелинейных векторных полей. При вычислении вращений нелинейных векторных полей обычно данные поля заменяются своими главными частями и при помощи теоремы Руше доказывается, что вращение главной части и вращение данного поля равны, см. [3, 5].

Аналоги теоремы Руше были доказаны и для полунепрерывных сверху многозначных отображений $F: U \to U$, где U — открытое подмножество в n-мерном евклидовом пространстве R^n и $F(x)$ — выпуклы и компактны для любого $x \in U$, см. [6].

Наша цель — доказать теорему Руше для полунепрерывных сверху ациклических отображений $F: M \to R^{n+1}$, где $F(x)$ — компакт для любого $x \in M$. Для таких полей определено вращение; см. например

[7]. Доказываемая теорема анонсирована в [9]. Мы будем пользоваться обозначениями и определениями данными в [8].

2. Пусть R^{n+1} — $n+1$-мерное евклидовое пространство. Если $x, y \in R^{n+1}$, то через (x, y) будем обозначать скалярное произведение x, y, а через $|x| = \sqrt{(x, x)}$. Через S^n будем обозначать единичную сферу R^{n+1} с центром в нуле $\theta \in R^n$: $S^n = \{x \in R^{n+1}: |x| = 1\}$.

Пусть M^n — компактное, без края, ориентируемое, частично-линейное подмногообразие R^{n+1}, а $f: M^n \to R^{n+1}$ — однозначное непрерывное отображение, которое не имеет неподвижных точек, т. е. $f(x) \neq x$ для любого $x \in M^n$. Отображению f ставится в соответствие векторное поле $\varphi(x) = x - f(x)$, для любого $x \in M^n$. Так как f не имеет неподвижных точек, то $\varphi(x) \neq \theta$ для любого $x \in M^n$. Через R_0^{n+1} обозначим $R^{n+1} \setminus \{\theta\}$, где θ — нулевой вектор пространства R^{n+1}. Итак $\varphi(M^n) \subset R_0^{n+1}$ отображение φ индуцирует гомоморфизм $\varphi_*: H_*(M^n) \to H_*(R_0^{n+1})$. Здесь и дальше будем рассматривать гомологии с рациональными коэффициентами, при этом в классе компактов будем пользоваться гомологиями Чеха. Если через $[M^n]$ и $[R_0^{n+1}]$ обозначим образующие $H_n(M^n)$ и $H_n(R_0^{n+1})$, соответственно, то $\varphi_n([M^n]) = d(f)[R_0^{n+1}]$. Число $d(f)$ называется степенью отображения f.

Пусть теперь $F: M^n \to R^{n+1}$ — полунепрерывное сверху ациклическое отображение, для которого $F(x)$ — компакт для любого $x \in M^n$. Рассмотрим векторное поле $\Phi(x) = \varphi(x) - F(x)$. Предположим, что $\Phi(M^n) \subset R_0^{n+1}$. Так как отображение F полунепрерывное сверху и любой точке ставит в соответствие компакт в R_0^{n+1}, то $\Phi(M^n)$ есть замкнутое и ограниченное множество в R^{n+1}, которое не содержит θ. Следовательно, существует $D = \{x \in R^{n+1}: r_1 \leqq |x| \leqq r_2\}$, где $r_1 > 0$ такое, что $\Phi(M^n) \subset D$ и $\varphi(M^n) \subset D$.

Будем рассматривать Φ как отображение $\Phi: M^n \xi \to D$. Через $\Gamma(\Phi)$ обозначим граф отображения Φ, а $p_1: \Gamma(\Phi) \to M^n$, $p_2: \Gamma(\Phi) \to D$, такие что $p_i(x_1, x_2) = x_i$, $i = 1, 2$. К отображению $p_i: \Gamma(\Phi) \to M^n$ применима теорема Вьеториса, см. [10], так как $\Gamma(\Phi)$ — компакт. Следовательно, $p_{1*}: H_*(\Gamma(\Phi)) \to H_*(M^n)$ — изоморфизм. Вращение векторного поля Φ называется число $i(\Phi)$, определенное из равенства $p_{2*} p_{1*}^{-1}([M^n]) = i(\Phi)[D]$. Здесь $[D]$ — образующая группы $H_*(D)$. Степенью $d(f+F)$ отображения $f+F$ называется число $i(\Phi)$.

Предложение. Пусть $F: M^n \to R^{n+1}$ — полунепрерывное сверху ациклическое отображение, ставящее любой точке в соответствие компактное подмножество $F(x)$. Если f — однозначное и непрерывное отображение без неподвижных точек $f: M^n \to R^{n+1}$ и $(y, x - f(x)) < |x - f(x)|^2$ для любого $y \in F(x)$ и всякого $x \in M^n$, то $d(f) = d(f+F)$.

Через $\pi: D \to S^n$ обозначим отображение $\pi(x) = x|x|^{-1}$, для любого $x \in D$. Имеем $d(f+F)[S^n] = \pi_n p_{2n} p_{1n}^{-1}[M^n]$, где $[S^n]$ — образующая $H_n(S^n)$, а $\pi_*: H_*(D) \to H_*(S^n)$ — гомоморфизм, индуцированы непрерывным отображением π.

Нам будет нужна следующая

Лемма. Существуют триангуляции τ' и τ многообразия M^n и сферы S^n, соответственно, и цепные отображения

$$\alpha_* = \{\alpha_i\},\ \beta_* = \{\beta_i\} : C_*(M^n, \tau') \to C_*(S^n, \tau)$$

со следующими свойствами:

а. α_* и β_* — пополняемые цепные отображения, см. [11].

б. Если α_* и β_* суть гомоморфизмы в гомологиях, порожденных α_* и β_*, то $\alpha_* = \pi_* \varphi_*$, $\beta_* = \pi_* \Phi_*$, где Φ_*, $\varphi_* : H_*(M^n) \to H_*(D)$ и $\Phi_* = p_{2*} p_{1*}^{-1}$, а φ_* — индуцирован $\varphi : M^n \to D$.

г. α_* и β_* переносятся геометрической ациклической функцией носителя, см. [11].

Напомним, что $C_*(M^n, \tau')(C_*(S^n, \tau))$ — группы ориентированных цепей M^n триангуляции τ' (S^n триангуляции τ) с рациональными коэффициентами.

Из этой леммы предложение следует непосредственно. Действительно по теореме об ациклических носителях $\alpha_* = \beta_*$, см. [11].

Доказательство леммы.

Введем несколько обозначений. Пусть $x \in S^n$; через R^n_x обозначим n-мерное подпространство R^{n+1}, которое ортогонально x. Плоскость R^n_x разбивает S^n на полусферы S^n_{x+} и S^n_{x-}; пусть S^n_{x+} содержит x.

Пусть τ — триангуляция S^n, удовлетворяющая следующим условиям:

а. Если $\alpha; S^n \to S^n$, $\alpha(x) = -x$, то τ — инвариантна относительно α (т. е. для любого симплекса $\sigma \in \tau$, $\alpha(\sigma)$ — тоже симплекс триангуляции τ.

б. Если a — вершина τ, то $\mathrm{St}^3_\tau a \cap \mathrm{St}^3 S^n_{a-} = \varnothing$.

в. Если $x \in \mathrm{St}_\tau a$, то $\mathrm{St}_\tau S^n_{x-} \subset \mathrm{St}^2_\tau S^n_{a+}$.

Пусть δ — число Лебега покрытия $\{\mathrm{St}_\tau a\}$, где a пробегает множество всех вершин триангуляции τ и пусть $\omega_1 \in \mathrm{Cov}(S^n)$ и $\mathrm{diam}\,\omega_1 = \delta_1 < \frac{\delta}{3}$, при этом $\mathrm{diam}\,\omega_1 < \frac{\delta}{3}$ означает, что любой элемент ω_1 имеет диаметр меньше $\frac{\delta}{3}$.

Существует такое положительное число δ_2, что $\delta_2 < \delta_1$ и

$$\pi\, O_{\delta_2} \pi \Phi(x) \subset O_{\delta_1} S^n_{\pi\varphi(x)}.$$

При этом, если $A \subset S^n$ и ν — положительное число, то $O_\nu A$ есть множество всех точек из S^n, расстояния которых до A небольше ν.

Рассмотрим непрерывное отображение $\pi\varphi : M^n \to S^n$. Пусть $\alpha_1 : (M^n, \tau_1) \to (S^n, \tau)$ — симплициальная аппроксимация отображения $\pi\varphi$. Здесь τ_1 — триангуляция M^n и стало быть α_1 — симплициальное

отображение триангуляции τ_1 в триангуляцию τ, аппроксимирующее $\pi\varphi$ в принятом смысле, см. [11].

Пусть σ — симплекс триангуляции τ_1. Так как α_1 — симплициальное отображение τ_1 в τ, то существует симплекс σ' триангуляции τ, такой, что $\pi\varphi \operatorname{St}_{\tau_1}\sigma \subset \operatorname{St}_\tau \sigma'$.

Через δ_3 обозначим число Лебега триангуляции τ_1 и пусть τ_2 — триангуляция M^n, являющаяся подразделением τ_1 и $\operatorname{diam}\tau_2 < \frac{\delta_3}{3}$, т. е. любая открытая звезда триангуляции τ_2 имеет диаметр меньше $\frac{\delta_3}{3}$. Пусть кроме того $\omega_0 \in \operatorname{Cov}(M^n)$. Через ω_0 обозначим покрытие, состоящееся из главных звезд триангуляции τ_2.

Выберем такое положительное число $\delta_4 < \delta_3$, что если $\omega_2 \in \operatorname{Cov}(D)$ и $\operatorname{diam}\omega_2 < \delta_4$, то $\operatorname{diam}\pi V_l < \omega_1$ для любого $V_e \in \omega_2$, т. е. πV_l содержится в некотором элементе покрытия ω_1 для любого $V_e \in \omega_2$.

Если δ_5 — число Лебега покрытия ω_2, то пусть δ_6 такое положительное число, что если $y_1, y_2 \in \Gamma(\Phi)$ и $d(y_1, y_2) < \delta_6$, то $p_2(y_1) - p_2(y_2) < \delta_5$. Здесь d есть метрика $\Gamma(\Phi)$. Выберем $\omega_3 \in \operatorname{Cov}(\Gamma(\Phi))$ с диаметром меньше $\frac{\delta_6}{2}$.

Рассмотрим наконец $p_1 : \Gamma(\Phi) \to M^n$ и $\omega_3 \in \operatorname{Cov}(\Gamma(\Phi))$ и $\omega_0 \in \operatorname{Cov}(M^n)$.

По лемме 2 из [10] существует $\omega_4 \in \operatorname{Cov}(M^n)$ и цепное отображение $T_* = \{T_i\} : C_*(M^n, \omega_4) \to C_*(\Gamma(\Phi), \omega_3)$ со следующими свойствами:

а. $\omega_4 > \omega_0$.

б. Если σ^s — s-мерный симплекс $C_s(M^n, \omega_4)$, то существует точка $x_0 \in M^n$, для которой $\operatorname{St}_{\omega_0} x_0 \supset \sigma^s$ и $T_s \sigma^s \subset \operatorname{St}_{\omega_3} p_1^{-1}(x_0)$.

Отсюда получаем $\pi_s p_{2s} T_s \sigma^s \subset \pi O_{\delta_2} \Phi(x_0) \subset O_{\delta_1} S^n_{\pi\varphi(x_0)+}$.

Если δ_7 — число Лебега покрытия ω_4, то пусть τ_3 — триангуляция M^n с диаметром меньше $\frac{\delta_7}{3}$ и пусть

$$\psi_* = \{\psi_s\} : C_*(M^n, \tau_3) \to C_*(M^n, \omega_4) \ —$$

цепное отображение, индуцирующее естественный изоморфизм между теориями гомологии Чеха и Вьеториса, см. [10]. Через

$$\zeta_* = \{\zeta_s\} : C_*(S^n, \omega_1) \to C_*(S^n, \tau)$$

обозначим цепное отображение, устанавливающее изоморфизм между теориями Вьеториса и Чеха, см. [10].

Рассмотрим цепное отображение $\xi\beta_* = \zeta_* \pi_* p_{2*} T_* \psi_* \xi$. Из конструкции β_* ясно, что оно является пополняемым цепным отображением.

Пусть $\chi_* = \{\chi_s\} : C_*(M^n, \tau_3) \to C_*(M^n, \tau_1)$ — цепное отображение обратное к подразбиению цепей и пусть $\alpha_* = \alpha_{1*}\chi_*$. Цепное отображение α_* тоже пополняемо, так как χ_* индуцировано симплициальным отображением.

Теперь покажем, что α_* и β_* переносятся геометрической ациклической функцией носителя $P: M^n \to C_*$.

Пусть σ^s — симплекс триангуляции τ_3. Тогда $\chi(\sigma^s)$ есть симплекс триангуляции τ_1. Имеем $\alpha_s(\sigma^s) = \alpha_1 \chi(\sigma^s)$. Положим $P(\sigma^s) = S^n \backslash \alpha\, \mathrm{St}_\tau \alpha_s(\sigma^s)$. Имеем следующее включение $\chi\, \mathrm{St}_{\tau_3} \sigma^s \subset \mathrm{St}_{\tau_1} \chi(\sigma^s)$ и, следовательно, $\pi\varphi\, \mathrm{St}_{\tau_3} \sigma^s \subset \pi\varphi\, \mathrm{St}_{\tau_1} \chi(\sigma^s)$. Кроме того, существует вершина a_0 триангуляции τ такая, что $\pi\varphi\, \mathrm{St}_{\tau_1} \chi(\sigma^s) \subset \mathrm{St}_\tau a_0$. Так как α_1 есть симплициальная аппроксимация $\pi\varphi$, то $\alpha_s(\sigma^s) \subset \mathrm{St}^2_\tau a_0$. Имеем $P(\sigma^s) = S^n \backslash \alpha\, \mathrm{St}_\tau \alpha_s(\sigma^s) \supset S^n \backslash \alpha\, \mathrm{St}^3_\tau a_0$, но $\alpha\, \mathrm{St}^3_\tau a_0 \cap \mathrm{St}^3_\tau S^n_{a_0+} = \emptyset$, следовательно, $P(\sigma^s) \supset \mathrm{St}^3_\tau S^n_{a_0+}$.

Имеем $|\pi_s p_{2s} T_s \varphi_s \sigma^s| \subset O_{\delta_1} S^n_{\pi\varphi(x_0)+} \subset \mathrm{St}_\tau S^n_{\pi\varphi(x_0)+}$. Точка x_0 была такой, что $\mathrm{St}_{\omega_0} x_0 \supset \sigma^s$. Тогда $\mathrm{St}_{\tau_3} \sigma^s \ni x_0$ и, следовательно, $\pi\varphi(x_0) \in \mathrm{St}_\tau a_0$. Тогда, ввиду выбора триангуляции τ, имеем $\mathrm{St}_\tau S^n_{\pi\varphi(x_0)+} \subset \mathrm{St}^2_\tau S^n_{a_0+}$, так что выполнено $\pi_s p_{2s} T_s \varphi_s \sigma^s \subset \mathrm{St}^2 S^n_{a_0+}$. Отсюда получаем $\zeta_s \pi_s p_{2s} T_s \varphi_s \sigma^s \subset \mathrm{St}^3_\tau S^n_{a_0+}$. Так как $\mathrm{St}^3_\tau S^n_{a_0+} \cap \alpha\, \mathrm{St}^3_\tau a_0 = \emptyset$, то $P(\sigma^s) \supset |\zeta_s \pi_s p_{2s} T_s \varphi_s \sigma_s| = \beta_s(\sigma^s)$. Так как P есть геометрический ациклический носитель, то лемма доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шабат, Б.: Введение в комплексный анализ. Москва, 1969.
2. Морс, М.: Топологические методы теории функции комплексного переменного. Ленинград, 1951.
3. Красносельский, М.: Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. Москва, 1956.
4. Шварц, Л.: Анализ. II. Москва, 1972.
5. Красносельский, М., Перов, А., Поволоцкий, А., Забрейко, П.: Векторные поля на плоскости. Москва, 1963.
6. Борисович, Ю., Гельман, Б., Мухамадиев, Э., Обуховский, В.: О вращении многозначных векторных полей. Труды сем. по функц. анализу 12 (1969), 69—84, Воронеж.
7. Борисович, Ю., Гельман, Б., Обуховский, В.: О некоторых топологических инвариантах многозначных отображений с невыпуклыми образами. Труды сем. по функц. анализу, 12 (1969), 81—95, Воронеж.
8. Скордев, Г.: Неподвижные точки ациклических отображений (в печати).
9. Скордев, Г.: О возмущениях векторных полей. Докл. БАН (в печати).
10. Begle, E.: The Vietoris mapping theorem for bicompact spaces. Ann. Math., 51, 3 (1950), 534—543.
11. Хилтон, П., Уайли, С.: Теория гомологии, введение в алгебраическую топологию. Москва, 1966.

Постъпила на 10. IV. 1973 г.

ON ROUCHET'S THEOREM

G. S. Skordev

(SUMMARY)

Let M^n be a closed orientable PL manifold and $f: M^n \to R^{n-1}$ a single-valued continuous mapping without fixed points. If $F: M^n \to R^{n-1}$ is an upper semicontinuous acyclic mapping for which $F(x)$ is compact for every $x \in M^n$ and $(y, x-f(x)) < x-f(x)^2$ for every $y \in F(x)$, $x \in M^n$, then $d(f) = d(f=F)$.