НЯКОИ КИНЕМАТИЧНИ БЕЛЕЖКИ

Иван Чобанов

По-долу R означава множеството на реалните числа, а V — тримерното векторно пространство. Системно се прилагат реципрочни репери на Gibbs. За

(1) $$a_\nu \in V \qquad (\nu = 1, 2, 3)$$

с

(2) $$a_1 \times a_2 \cdot a_3 \neq 0$$

се касае за векторите

(3) $$a_\nu^{-1} = \frac{a_{\nu+1} \times a_{\nu+2}}{a_1 \times a_2 \cdot a_3} \qquad (\nu = 1, 2, 3)$$

при

(4) $$a_{\nu+3} = a_\nu \qquad (\nu = 1, 2).$$

Основните свойства на (3) са тъждествата

(5) $$a_\mu^{-1} a_\nu = \begin{cases} 1 & (\mu = \nu) \\ 0 & (\mu \neq \nu) \end{cases} \qquad (\mu, \nu = 1, 2, 3),$$

(6) $$(a_\nu^{-1})^{-1} = a_\nu \qquad (\nu = 1, 2, 3),$$

(7) $$(a_1^{-1} \times a_2^{-1} \cdot a_3^{-1})(a_1 \times a_2 \cdot a_3) > 0,$$

(8) $$\sum_{\nu=1}^{3} a_\nu^{-1} \times a_\nu = 0,$$

(9) $$(a_1 \times a_2 \cdot a_3)^2 = \begin{vmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & a_1 a_3 \\ a_2 a_1 & a_2^2 & a_2 a_3 \\ a_3 a_1 & a_3 a_2 & a_3^2 \end{vmatrix},$$

(10) $$a = \sum_{\nu=1}^{3} (a\, a_\nu^{-1})\, a_\nu = \sum_{\nu=1}^{3} (a\, a_\nu)\, a_\nu^{-1}.$$

1. Нека

(11) $$\bar{r}_\nu \in V \qquad (\nu = 1,\ 2,\ 3),$$

(12) $$\bar{\rho}_\nu \in V \qquad (\nu = 1,\ 2,\ 3),$$

(13) $$\bar{r}_\mu \bar{r}_\nu = \bar{\rho}_\mu \bar{\rho}_\nu \qquad (\mu,\ \nu = 1,\ 2,\ 3),$$

(14) $$(\bar{r}_1 \times \bar{r}_2 \cdot \bar{r}_3)(\bar{\rho}_1 \times \bar{\rho}_2 \cdot \bar{\rho}_3) > 0.$$

От (9), (13), (14) следва

(15) $$\bar{r}_1 \times \bar{r}_2 \cdot \bar{r}_3 = \bar{\rho}_1 \times \bar{\rho}_2 \cdot \bar{\rho}_3.$$

Условието (13) изразява, че модулите на векторите (11) са равни на модулите на едноиндексните им вектори (12) и че ъглите между всеки два различни вектора (11) са равни на ъглите между едноиндексните им вектори (12); условието (14) изразява, че тройките вектори (11), (12) образуват два еднакво ориентирани репера.

При (11)—(14) нека

(16) $$\rho = \sigma(\bar{r}_\nu,\ \bar{\rho}_\nu;\ \bar{r})_{\nu=1}^{3}$$

е дефинираната по следния начин трансформация във V: при

(17) $$r = \sum_{\nu=1}^{3} \lambda_\nu r_\nu$$

на r с (16) се съпоставя точно векторът

(18) $$\bar{\rho} = \sum_{\nu=1}^{3} \lambda_\nu \bar{\rho}_\nu.$$

Очевидно

(19) $$\sigma(\bar{r}_\nu,\ \bar{\rho}_\nu;\ \bar{r}_\mu)_{\nu=1}^{3} = \bar{\rho}_\mu \qquad (\mu = 1,\ 2,\ 3).$$

Трансформацията (16) с (11)—(14) се нарича *крайно преместване във* V, определено от реперите (11), (12) на V.

При дадени

(20) $$\varpi \in R,$$

(21) $$\bar{\omega}^0 \in V$$

нека

(22) $$\omega = \varpi \bar{\omega}^0$$

и нека

(23) $$\rho = \tau(\bar{\omega},\ \bar{r})$$

означава трансформацията във V, дефинирана с равенството

(24) $$\bar{\rho} = (1 - \cos\varpi)(\bar{r}\,\bar{\omega}^0)\,\bar{\omega}^0 + \cos\varpi\,\bar{r} + \sin\varpi\,\bar{\omega}^0 \times \bar{r}$$

за всеки $r \in V$. Трансформацията (23) се нарича *крайна ротация* във V; реалното число ω се нарича *ъгъл на ротацията,* а единичният вектор $\bar{\omega}^0$ дефинира *оста на ротацията.*

В предишната ни работа [1] бе доказано, че всяко крайно преместване (16) с (11)—(14) е равносилно с крайна ротация (24) с (20)—(22), т. е. че

$$\sigma(\bar{r}_\nu,\ \bar{\rho}_\nu;\ \bar{r})_{\nu=1}^{3} = \tau(\omega,\ \bar{r}) \tag{25}$$

за всеки $\bar{r} \in V$. Специално от (19), (24) следва

$$\bar{\rho}_\nu = (1-\cos\omega)(\bar{r}_\nu\,\bar{\omega}^0)\,\bar{\omega}^0 + \cos\omega\,\bar{r}_\nu + \sin\omega\,\bar{\omega}^0 \times \bar{r}_\nu \tag{26}$$

($\nu = 1, 2, 3$). Този резултат формализира на езика на векторната алгебра известната теорема на Euler (Novi Comment. Petrop., vol. 20 (1776) § 25, p. 189), която от него насам е доказвана синтетично-геометрично; впрочем това класическо доказателство има по-скоро евристичен характер.

Тук правим някои допълнителни бележки по този въпрос.

От (26) следва

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=1}^{3} \bar{r}_\nu^{-1} \times \bar{\rho}_\nu &= (1-\cos\omega)\sum_{\nu=1}^{3} (\bar{r}_\nu\,\bar{\omega}^0)\,\bar{r}_\nu^{-1} \times \bar{\omega}^0 \\ &+ \cos\omega \sum_{\nu=1}^{3} \bar{r}_\nu^{-1} \times \bar{r}_\nu + \sin\omega \sum_{\nu=1}^{3} \bar{r}_\nu^{-1} \times (\bar{\omega}^0 \times \bar{r}_\nu) \\ &= 2\sin\omega\,\bar{\omega}^0,\end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=1}^{3} \bar{r}_\nu^{-1}\,\bar{\rho}_\nu &= (1-\cos\omega)\sum_{\nu=1}^{3} (\bar{r}_\nu\,\bar{\omega}^0)(\bar{r}_\nu^{-1}\,\bar{\omega}^0) \\ &+ \cos\omega \sum_{\nu=1}^{3} \bar{r}_\nu^{-1}\,\bar{r}_\nu + \sin\omega \sum_{\nu=1}^{3} \bar{r}_\nu^{-1} \cdot \bar{\omega}^0 \times \bar{r}_\nu \\ &= 1 + 2\cos\omega\end{aligned} \tag{28}$$

съгласно (10), (8), (5) и поради

$$\sum_{\nu=1}^{3} (\bar{r}_\nu\,\bar{\omega}^0)(\bar{r}_\nu^{-1}\,\bar{\omega}^0) = \bar{\omega}^0 \cdot \bar{\omega}^0 = 1 \tag{29}$$

От (27), (28) следва

$$\sin\omega\,\bar{\omega}^0 = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{3} \bar{r}_\nu^{-1} \times \bar{\rho}_\nu, \tag{30}$$

$$\cos\omega = \frac{1}{2}\left(\sum_{\nu=1}^{3} r_\nu^{-1}\rho_\nu - 1\right). \tag{31}$$

Следователно, ако съществува крайна ротация (23) с (25) при (11)—(14), векторът (22), респ. (20), (21), се определя с (30), (31). Твърде елегантното решение на тази задача се дължи на прилагането на реципрочните вектори на Gibbs. В известен смисъл с това е осигурена единствеността на решението — доколкото се считат за несъществено различни решения ω, различаващи се с адитивни кратни на 2π поради наличието на тригонометрични функции в (24), респ. в (30), (31), както и решения (20), (21), при които ъгълът е допълнителен до 2π, а знакът на ω^0 е сменен с противоположния; тези несъществени разлики в решенията имат очевидно геометрично обяснение.

Дотук все още има известна условност — не е сигурно дали при (11)—(14) са изпълнени неравенствата

$$\left(\sum_{\nu=1}^{3} r_\nu^{-1}\times\bar{\rho}_\nu\right)^2 \leqq 4, \tag{32}$$

$$\left(\sum_{\nu=1}^{3} r_\nu^{-1}\rho_\nu - 1\right)^2 \leqq 4, \tag{33}$$

чието нарушение би обезсмислило равенствата (30), (31). В работата [1] обаче е доказано условното тъждество

$$\left(\sum_{\nu=1}^{3} r_\nu^{-1}\times\bar{\rho}_\nu\right)^2 + \left(\sum_{\nu=1}^{3} r_\nu^{-1}\rho_\nu - 1\right)^2 = 4 \tag{34}$$

— условно в смисъл, че е валидно не за всеки две тройки (11), (12), а само за такива с (13), (14), — от което (32), (33) са непосредствени следствия. Тъй като доказателството на (34) в [1] е в известен смисъл непряко, тук доказваме това равенство директно при (11)—(14).

Теорема. От (13), (14) следва

$$\sum_{\nu=1}^{3} r_\nu^{-1}\rho_\nu = \sum_{\nu=1}^{3} \rho_\nu^{-1} r_\nu. \tag{35}$$

Доказателство. От

$$r_\nu = \sum_{\mu=1}^{3} (r_\nu r_\mu)\, r_\mu^{-1} \qquad (\nu = 1,\ 2,\ 3), \tag{36}$$

$$\bar{\rho}_\nu = \sum_{\mu=1}^{3} (\rho_\nu \rho_\mu)\, \bar{\rho}_\mu^{-1} \qquad (\nu = 1,\ 2,\ 3) \tag{37}$$

следва

$$\sum_{\nu=1}^{3} \bar{r}_\nu^{-1} \rho_\nu - \sum_{\nu=1}^{3} \rho_\nu^{-1} \bar{r}_\nu \tag{38}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{3} \sum_{\mu=1}^{3} [(\rho_\nu \bar{\rho}_\mu)(\bar{r}_\nu^{-1} \rho_\mu^{-1}) - (\bar{r}_\nu \bar{r}_\mu)(\rho_\nu^{-1} \bar{r}_\mu^{-1})]$$

$$= \sum_{\nu=1}^{3} \sum_{\mu=1}^{3} (\bar{r}_\nu r_\mu)(\bar{r}_\nu^{-1} \bar{\rho}_\mu^{-1} - \bar{\rho}_\nu^{-1} \bar{r}_\mu^{-1})$$

$$= \sum_{\nu=1}^{3} \sum_{\mu=1}^{3} (\bar{r}_\nu r_\mu)(\bar{r}_\nu^{-1} \rho_\mu^{-1}) - \sum_{\nu=1}^{3} \sum_{\mu=1}^{3} (\bar{r}_\nu r_\mu)(\rho_\mu^{-1} \bar{r}_\nu^{-1}) = 0$$

съгласно (13) чрез формална замяна на сумационните индекси.

Теорема 2. Ако r_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n$) е репер в пред — Hilbert'ово пространство, то

$$\sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} (\bar{r}_\mu r_\nu)(\bar{r}_\mu^{-1} \bar{r}_\nu^{-1}) = n. \tag{39}$$

Доказателство. Ако a, b принадлежат на n-мерното линейно пространство, определено от репера r_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n$), то

$$a\,b = \sum_{\nu=1}^{n} (a\,r_\nu)(\bar{b}\,\bar{r}_\nu^{-1}). \tag{40}$$

[2]. От (40) следва

$$\sum_{\nu=1}^{n} (\bar{r}_\mu r_\nu)(\bar{r}_\mu^{-1} \bar{r}_\nu^{-1}) = \bar{r}_\mu \bar{r}_\mu^{-1} = 1 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n). \tag{41}$$

От (41) следва (39).

Теорема 3. От (13) следва

$$\sum_{\mu=1}^{3} \sum_{\nu=1}^{3} (\bar{r}_\mu^{-1} \rho_\nu)(\bar{r}_\nu^{-1} \bar{\rho}_\mu) \tag{42}$$

$$- \sum_{\mu=1}^{3} \sum_{\nu=1}^{3} (\bar{r}_\mu^{-1} \rho_\mu)(\bar{r}_\nu^{-1} \bar{\rho}_\nu) = -2 \sum_{\nu=1}^{3} \bar{r}_\nu^{-1} \bar{\rho}_\nu.$$

Доказателство. (42) следва от

$$(43)\qquad \sum_{\mu=1}^{3}\sum_{\nu=1}^{3}(\bar{r}_\mu^{-1}\rho_\nu)(\bar{r}_\nu^{-1}\rho_\mu)$$

$$-\sum_{\mu=1}^{3}\sum_{\nu=1}^{3}(\bar{r}_\mu^{-1}\rho_\mu)(\bar{r}_\nu^{-1}\rho_\nu)$$

$$=\sum_{\mu=1}^{3}\sum_{\nu=1}^{3}\bar{r}_\mu^{-1}\times\bar{r}_\nu^{-1}\cdot\rho_\nu\times\bar{\rho}_\mu=-2\sum_{\nu=1}^{3}\bar{r}_\nu\rho_\nu^{-1}$$

съгласно (7), (15), (6) и от теорема 1.

Теорема 4. От (11)—(14) следва (34).

Доказателство. Лявата страна на (34) е равна на

$$(44)\qquad \sum_{\mu=1}^{3}\sum_{\nu=1}^{3}\bar{r}_\mu^{-1}\times\rho_\mu\cdot\bar{r}_\nu^{-1}\times\rho_\nu$$

$$+\sum_{\mu=1}^{3}\sum_{\nu=1}^{3}(\bar{r}_\mu^{-1}\rho_\mu)(\bar{r}_\nu^{-1}\rho_\nu)+1-2\sum_{\nu=1}^{3}\bar{r}_\nu^{-1}\rho_\nu.$$

Но

$$(45)\qquad \sum_{\mu=1}^{3}\sum_{\nu=1}^{3}\bar{r}_\mu^{-1}\times\bar{\rho}_\mu\cdot\bar{r}_\nu^{-1}\times\rho_\nu$$

$$=\sum_{\mu=1}^{3}\sum_{\nu=1}^{3}(\bar{r}_\mu^{-1}\bar{r}_\nu^{-1})(\bar{\rho}_\mu\rho_\nu)=\sum_{\mu=1}^{3}\sum_{\nu=1}^{3}(\bar{r}_\mu^{-1}\rho_\nu)(\bar{r}_\nu^{-1}\bar{\rho}_\mu).$$

Тогава теорема 3 и теорема 2 с $n=3$.

2. При

$$(46)\qquad \sum_{\nu=1}^{3}\bar{r}_\nu^{-1}\times\rho_\nu\neq 0$$

от (30) следва

$$(47)\qquad \bar{\omega}^0=\varepsilon\frac{\sum_{\nu=1}^{3}\bar{r}_\nu^{-1}\times\rho_\nu}{\sum_{\nu=1}^{3}\bar{r}_\nu^{-1}\times\bar{\rho}_\nu}\qquad(\varepsilon=\pm 1),$$

затова нека

$$(48)\qquad \sum_{\nu=1}^{3}\bar{r}_\nu^{-1}\times\rho_\nu=0.$$

От (48), (34) следва

(49) $$\sum_{\nu=1}^{3} r_\nu^{-1} \rho_\nu = 3$$

или

(50) $$\sum_{\nu=1}^{3} r_\nu^{-1} \rho_\nu = -1 .$$

От (48), (30), (31) следва, че в случая (49) трансформацията (24) добива вида

(51) $$\rho = r ,$$

а в случая (50) — вида

(52) $$\rho = 2 (r \ \omega^0) \omega^0 - r .$$

Теорема 5. От (48) следва

(53) $$r_\mu \rho_\nu = r_\nu \rho_\mu \qquad (\mu, \nu = 1, 2, 3).$$

Доказателство. За $\mu = \nu$ ($\nu = 1, 2, 3$) равенствата (53) са тъждества. От (3), (4) следва, че (48) е равносилно с

(54) $$\sum_{\nu=1}^{3} (r_{\nu-1} \times r_{\nu+2}) \times \rho_\nu = 0 .$$

От (54) следва

(55) $$0 = \sum_{\nu=1}^{3} (\bar{r}_{\nu-1} \rho_\nu) r_{\nu+2} - \sum_{\nu=1}^{3} (\bar{r}_{\nu-2} \rho_\nu) \bar{r}_{\nu+1}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{3} (\bar{r}_{\nu-2} \bar{\rho}_{\nu-1}) \bar{r}_\nu - \sum_{\nu=1}^{3} (\bar{r}_{\nu-1} \rho_{\nu-2}) r_\nu$$

$$= \sum_{\nu=1}^{3} (\bar{r}_{\nu-2} \rho_{\nu-1} - r_{\nu+1} \rho_{\nu+2}) r_\nu .$$

Сега (53) следва от (55) и от линейната независимост на (11) съгласно (14).

Теорема 6. От (48), (13) следва

(56) $$(r_\mu - \rho_\mu)(r_\nu - \rho_\nu) = 0 \qquad (\mu, \nu = 1, 2, 3).$$

Доказателство. Теорема 5.

Теорема 7. От (48), (49), (13), (14) следва

(57) $$r_\nu = \rho_\nu \qquad (\nu = 1, 2, 3).$$

Доказателство. При

(58) $$\Delta = r_1 \times r_2 \,.\, r_3$$

от (14), теорема 1 следва

(59) $$(r_1 + \rho_1) \times (r_2 + \rho_2) \,.\, (r_3 + \rho_3)$$

$$= 2\Delta + \Delta \sum_{\nu=1}^{3} r_\nu^{-1} \rho_\nu + \Delta \sum_{\nu=1}^{3} r_\nu \rho_\nu^{-1}$$

$$= 2\Delta \left(1 + \sum_{\nu=1}^{3} r_\nu^{-1} \rho_\nu \right).$$

От (59), (58), (14), (49) следва

(60) $$(r_1 + \rho_1) \times (r_2 + \rho_2) \,.\, (r_3 + \rho_3) \neq 0 \,.$$

От (60), теорема 6 следва (57).

Теорема 8. От (11)—(14) следва

(61) $$\sigma(r_\nu;\ \rho_\nu;\ r_\mu)_{\nu=1}^{3} = \tau(\omega,\ r_\mu) \qquad (\mu = 1, 2, 3)$$

в случая (48), (49).

Доказателство. (51), теорема 7.

Теорема 9. От (48), (50), (13), (14) следва: съществуват α, β $(1 \leqq \alpha,\ \beta \leqq 3)$ с

(62) $$(r_\alpha - \rho_\alpha) \times (r_\beta - \rho_\beta) \neq 0 \,.$$

Доказателство. Нека

(63) $$(r_\mu - \rho_\mu) \times (r_\nu - \rho_\nu) = 0 \quad (\mu,\ \nu = 1,\ 2,\ 3).$$

От (57) следва (49) съгласно (5), затова при (50) равенствата (57) се нарушават за поне една стойност на ν $(1 \leqq \nu \leqq 3)$. Нека например

(64) $$a = r_3 - \rho_3 \neq 0 \,.$$

От (63), (64) следва

(65) $$\rho_\nu = \alpha_\nu\, a + r_\nu \qquad (\nu = 1,\ 2,\ 3)$$

при подходящи $\alpha_\nu \in R$ $(\nu = 1,\ 2,\ 3)$. От (50), (65) следва

(66) $$-1 = \sum_{\nu=1}^{3} r_\nu^{-1} (\alpha_\nu\, a + r_\nu)$$

$$= \sum_{\nu=1}^{3} \alpha_\nu r_\nu^{-1} a + 3 \,,$$

т. е.

(67) $$\sum_{\nu=1}^{3} \alpha_\nu r_\nu^{-1} a = -4 \,.$$

От (65) следва още

(68) $$\rho_1 + \rho_2 \cdot \rho_3 = \alpha_1 r_2 \times r_3 \cdot a + \alpha_2 r_3 \times r_1 \cdot a + \alpha_3 r_1 \times r_2 \cdot a - r_1 \times r_2 \cdot r_3 .$$

От (68), (14), (3) следва

(69) $$\sum_{\nu=1}^{3} \alpha_\nu r_\nu^{-1} a = 0 ,$$

което противоречи на (67).

Теорема 10. От (48), (50), (13), (14) следва

(70) $$(r_\mu + \rho_\mu) \times (r_\nu + \rho_\nu) = 0 \qquad (\mu, \nu = 1, 2, 3).$$

Доказателство. От (56) следва

(71) $$(r_\nu + \rho_\nu)(r_\alpha - \rho_\alpha) = 0 \qquad (\nu = 1, 2, 3),$$

(72) $$(r_\nu + \rho_\nu)(r_\beta - \rho_\beta) = 0 \qquad (\nu = 1, 2, 3),$$

където α, β имат смисъла, даден им в теорема 9. От (71), (72), (62) следва

(73) $$(r_\nu + \rho_\nu) \times [(r_\alpha - \rho_\alpha) \times (r_\beta - \rho_\beta)] = 0 \qquad (\nu = 1, 2, 3).$$

От (73), (62) следва (70).

Теорема 11. От (11)—(14), (48), (50) следва: системата уравнения

(74) $$r_\nu + \rho_\nu = 2 (r_\nu \omega^0) \omega^0 \qquad (\nu = 1, 2, 3)$$

има решение

(75) $$\omega^0 = \varepsilon \frac{r_\nu - \rho_\nu}{r_\nu + \rho_\nu} \qquad (\varepsilon = \pm 1, \ 1 \leqq \nu \leqq 3)$$

при

(76) $$r_\nu + \rho_\nu \neq 0 \qquad (1 \leqq \nu \leqq 3)$$

Доказателство. Съвместимостта на системата (74) следва от теорема 10.

Условието (76) е изпълнено за поне една стойност на ν ($1 \leqq \nu \leqq 3$), защото от

(77) $$r_\nu + \rho_\nu = 0 \qquad (\nu = 1, 2, 3)$$

следва

(78) $$r_1 \times r_2 \cdot r_3 = -\rho_1 \times \rho_2 \cdot \rho_3 ,$$

противно на (14), (15).

От (75) следва

(79) $$2(r_\nu \omega^0)\bar{\omega}^0 = 2\frac{r_\nu(\bar{r}_\nu + \bar{\rho}_\nu)}{(r_\nu + \rho_\nu)^2}(\bar{r}_\nu + \rho_\nu) = r_\nu + \rho_\nu$$

$(1 \leqq \nu \leqq 3)$ поради

(80) $$(r_\nu + \rho_\nu)^2 = r_\nu^2 + \rho_\nu^2 + 2\bar{r}_\nu \rho_\nu = 2r_\nu(r_\nu + \rho_\nu)$$

$(\nu = 1, 2, 3)$ съгласно (13).

От

(81) $$r_\lambda + \rho_\lambda = 0 \qquad (1 \leqq \lambda \leqq 3)$$

следва

(82) $$r_\lambda(r_\nu + \rho_\nu) = r_\lambda r_\nu + r_\lambda \rho_\nu = \rho_\lambda \rho_\nu + \rho_\lambda r_\nu$$

$$= \rho_\lambda(r_\nu + \rho_\nu)$$

съгласно (13), (53). От (75), (82) следва

(83) $$(r_\lambda \omega^0)\omega^0 = \frac{r_\lambda(\bar{r}_\nu + \bar{\rho}_\nu)}{(\bar{r}_\nu + \bar{\rho}_\nu)^2}(r_\nu + \rho_\nu) = \frac{\rho_\lambda(\bar{r}_\nu + \bar{\rho}_\nu)}{(\bar{r}_\nu + \bar{\rho}_\nu)^2}(\bar{r}_\nu + \rho_\nu).$$

От (83), (81) следва

(84) $$2(r_\lambda \omega^0)\bar{\omega}^0 = \frac{(r_\lambda + \rho_\lambda)(\bar{r}_\nu + \bar{\rho}_\nu)}{(r_\nu + \rho_\nu)^2}(r_\nu + \rho_\nu)$$

$$= \bar{0} = r_\lambda + \rho_\lambda,$$

което завършва доказателството.

Теорема 12. От (11)—(14) следва (61) в случая (48), (50).

Доказателство. (52), теорема 11.

3. Нека сега специално

(85) $$r_1 = i, \quad r_2 = j, \quad r_3 = k,$$

(86) $$\rho_1 = \xi^0, \quad \rho_2 = \eta^0, \quad \rho_3 = \zeta^0,$$

където, както традиционно е прието, (i, j, k) и (ξ^0, η^0, ζ^0) са единичните ортогонални вектори на неподвижната и на подвижната координатни системи. Въз основа на известната теорема — необходимо и достатъчно условие за $a_\nu^{-1} = a_\nu$ $(\nu = 1, 2, 3)$ е реперът (1) да бъде единичен и ортогонален — от (85) следва

(87) $$r_1^{-1} = i, \quad r_2^{-1} = j, \quad r_3^{-1} = k.$$

При

$$(88)\qquad \begin{cases} \xi^0 = a_{11}\, i + a_{21}\, j + a_{31}\, k, \\ \eta^0 = a_{12}\, i + a_{22}\, j + a_{32}\, k, \\ \zeta^0 = a_{13}\, i + a_{23}\, j + a_{33}\, k \end{cases}$$

от (30), (87), (86) следва

$$(89)\qquad 2 \sin \varpi\, \omega^0 = i \times \xi^0 + j \times \eta^0 + k \times \zeta^0$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ a_{11} & a_{21} & a_{31} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= (a_{32} - a_{23})\, i + (a_{13} - a_{31})\, j + (a_{21} - a_{12})\, k$$

$$= 2 \cos \frac{\psi + \varphi}{2} \cos \frac{\psi - \varphi}{2} \sin \theta\, i + 2 \cos \frac{\psi + \varphi}{2} \sin \frac{\psi - \varphi}{2} \sin \theta\, j$$

$$+ \sin (\psi + \varphi)(1 + \cos \theta)\, k$$

поради

$$(90)\qquad \begin{cases} a_{12} = -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi \cos \theta, \\ a_{21} = \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi \cos \theta, \\ a_{13} = \sin \psi \sin \theta, \\ a_{31} = \sin \varphi \sin \theta, \\ a_{23} = -\cos \psi \sin \theta, \\ a_{32} = \cos \varphi \sin \theta, \end{cases}$$

където ψ, φ, θ са Euler'овите ъгли.

Нека

$$(91)\qquad \omega^0 = \cos \alpha\, i + \cos \beta\, j + \cos \gamma\, k.$$

От (89), (91) следва

$$(92)\qquad \begin{cases} \sin \varpi \cos \alpha = \cos \dfrac{\psi + \varphi}{2} \cos \dfrac{\psi - \varphi}{2} \sin \theta, \\ \sin \varpi \cos \beta = \cos \dfrac{\psi + \varphi}{2} \sin \dfrac{\psi - \varphi}{2} \sin \theta, \\ \sin \varpi \cos \gamma = \cos \dfrac{\psi + \varphi}{2} \sin \dfrac{\psi + \varphi}{2} (1 + \cos \theta). \end{cases}$$

От (86)—(88) следва

$$\sum_{\nu=1}^{3} r_\nu^{-1} \rho_\nu - 1 = i\,\xi^0 - j\,\eta^0 - k\,\zeta^0 - 1 \tag{93}$$

$$= a_{11} + a_{22} + a_{33} = 4\cos^2\frac{\psi+\varphi}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}$$

поради

$$\begin{cases} a_{11} = \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\sin\varphi\cos\theta, \\ a_{22} = -\sin\psi\sin\varphi - \cos\psi\cos\varphi\cos\theta, \\ a_{33} = \cos\theta. \end{cases} \tag{94}$$

От (31), (93) следва

$$\cos^2\frac{\omega}{2} = \frac{1}{2}(\cos\omega + 1) = \cos^2\frac{\psi+\varphi}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}. \tag{95}$$

От (92), (95) следва

$$\begin{cases} \chi = \cos\frac{\omega}{2} = \cos\frac{\psi+\varphi}{2}\cos\frac{\theta}{2}, \\ \xi = \sin\frac{\omega}{2}\cos\alpha = \cos\frac{\psi-\varphi}{2}\sin\frac{\theta}{2}, \\ \eta = \sin\frac{\omega}{2}\cos\beta = \sin\frac{\psi-\varphi}{2}\sin\frac{\theta}{2}, \\ \zeta = \sin\frac{\omega}{2}\cos\gamma = \sin\frac{\psi+\varphi}{2}\sin\frac{\theta}{2} \end{cases} \tag{96}$$

при подходящ избор на знака при коренуването на (95), където параметрите χ, ξ, η, ζ са компонентите на свързания с ротацията (24) кватернион [3].

4. Сега ще засегнем въпроса за инерциалността на една координатна система. Основното уравнение на Newton

$$m\,w = F \tag{97}$$

за движението на материална точка с маса m под действието на сила F може — поради независимостта в измерванията за m, w и F — да се приеме за *дефиниция* на понятието *инерциална координатна система:* Newton твърди, че съществуват координатни системи, за които (97) е в сила; тези координатни системи и само те се наричат инерциални.

Добре известно, необходимо и достатъчно условие, за да бъде инерциална координатната система $\Omega\xi\eta\zeta$, движеща се спрямо инерциалната координатна система $Oxyz$, е движението на $\Omega\xi\eta\zeta$ спрямо $Oxyz$ да бъде праволинейна и равномерна транслация. Лесно можем да разберем, че в Newton'овата формулировка на (97) на въпроса за координатната система изобщо не се обръща внимание: Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare. . . Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae et fieri secundum lineam rectam, qua vis illa imprimitur. Но за обстоятелството, че и в съвременни курсове по аналитична механика този принципен въпрос не се изяснява достатъчно категорично, може само да се съжалява. Както и да е, не тази е причината, поради която тук се спираме на него: струва ни се, че чрез дадените по-долу бележки въпросът за инерциалността на една координатна система се приключва по възможно най-краткия и категоричен начин.

При

$$r = r_\Omega + \bar{\rho}, \tag{98}$$

където r, ρ са съответно радиус-векторите на произволна подвижна спрямо $Oxyz$ и $\Omega\xi\eta\zeta$ точка M с начала съответно O и Ω, а r_Ω е радиус-векторът на Ω спрямо O, е в сила

$$w = w_\Omega + \bar{\varepsilon} \times \rho + \omega \times (\omega \times \rho) + 2\omega \times \frac{\delta \rho}{\delta t} + \frac{\delta^2 \rho}{\delta t^2}, \tag{99}$$

където w, w_Ω са „абсолютните ускорения“ съответно на M, Ω (такива, каквито ги регистрира наблюдател, неизменно свързан с $Oxyz$); $\frac{\delta \rho}{\delta t}$, $\frac{\delta^2 \rho}{\delta t^2}$ са съответно „релативната скорост“ и „релативното ускорение“ на M (такива, каквито ги регистрира наблюдател, неизменно свързан с $\Omega\xi\eta\zeta$); ω, ε са съответно моменталната ъглова скорост и моменталното ъглово ускорение на координатната система $\Omega\xi\eta\zeta$ при движението ѝ спрямо $Oxyz$.

При (97) необходимо и достатъчно условие за инерциалността на $\Omega\xi\eta\zeta$ или за

$$m \frac{\delta^2 \rho}{\delta t^2} = F \tag{100}$$

за всички m, F, т. е. за всички векторни функции

$$\rho = \rho(t) \tag{101}$$

е

(102) $$w_\Omega + \varepsilon \times \bar{\rho} + \omega \times (\omega \times \rho) + 2\omega \times \frac{\delta \rho}{\delta t} = 0 .$$

И така въпросът за инерциалността на координатната система $\Omega\xi\eta\zeta$ се свежда до установяване на следната теорема:

Теорема 13. Необходимо и достатъчно условие, за да бъде в сила (102) за произволна функция (101), е

(103) $$\bar{w}_\Omega = \bar{0} ,$$

(104) $$\bar{\omega} = \bar{0}$$

за всяко t.

Доказателство. Необходимост. (103) следва от (102) при

(105) $$\bar{\rho} = \bar{0}$$

за всяко t.

При

(106) $$\frac{\delta \bar{\rho}}{\delta t} = \bar{0}$$

от (102), (103) следва

(107) $$\varepsilon \times \rho + \omega \times (\omega \times \rho) = 0 .$$

Скаларно умножение на (107) с ρ дава

(108) $$(\omega \times \rho)^2 = 0 ,$$

т. е.

(109) $$\bar{\omega} \times \bar{\rho} = 0 .$$

При

(110) $$\rho = \xi^0 , \quad \bar{\rho} = \eta^0$$

условието (106) е удовлетворено. Тогава (109) става съответно

(111) $$\omega \times \bar{\xi}^0 = 0 , \quad \bar{\omega} \times \eta^0 = 0 .$$

От (111) следва (104).

Достатъчност. Очевидна.

Приведеното доказателство на теорема 13 е инструктивно поради следната причина: от него се заключава, че за установяване на инерциалността на една координатна система са достатъчни три наблюдения в нея. Наистина да си мислим, че три неколинеарни точки A_1, A_2, A_3, неизменно свързани със системата, внезапно се освобождават; координатната система е инерциална тогава и само тогава, когато A_1, A_2, A_3 продължават да бъдат в покой спрямо нея и при по-нататъшното ѝ движение спрямо една инерциална координатна система. При доказателството на теорема 13 за такива три неколинеарни точки бяха избрани: подвижното начало Ω и краищата на единичните век-

тори ξ^0, η^0 на осите $\Omega\xi$, $\Omega\eta$ съгласно (105) и (110). Този специален избор, разбира се, не е от значение, защото A_1 винаги може да се избере за начало, а A_2 и A_3 за краища на „единичните" вектори на осите A_1A_2 и A_1A_3 на координатната система, която е в покой спрямо $\Omega\xi\eta\zeta$.

5. В последната бележка ще засегнем въпроса за моментно-кинематичната аналогия [4].

Нека $\underset{\rightarrow}{s}$ е система стрели, s — основата на $\underset{\rightarrow}{s}$, m — моментът на $\underset{\rightarrow}{s}$ спрямо $\bar{0}$. Ако

(112) $$r_\nu \in V \qquad (\nu = 1,\ 2),$$

то

(113) $$\mathrm{mom}_{r_1} \underset{\rightarrow}{s} - \mathrm{mom}_{r_2} \underset{\rightarrow}{s} = s \times (r_1 - r_2).$$

Основна роля в теорията на стрелите играе теоремата за ранга — максималния брой линейно независими елементи на моментното поле на системата стрели. Ако $\mathrm{Rang}\ \underset{\rightarrow}{s}$ означава ранга на $\underset{\rightarrow}{s}$, тази теорема гласи:

Теорема 14. Необходимо и достатъчно условие за

(114) $$\mathrm{Rang}\ \underset{\rightarrow}{s} = 0$$

е

(115) $$s = 0,$$

(116) $$m = 0;$$

за

(117) $$\mathrm{Rang}\ \underset{\rightarrow}{s} = 1$$

е (115),

(118) $$m \neq 0;$$

за

(119) $$\mathrm{Rang}\ \underset{\rightarrow}{s} = 2$$

е

(120) $$s \neq 0,$$

(121) $$s\ m = 0;$$

за

(122) $$\mathrm{Rang}\ \underset{\rightarrow}{s} = 3$$

е

(123) $$s\ m \neq 0.$$

Доказателство. Необходимост. От (114) следва

(124) $$\mathrm{mom}_{\bar{r}}\, \underset{\rightarrow}{s} = 0 \qquad (r \in V).$$

От (11),

(125) $$r_1 \times r_2 . r_3 \neq 0,$$

(113) следва

(126) $$\bar{s} \times r_\nu = 0 \qquad (\nu = 1, 2, 3),$$

т. е. (115).

От (117) следва: съществува

(127) $$\bar{\rho} \in V$$

с

(128) $$\bar{\mu} = \mathrm{mom}_{\bar{\rho}}\, \underset{\rightarrow}{s} \neq 0,$$

но

(129) $$\mathrm{mom}_{\bar{r}}\, \underset{\rightarrow}{s} \times \bar{\mu} = 0 \qquad (\bar{r} \in V).$$

От (113) следва

(130) $$\mathrm{mom}_{\bar{r}}\, \underset{\rightarrow}{s} - \bar{m} = \bar{s} \times \bar{r} \qquad (\bar{r} \in V).$$

От (130), (129) следва

(131) $$(\bar{s} \times \bar{r}) \times \bar{\mu} = \bar{0} \qquad (\bar{r} \in V).$$

Ако е в сила (120), от (112) с

(132) $$\bar{s} . r_1 \times \bar{r}_2 \neq 0$$

следва

(133) $$(\bar{s} \times \bar{r}_1) \times (\bar{s} \times \bar{r}_2) = (\bar{s} . \bar{r}_1 \times \bar{r}_2)\, \bar{s} \neq \bar{0}.$$

От

(134) $$(\bar{s} \times \bar{r}_\nu) \times \bar{\mu} = \bar{0} \qquad (\nu = 1, 2)$$

(133) следва $\mu = \bar{0}$, противно на (128). От (115) следва $m = \bar{\mu}$, т. е. (118) съгласно (128).

От (119) следва: съществува (112) с

(135) $$\bar{m}_1 \times \bar{m}_2 \neq \bar{0}$$

при

(136) $$\bar{m}_\nu = \mathrm{mom}_{\bar{r}_\nu}\, \underset{\rightarrow}{s} \qquad (\nu = 1, 2),$$

но

(137) $$\mathrm{mom}_r \underset{\rightarrow}{s} \,.\, m_1 \times m_2 = 0 \qquad (r \in V)\,.$$

От (115) би следвало $m_1 = m_2$ противно на (135) следователно е в сила (20). Чрез скаларно умножение на (130) с (135) от (137) следва

(138) $$r \,.\, s \times (m_1 \times m_2) = 0 \qquad (r \in V)\,.$$

От (138), (11), (125) следва

(139) $$r_\nu \,.\, \bar{s} \times (\bar{m}_1 \times m_2) = 0 \qquad (\nu = 1,\ 2,\ 3)\,,$$

т. е.

(140) $$s \times (m_1 \times m_2) = 0\,.$$

От (140) следва

(141) $$(s\, m_2)\, m_1 - (s\, m_1)\, m_2 = 0\,,$$

т. е.

(142) $$s\, m_\nu = 0 \qquad (\nu = 1,\ 2)$$

поради (135), т. е. (121).

От (122) следва, че съществуват (11) с

(143) $$m_1 \times m_2 \,.\, m_3 \neq 0$$

при

(144) $$m_\nu = \mathrm{mom}_{r_\nu} \underset{\rightarrow}{s} \qquad (\nu = 1,\ 2,\ 3)\,.$$

От (121) би следвало

(145) $$s\, m_\nu = 0 \qquad (\nu = 1,\ 2,\ 3)$$

при (143), т. е. (115), което противоречи на (143). Следователно е в сила (123).

Достатъчност. Следва от необходимостта на условията (115), (116); (115), (118); (120), (121); (120), (123) съответно за (114), (117), (119), (122), тъй като тези условия взаимно се изключват.

Приведеното тук доказателство на теоремата за ранга е в известен смисъл по-естествено от онова, дадено в предишната ни работа [5].

При (120) правата с уравнение

(146) $$r \times s = \frac{s \times (\bar{m} \times s)}{s^2}$$

се нарича *централна ос* на $\vec{s}$. Да припомним следната теорема:

Теорема 15. От (146), (127),

(147) $$\rho \times s \neq \frac{s \times (m \times s)}{s^2}$$

следва

(148) $$\mathrm{mom}_{\bar{r}} \underset{\rightarrow}{s} < \mathrm{mom}_{\rho} \underset{\rightarrow}{s} .$$

Доказателство. От (113) следва

(149) $$\mathrm{mom}_{\rho} \underset{\rightarrow}{s} = \mathrm{mom}_{r} \underset{\rightarrow}{s} + s \times (\rho - r),$$

(150) $$\mathrm{mom}_{\bar{r}} \underset{\rightarrow}{s} = \bar{m} + \bar{s} \times r .$$

От (150), (146) следва

(151) $$\mathrm{mom}_{\bar{r}} \underset{\rightarrow}{s} . s \times (\rho - r) = 0 .$$

От (149), (151) следва

(152) $$\left(\mathrm{mom}_{\rho} \underset{\rightarrow}{s}\right)^2 = \left(\mathrm{mom}_{r} \underset{\rightarrow}{s}\right)^2 - [s \times (\rho - r)]^2 .$$

От (146), (147) следва

(153) $$s \times (\rho - r) \neq \bar{0} .$$

От (152), (153) следва (148).

Нека сега

(154) $$\{a, [\bar{a}_\nu]_{\nu=1}^3\}$$

при

(155) $$a = a(t),$$

(156) $$a_\nu = a_\nu(t) \qquad (\nu = 1, 2, 3),$$

(2) и

(157) $$\frac{d}{dt}(a_\mu a_\nu) = 0 \qquad (\mu, \nu = 1, 2, 3)$$

е координатна система, неизменно свързана с подвижно тяло. Скоростта на произволна точка от тялото се дава с

(158) $$\frac{d\bar{r}}{dt} - \frac{d\bar{a}}{dt} = \bar{\omega} \times (\bar{r} - \bar{a}),$$

където

(159) $$\bar{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{3} \bar{a}_\nu^{-1} \times \frac{d a_\nu}{dt}$$

е моменталната ъглова скорост на (154). От (158), (113) се вижда, че разпределението на скоростите на твърдо тяло може формално да се идентифицира с моментното поле на някоя система стрели, като ро-

лята на основа играе векторът (159), а ролята на момент спрямо полюса r — скоростта (158) на точката r. Сега теоремата за ранга получава следната формулировка:

Теорема 16. Необходимо и достатъчно условие за

(160) $$\operatorname{Rang} \underset{\rightarrow}{V} = 0$$

е

(161) $$\omega = 0,$$

(162) $$\frac{d\bar{a}}{dt} = \bar{0};$$

за

(163) $$\operatorname{Rang} \underset{\rightarrow}{V} = 1$$

е (161),

(164) $$\frac{d\bar{a}}{dt} \neq 0;$$

за

(165) $$\operatorname{Rang} \underset{\rightarrow}{V} = 2$$

е

(166) $$\bar{\omega} \neq \bar{0},$$

(167) $$\bar{\omega} \cdot \frac{d\bar{a}}{dt} = 0;$$

за

(168) $$\operatorname{Rang} \underset{\rightarrow}{V} = 3$$

е

(169) $$\bar{\omega} \frac{d\bar{a}}{dt} \neq 0.$$

При това $\underset{\rightarrow}{V}$ в теорема 16 означава хипотетичната система стрели с основа (159) и момент $\frac{d\bar{a}}{dt}$ спрямо $\bar{a}$.

Еквивалент на централната ос (146) на системата стрели $\underset{\rightarrow}{s}$ в тази моментно-кинематична аналогия е *винтовата (хеликоидална, централна) ос* на $\underset{\rightarrow}{V}$ с уравнение

(170) $$\bar{r} \times \bar{\omega} = \frac{\bar{\omega} \times \left(\frac{d\bar{a}}{dt} \times \bar{\omega} \right)}{\omega^2}.$$

Тук по-специално ще се спрем на движението на координатната система (154), която се получава по един естествен начин. когато (155) се идентифицира с радиус-вектора

(171) $$r = r(t)$$

на произволна подвижна точка, а (156) — с триедъра на Frenet:

(172) $$a_1 = \tau^0, \quad a_2 = \nu^0, \quad a_3 = \beta^0.$$

От формулите на Frenet

(173) $$\frac{d\tau^0}{ds} = \varkappa\nu^0, \quad \frac{d\nu^0}{ds} = -\varkappa\tau^0 + \sigma\beta^0, \quad \frac{d\beta^0}{ds} = -\sigma\nu^0,$$

където s означава дължина на дъга, $\varkappa$ — кривина, а σ — торзията в точката (171) от траекторията и от (172), (159) веднага следва

(174) $$\vec{\omega} = \frac{ds}{dt}(\sigma\tau^0 + \varkappa\beta^0) = \frac{ds}{dt}\delta,$$

където

(175) $$\delta = \sigma\tau^0 + \varkappa\beta^0$$

е вектотът на Darboux [6]. От (171) следва

(176) $$\frac{dr}{dt} = \frac{ds}{dt}\tau^0.$$

От (174), (176) следва, че в случая на движение на естествения триедър на Frenet теорема 16 получава следната формулировка (в която $\vec{F}$ е системата стрели, която в този случай замества $\vec{V}$):

Теорема (17). Необходимо и достатъчно условие за

(177) $$\operatorname{Rang} \vec{F} = 0$$

е

(178) $$\frac{ds}{dt} = 0;$$

за

(179) $$\operatorname{Rang} \vec{F} = 1$$

е

(180) $$\varkappa = 0,$$

(181) $$\frac{ds}{dt} \neq 0;$$

за

(182) $$\operatorname{Rang} \underset{\rightarrow}{F} = 2$$

е (181),

(183) $$\varkappa \neq 0,$$

(184) $$\sigma = 0;$$

за

(185) $$\operatorname{Rang} \underset{\rightarrow}{F} = 3$$

е (181),

(186) $$\sigma \neq 0.$$

В случая (160) движението е допирателно на покой. С други думи, ако (161), (162) са в сила за $t = t_0$, в момента t_0 разпределението на скоростите е такова, каквото би било, ако тялото изобщо не се движеше. Това тълкуване на прилагателното „допирателно" се отнася и за следващите случаи. При (163) движението е допирателно на транслация съгласно (161), (164). В случая (165) движението е допирателно на ротация съгласно (166), (167). Най-после в случая (168) движението е най-общо (хеликоидално) съгласно (169).

Аналогични тълкувания се дават на случаите (177), (179), (182), (185) на движение на триедъра на Frenet. Транслацията при (179) е праволинейна поради (180), а равнинното движение в случая (182) не е праволинейно поради (183).

От (170), (174), (176) следва, че при движението на естествения триедър на Frenet витловата ос има уравнение

(187) $$r \times (\sigma \bar{\tau}^0 + \varkappa \bar{\beta}^0) = -\frac{\varkappa}{\varkappa^2 + \sigma^2} (-\varkappa \bar{\tau}^0 + \sigma \bar{\beta}^0),$$

т. е.

(188) $$r \times \bar{\delta} = -\frac{\varkappa}{\varkappa^2 + \sigma^2} \frac{d \nu^0}{ds}$$

съгласно (173), (175).

На въпроса за моментно-кинематичната аналогия ще се върнем пак по-системно на друго място. Също така отново ще се занимаем с крайните премествания, които — доколкото релациите (13), (14) могат да се осмислят в пред - Hilbert'ови пространства — допускат широки обобщения, а и имат генетична връзка с алгебрата на кватернионите.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чобанов, Ив.: Крайни ротации в тримерно векторно пространство. Год. на Соф. унив., Мат. фак., 57 (1962/63). 43—116.
2. Tschobanow, Iw: Affine und Euklidische Körper in Hilbertschen Räumen. Год. на Соф. унив., Мат. фак., 64 (1969/70), 293—330.

3. Whittaker, E. T.: Analytische Dynamik der Punkte und starren Körper mit einer Einführung in das Dreikörperproblem und mit zahlreichen Übungsaufgaben. Berlin, 1924.
4. Чобанов, Ив.: Върху логическите основи на аналитичната механика. Год. на Соф. унив., Мат. фак., **61** (1966/67), 185—255.
5. Чобанов, Ив., Гаврилов, М.: Аналитична теория на стрелите. Год. на Соф. унив., Физ.-мат. фак., **55** (1960/61), 83—158.
6. Чобанов, Ив., Стоянова, Р.: Към кинематиката на точка в криволинейни координати. Год. на Соф. унив., Мат. фак., **64** (1969/70), 75—114.

Постъпила на 29. IV. 1973 г.

QUELQUES REMARQUES CINÉMATIQUES

I. Tchobanov

(RÉSUMÉ)

Dans ce travail on démontre l'identité (34), où r_ν, ρ_ν ($\nu = 1, 2, 3$) sont deux repères dans l'espace vectoriel de trois dimensions V, liés avec (13), (14). La transformation (16), qui fait correspondre le vecteur (18) au vecteur (17), pour laquelle sont spécialement valables l'équations (19), s'appelle déplacement fini dans V, et la transformation (23), définie par (24) avec (20)—(22), s'appelle rotation finie dans V. On démontre (25). La solution du système d'équations (26) est (30), (31). Les conditions (32), (33) sont garanties par le fait de (34).

Dans le cas (48) on démontre (61) avec (49), (50).

Comme application de ces considérations on définit le quaternion (96), qui réalise la rotation finie (24).

On donne une démonstration tres brève de la condition nécessaire et suffisante pour qu'un système de coordonées soit inertial. Par cette démonstration on voit que le fait que le système est inertial on constate par une observation de l'attitude instantanée de trois points non collinéaires du système.

Après avoir donné une brève démonstration du théorème du rang d'un système de vecteurs glissants on formule l'analogie moment-cinématique et on donne l'équivalent du théorème du rang dans le cas d'un système de coordonées quelconques lié avec le corps mobile ainsi que dans le cas de mouvement du trièdre de Frenet — en vue de la classification des mouvements. Le présent article complémente ou bien simplifie quelques points des publications antérieures [1], [2], [4]—[6] de l'auteur.