БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ИЗГИБАНИЯ КУСОЧНО-РЕГУЛЯРНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

Стефка Т. Хинева

Пусть Ф — поверхность вращения отрицательной гауссовой кривизны, которая кусочно принадлежит классу C^2, а в целом — классу C.

В данной работе доказывается, что на поверхности Ф для каждой фиксированной параллели g_0 существует счетное всюду плотное множество параллелей $g_l^{(n)}$ таких, что поясы $\Phi_l^{(n)}$, ограниченные параллелями g_0 и одной из $g_l^{(n)}$, допускают нетривиальные бесконечно малые изгибания, в процессе которых вдоль краев g_0 и $g_l^{(n)}$ выполняется одно из условий:

а) вариация средней кривизны поверхности равна нулю ($\delta H=0$);

б) вариация кривизны (или нормальной кривизны) кривых g_0 и $g_l^{(n)}$ равна нулю ($\delta K=0$ или $\delta K_n=0$);

в) вариация геодезического кручения кривых g_0 и $g_l^{(n)}$ равна нулю ($\delta \tau_g=0$);

г)
$$\frac{\rho'}{\sqrt{EG}}\,\delta K_n+\frac{d}{ds}\,\delta \tau_g=0;$$

д) проекция вектора $\vec{z}(u, v)$ изгибающего поля поверхности на касательной к граничным кривым равна нулю.

§ 1. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЯ ОСНОВНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ИЗГИБАНИЙ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ГАУССОВОЙ КРИВИЗНЫ

Пусть Ф — поверхность вращения отрицательной гауссовой кривизны, которая принадлежит классу C^2. Радиус-вектор $\vec{x}(u, v)$ произвольной точки поверхности Ф относительно координатного базиса $\left(0,\ \vec{k},\ \vec{a}(v),\ \frac{d\vec{a}(v)}{d(v)}\right)$ [1], можно представить в следующем виде:

(1)
$$\vec{x}(u, v)=u\,\vec{k}+\rho(u)\,\vec{a}(v),\quad u_1\leq u\leq u_2;\ v\in[0,\ 2\pi],$$

где $\rho=\rho(u)$ — уравнение меридиана, линии $u=\text{const}$ являются параллелями, линии $v=\text{const}$ — меридианами.

Разложим вектор* $\vec{z}(u, v)$ изгибающего поля поверхности по векторам $\vec{k}$, $\vec{a}(v)$, $\frac{d\vec{a}}{dv}$:

$$\vec{z}(u, v)=\varphi(u, v)\vec{k}+\psi(u, v)\vec{a}(v)+\chi(u, v)\frac{d\vec{a}(v)}{dv}. \tag{2}$$

Тогда основное уравнение теории бесконечно малых изгибаний поверхностей

$$d\vec{x}\,.\,d\vec{z}=0 \tag{3}$$

равносильно следующей системе дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно функций $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$, $\chi(u, v)$:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\rho'(u)\frac{\partial\psi}{\partial u}=0,\\ &\psi+\frac{\partial\chi}{\partial u}=0,\\ &\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\rho'(u)\left[\frac{\partial\psi}{\partial u}+\chi\right]+\rho(u)\frac{\partial\chi}{\partial u}=0. \end{aligned} \tag{4}$$

Поскольку для поверхностей вращения $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$, $\chi(u, v)$ — периодические функции (с периодом 2π) относительно v, то они допускают разложения в виде рядов Фурье:

$$\begin{aligned} &\varphi(u, v)=\sum_{n=0}^{\infty}(\varphi_{n1}(u)\cos nv+\varphi_{n2}(u)\sin nv),\\ &\psi(u, v)=\sum_{n=0}^{\infty}(\psi_{n1}(u)\cos nv+\psi_{n2}(u)\sin nv),\\ &\chi(u, v)=\sum_{n=0}^{\infty}(\chi_{n1}(u)\cos nv+\chi_{n2}(u)\sin nv). \end{aligned} \tag{5}$$

Подставляя выражения (5) в систему (4) и приравнивая коэффициенты при $\cos nv$ и $\sin nv$, получаем следующую систему:

* Поле $\vec{z}(u, v)$ тоже принадлежит классу C^2.

$$
(6)\qquad \begin{cases}
\dfrac{d\varphi_{n1}}{du}+\rho'(u)\dfrac{d\psi_{n1}}{du}=0,\\
\psi_{n1}+n\chi_{n2}=0,\\
n\varphi_{n2}+\rho'(u)[n\psi_{n2}-\chi_{n1}]+\rho(u)\dfrac{d\chi_{n1}}{du}=0,\\
\dfrac{d\varphi_{n2}}{du}+\rho'(u)\dfrac{d\psi_{n2}}{du}=0,\\
\psi_{n2}-n\chi_{n1}=0,\\
-n\varphi_{n1}+\rho'(u)[-n\psi_{n1}-\chi_{n2}]+\rho(u)\dfrac{d\chi_{n2}}{du}=0.
\end{cases}
$$

Исключая из (6) φ_{n1}, φ_{n2}, χ_{n1}, χ_{n2}, для ψ_{ni} $(i=1,2)$ получаем уравнение

$$
(7)\qquad \frac{d^2\psi_{ni}}{du^2}\rho(u)+(n^2-1)\rho''(u)\psi_{ni}=0.
$$

В дальнейшем индекс i будем опускать.

Известно [1], что поверхность вращения с меридианом $\rho=\rho(u)$ будет жесткой тогда и только тогда, когда уравнение (7) при всех целочисленных значениях $n\geqq 2$ имеет только лишь тривиальное решение.

Коэффициенты уравнения (7) всюду положительные (Ф — поверхность отрицательной гауссовой кривизны), причем функция $\rho(u)$ принадлежит классу C^2.

В. И. Михайловский доказал [3], [4], что решение уравнения (7) имеет следующие свойства:

Для всякого $u=u_0$ из сегмента $[u_1, u_2]$ существует счетное всюду плотное множество значений $\{u_l^{(n)}\}$ таких, что уравнение (7) имеет при целых $n\geqq 2$ нетривиальное ограниченное решение, удовлетворяющее условиям:

$$
\text{а)}\quad \psi_n(u_0)=0,\quad \psi_n(u_l^{(n)})=0
$$

$$
\text{или б)}\quad \frac{\psi_n'(u_0)}{\varphi_n(u_0)}=-\frac{(n^2-1)\rho'(u_0)}{\rho(u_0)},
$$

$$
\frac{\psi_n'(u_l^{(n)})}{\psi_n(u_l^{(n)})}=-\frac{(n^2-1)\rho'(u_l^{(n)})}{\rho(u_l^{(n)})}.
$$

Для решения сформулированных геометрических задач нам будут нужны еще несколько свойств решения уравнения (7).

Теорема 1. 1. Для всякого $u=u_0$ из интервала $[U_1, U_2]$ существует счетное всюду плотное множество значений $\{u=u_l^{(n)}\}$ $(u_l^{(n)}\in[U_1, U_2]$,

l — конечное число, $n=2, 3 \ldots \infty$) таких, что уравнение (7) имеет при целых $n \geqq 2$ нетривиальное ограниченное решение, удовлетворяющее условиям:

(8) $$\psi_n'(u_0)=0,$$

(9) $$\psi_n'(u_l^{(n)})=0.$$

Доказательство. Не ограничивая общности, в дальнейшем за u_0 принимаем U_1.

Очевидно, что уравнение (7) при произвольном целом $n \geqq 2$ имеет нетривиальное ограниченное решение, удовлетворяющее условию (8).

Выберем в уравнении (7) $n=n_1$ таким, чтобы его решение

(10) $$\psi_{n1}=\psi_{n1}(u, n_1),$$

удовлетворяющее условию (8), имело хотя бы два нуля на интервале (u_0, U_2). Перепишем уравнение (7) в виде:

(7_1) $$\frac{d^2\psi_n}{dn^2}+(n^2-1)\frac{\rho''}{\rho}\psi_n=0.$$

Обозначим через m^2 наименьшее значение функции $\frac{\rho''(u)}{\rho(u)}$ на интервале $[u_0, U_2]$ и рассмотрим следующее уравнение:

(11) $$\frac{d^2Q}{dn^2}+k^2m^2Q=0.$$

Пусть $u=u_0$ нуль решения

(12) $$Q=c\sin km(u-u_0)$$

уравнения (11).

Если в уравнении (10) выберем $k=k_1$

(13) $$k_1=\frac{K_1\pi}{m(u-u_0)},$$

то решение (12) уравнения (11) на сегменте $[u_0, U_2]$ будет иметь по крайней мере K_1+1 нулей.

Выберем в уравнении (7_1) $n=n_1$ таким, чтобы $n_1^2-1 \geqq k_1^2$; тогда коэффициенты уравнений (7_1) и (11) на промежутке $[u_0, U_2]$ будут удовлетворять неравенству

(14) $$(n_1^2-1)\frac{\rho''(u)}{\rho(u)} \geqq k_1^2m^2.$$

Если через N_1 обозначим число нулей решения (10) уравнения (7) на интервале $[u_0, U_2]$, то в силу теоремы сравнения Штурма имеем

$N_1 \geqq K_1$. Пусть $u=u_1^{(n_1)}$ и $u=u_2^{(n_1)}$ последовательные нули решения (10) на интервале (u_0, U_2). Тогда в силу теоремы Ролля внутри этого интервала найдется по крайней мере одна такая точка $u=C_1^{(n_1)}$, в которой $\psi'_{n1}(C_1^{(n_1)}, n_1)=0$. Легко убедиться, что в промежутке $[u_1^{(n_1)}, u_2^{(n_1)}]$ может существовать лишь конечное число точек, в которых производная от функции $\psi_{n1}=\psi_{n1}(u, n_1)$ обращается в нуль. Действительно, если бы их было бесконечное число, то из этого множества можно выделить подпоследовательность $\{C_{m_k}^{(n_1)}\}$, сходящаяся в точке $C-u_1^{(n_1)}<C<u_2^{(n_1)}$ (если $C=u_1^{(n_1)}$, $u_2^{(n_1)}$, то $\psi''_n(u_1, u_2)=0$). В точке C, очевидно $\psi'_{n1}(C, n_1)=0$ и $\psi''_{n1}(C, u_1)=0$. Но тогда из уравнения (7) вытекает, что в этой точке — $\psi_{n1}(C, n_1)=0$. Отсюда в силу теоремы Коши заключаем, что $\psi_{n1}(u, n_1)=0$, а это противоречит тому, что $\psi_{n1}(u, n_1)$ нетривиальное решение уравнения (7).

Таким образом, между двумя последовательными нулями решения $\psi_{n1}(u, n_1)$ при каждом фиксированном $n=n_1$ $(n_1^2-1>k_1^2)$ может быть лишь конечное (а, следовательно, счетное) множество таких значений $u_l^{(n_1)}$, для которых нетривиальные решения уравнения (7), удовлетворяющие условию (8), будут удовлетворять и условию (9).

Множество всех значений $\{u_l^{(n)}\}$, для которых при любом целом $n \geqq 2$ $(n \geqq n_1,\ n_1^2-1 \geqq k_1^2)$ решение $\psi_n(u, n)$ уравнения (7), удовлетворяющее условию $\psi_n'(u_l^{(n)}, n)=0$, будет счетным, так как n принимает все целые значения от двух до бесконечности и при каждом фиксированном $n \geqq n_1$ множество значений $\{u_l^{(n_1)}\}$ конечное.

Легко убедиться, что множество значений $\{u_l^{(n)}\}$ всюду плотное на интервале $[u_0, U_2]$. Действительно, пусть u' и u'' произвольные значения из сегмента $[u_0, U_2]$. Покажем, что существует по крайней мере одно значение $u=u^*$, принадлежащее множеству $\{u_l^{(n)}\}$ и находящееся между u' и u''. Для этого достаточно выбрать в уравнении (7) $n=\tilde{n}$ такое, что его решение (10) на интервале $[u', u'']$ имело хотя бы два нуля. Если выберем $\tilde{n} \geqq \tilde{k}=\dfrac{3\pi}{m(u''-u')}$ $(k=\tilde{K}$ — коэффициент в уравнении (11)), то мы добьемся того, чтобы решение (10) уравнения (7) имело бы по крайней мере два нуля u_1^* и u_2^* на интервале $[u', u'']$. (Мы выбрали так $K=\tilde{K}$ в уравнении (11), чтобы его решение (12) на интервале $[u', u'']$ имело бы по крайней мере три нуля.) Тогда, в силу теоремы сравнения Штурма, решение (10) уравнения (7) будет иметь на интервале $[u', u'']$ по крайней мере два нуля.

В силу теоремы Ролля внутри интервала $[u_1^*, u_2^*]$ существует точка $u=u^*$, такая, что $\psi'_{\tilde{n}}(u^*, \tilde{n})=0$.

Теорема доказана.

Теорема 1. 2. Для всякого $u=u_0$ из сегмента $[u_0, U_2]$ существует счетное всюду плотное множество значений $\{u=u_l^{(n)}\}$ $(u_l^{(n)} \in [u_0, U_2]$,

l — конечное, $n=2, \ldots, \infty$) таких, что уравнение (7) имеет при целых $n \geqq 2$ нетривиальное ограниченное решение, удовлетворяющее условиям:

$$\rho(u_0)\,\psi_n'(u_0)-\rho'(u_0)\,\psi_n(u_0)=0, \tag{15}$$

$$\rho(u_l^{(n)})\,\psi_n'(u_l^{(n)})-\rho'(u_l^{(n)})\,\psi_n(u_l^{(n)})=0. \tag{16}$$

Доказательство. Уравнение (7) всегда допускает нетривиальное ограниченное решение, которое для всякого целого $n=2, \ldots \infty$ удовлетворяет условию (15). Таким является то решение уравнения (7), которое удовлетворяет следующим начальным условиям:

$$\begin{aligned} \psi_n(u_0)&=\rho(u_0), \\ \psi_n'(u_0)&=\rho'(u_0). \end{aligned} \tag{17}$$

Выберем в уравнении (7) $n=n_1$ таким, чтобы его решение $\psi_{n1}=\psi_{n1}(u, n_1)$, удовлетворяющее условиям (17), имело хотя бы два нуля на сегменте $[u_0, U_2]$ (см. теорему 1. 1). Пусть $u=u_1^{(n_1)}$ и $u=u_2^{(n_2)}$ — два соседних нуля решения $\psi_{n1}=\psi_{n1}(u, v)$ на интервале $[u_0, U_2]$. Рассмотрим функцию

$$f(u)=\frac{\psi_n'(u)}{\psi_n(u)}-\frac{\rho'(u)}{\rho(u)}=\frac{\rho(u)\,\psi_n'(u)-\rho'(u)\,\psi_n(u)}{\rho(u)\,\psi_n(u)}. \tag{18}$$

Поскольку на интервале $[u_1^{(n_1)}, u_2^{(n_1)}]$ $\dfrac{\psi_{n1}'(u)}{\psi_{n1}(u)}$ монотонно убывающая функция от $+\infty$ до $-\infty$ (ψ_{n1} решение уравнения (7)), а $\dfrac{\rho'(u)}{\rho(u)}$ — непрерывная ограниченная функция, то существует точка $u=\bar{u}$ внутри интервала $[u_1^{(n_1)}, u_2^{(n_1)}]$, для которой

$$\frac{\psi_{n1}(\bar{u})}{\psi_{n1}(\bar{u})}=\frac{\rho'(\bar{u})}{\rho(\bar{u})}, \tag{19}$$

т. е. (20) $$\rho(\bar{u})\,\psi_{n1}'(\bar{u})-\rho'(\bar{u})\,.\,\psi_{n1}(\bar{u})=0.$$

Докажем, что в интервале $(u_1^{(n_1)}, u_2^{(n_2)})$ существует лишь одно значение $u=\bar{u}$, для которого выполняется равенство (20). Допустим, что существуют два разных значений $u=\bar{u}'$ и $u=\bar{u}''$ $(\bar{u}'<\bar{u}'')$, при которых выполняется равенство (20), т. е.

$$\rho(\bar{u}')\,\psi_{n1}'(\bar{u}')-\rho'(\bar{u}')\,\psi_{n1}(\bar{u}')=0, \tag{21}$$

$$\rho(\bar{u}'')\,\psi_{n1}'(\bar{u}'')-\rho'(\bar{u}'')\,\psi_{n1}(\bar{u}'')=0. \tag{22}$$

Перепишем уравнение (7) в следующем виде:

$$(\rho(u)\psi'_{n1}(u)-\rho'(u)\psi_{n1}(u))'=-n_1^2\rho''(u)\psi_{n1}(u). \tag{23}$$

Интегрируя обе части этого равенства от u' до u'' получаем

$$0=-n_1^2\int_{u'}^{u''}\rho''(u)\psi_{n1}(u)\,du. \tag{24}$$

Подынтегральная функция $\rho''(u)\psi_{n1}(u)$ на интервале $[u', u'']$ или всюду положительная или всюду отрицательная, так как функция $\rho''(u)>0$, а функция $\psi_{n1}(u)$ не имеет нуля на промежутке $[u', u'']$. Тогда

$$F(u)=\int\rho''(u)\psi_{n_1}(u)\,du \tag{25}$$

строго монотонная функция. Поскольку $u'\neq u''$, то

$$-n^2\int_{u'}^{u''}\rho''(u)\psi_{n_1}(u)\,du\neq 0, \tag{26}$$

которое невозможно в силу равенства (24).

Следовательно, на сегменте $[u_1^{(n_1)}, u_2^{(n_2)}]$ не существует больше одного значения $u=u$, для которого выполняется равенство (20).

Таким образом, между двумя последовательными нулями решения $\psi_{n_1}=\psi_{n_1}(u, n_1)$ (при каждом фиксированном $n=n_1$) существует лишь одно значение $u=u$, для которого нетривиальное решение уравнения (7), удовлетворяющее условию (15), будет удовлетворять и условию (16).

Множество значений $\{u_i^{(n)}\}$ — счетное всюду плотное (см. доказательство теоремы 1. 1).

Теорема доказана.

§ 2 БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ИЗГИБАНИЯ КУСОЧНО РЕГУЛЯРНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

Пусть Ф — поверхность вращения отрицательной гауссовой кривизны, которая кусочно принадлежит классу C^2, а в целом — классу C. Представим радиус-вектор $\vec{x}(u, v)$ произвольной точки поверхности Ф в виде:

$$\vec{x}(u, v)=u\,.\,\vec{k}+\rho(u)\vec{a}(v), \quad U_0\leqq u\leqq U_1, \quad v\in[0, 2\pi].$$

Меридиан поверхности имеет вид:

$$\rho=\rho(u)=\begin{cases}\rho_1(u), & U_0\leqq u\leqq u_1,\\ \rho_2(u), & u_1\leqq u\leqq u_2,\\ \dots\dots & \\ \rho_l(u), & u_{l-1}\leqq u\leqq U_1,\end{cases}\tag{27}$$

где $\rho_i(u)>0$, $i=1,\dots,l$ — регулярные функции класса C^2 на интервалах $[u_{i-1}, u_i]-(u_0=U_0, u_l=U_1)$ и $\rho_i''(u)>0$. Обозначим через Φ_i поверхность вращения с меридианом $\rho=\rho_i(u)$. Поверхность Φ является поверхностью, склеенной из регулярных соосных поверхностей вращения $\Phi_i(i=1,\dots,l)$. Изгибающее поле $\vec{z}(u, v)$ считаем регулярным класса C^2 на каждой поверхности $\Phi_i-\vec{z}_i(u, v)$ и непрерывным на всей поверхности Φ, т. е.

$$\vec{z}(u, v)=\vec{z}_1(u, v)-\dots-\vec{z}_l(u, v),$$

причем вдоль линии склеивания $u=u_i-\vec{z}_i(u_i, v)=\vec{z}_{i+1}(u_i, v)$.

Теорема 2. 1. На кусочно-регулярной поверхности вращения Φ отрицательной гауссовой кривизны для каждой зафиксированной параллели $g_0: u=u_0$ существует счетное всюду плотное множество таких параллелей $g_l^{(n)}: u=u_l^{(n)}$, что поясы $\Phi_l^{(n)}$, ограниченные кривыми g_0 и одной из $g_l^{(n)}$, являются нежесткими относительно бесконечно малых изгибаний, сохраняющих геодезическое кручение граничных кривых.

Доказательство. Найдем краевые условия, которым должны удовлетворять решения уравнения (7), чтобы оно описывало бесконечно малые изгибания, сохраняющие геодезическое кручение граничных кривых.

Как известно [2], вариация геодезического кручения кривой $u=\text{const}$ на поверхности определяется формулой

$$\delta\tau_g=\frac{\delta M}{\sqrt{EG}}\tag{28}$$

при условии ортогональности параметрической сети на поверхности. Тогда условие сохранения геодезического кручения граничных кривых $g_0: u=u_0$ и $g_l^{(n)}: u=u_l^{(n)}$ приводит к равенствам:

$$\delta M/g_0=0,\tag{29}$$

$$\delta M/g_l^{(n)}=0.\tag{30}$$

Вычислим вариацию коэффициента M второй квадратичной формы поверхности Φ. Если через M^* обозначим соответствующий коэффициент второй квадратичной формы деформированной поверхности Φ_ε

(33) $$\vec{x}^*(u, v, \varepsilon) = \vec{x}(u, v) - \varepsilon \vec{z}(u, v),$$

то

(34) $$M^* = \frac{x_u^* x_v^* x_{uv}^*}{\sqrt{E^* G^* - F^{*2}}} = M - \varepsilon \delta M.$$

Учитывая равенства (31), (1), (2) и (4), из (32) получаем

(33) $$\delta M = -\frac{\sqrt{1+\rho^{12}}}{\rho} \{\rho(\psi_{uv} - \chi_u) - \rho'(\psi_v - \chi)\}.$$

Из равенств (5), (6), (33), (29) и (30) (поскольку $\sin nv$ и $\cos nv$ не равны одновременно нулю) находим

(34) $$\rho(u_0)\psi_n'(u_0) - \rho'(u_0)\psi_n(u_0) = 0,$$

(35) $$\rho(u_l^{(n)})\psi_n'(u_l^{(n)}) - \rho'(u_l^{(n)})\psi_n(u_l^{(n)}) = 0.$$

Таким образом, доказательство теоремы свелось к доказательству существования нетривиального решения (7), принадлежащего классу C^2 на каждой из регулярных поверхностей Φ_i и-классу C на всей поверхности Φ, которое вдоль граничных параллелей удовлетворяет условиям (34), (35), а на линиях склеивания поверхности Φ: $u = u_i (i = 1, 2, \ldots, l)$ — условиям сопряжения

(36) $$\begin{gathered}\psi_{n,\,i+1}(u_i) = \psi_{n,\,i}(u_i),\\ \rho_{i+1}(u_i)\psi_{n,\,i+1}'(u_i) + (n^2-1)\rho_{i+1}'(u_i)\psi_{n,\,i+1}(u_i)\\ = \rho_i(u_i)\psi_{n,\,i}'(u_i) + (n^2-1)\rho_i'(u_i)\psi_{n,\,i}(u_i).\end{gathered}$$

Не ограничивая общности, считаем, что $u_0 = U_0$. Уравнение (7) на интервале $[u_0, u_1]$ при $n \geqq 2$ имеет нетривиальное ограниченное решение, удовлетворяющее условию (34). За такое решение выбираем то решение уравнения (7), которое удовлетворяет начальным условиям:

(37) $$\begin{gathered}\psi_{n,\,1}(u_0) = \rho(u_0),\\ \psi_{n,\,1}'(u_0) = \rho'(u_0).\end{gathered}$$

В силу теоремы 1. 2, существует счетное всюду плотное множество значений $\{u_l^{(n)}\}$ $(u_l^{(n)} \in [u_0, u_1])$, таких, что решение уравнения (7), удовлетворяющее условию (37), будет удовлетворять и условию (35). Обозначим через $\psi_{n,\,1} = \psi_{n,\,1}(u_1)$ и $\psi_{n,\,1}' = \psi_{n,\,1}'(u_1)$ значения решения $\psi_{n,\,1}$ в точке u_1. $\psi_{n,\,1}(u_1)$ и $\psi_{n,\,1}'(u_1)$ не равны одновременно нулю, так как $\psi_{n,\,1}(u)$ не тривиальное решение уравнения (7) на интервале $[u_0, u_1]$.

Пусть $\psi_{n,\,2}(u)$ то решение уравнения (7) на интервале $[u_1, u_2]$, которое в точке u_1 принимает значения

$$\psi_{n,\,2}(u_1)=\psi_{n,\,1}(u_1),$$

(38) $$\psi'_{n,\,2}(u_1)=\frac{\rho_1(u_1)\,\psi'_{n,\,1}(u_1)+(n^2-1)\,\psi_{n,\,1}(u_1)\,[\rho_1'(u_1)-\rho_2'(u_1)]}{\rho_2(u_1)}.$$

Прилагая опять теорему 1. 2, заключаем, что на сегменте $[u_1, u_2]$ существует счетное всюду плотное множество значений $\{u_l^{(n)}\}$ таких, что решение $\psi_{n,\,2}(u)$ уравнения (7), удовлетворяющее условиям (38), будет удовлетворять и условию (35).

Поступая аналогичным образом последовательно со всеми следующими интервалами $[u_2, u_3], \ldots\ldots, [u_{l-1}, U_1]$, мы можем построить нетривиальное ограниченное решение $\psi_n=\psi_{n,\,1}+\psi_{n,\,2}+\cdots+\psi_{n,\,l}$, регулярное на интервалах $[u_{i-1}, u_i]$ и непрерывное на интервале $[u_0, u_1]$, которое удовлетворяет условиям (34), (35), а на линиях склеивания — условиям сопряжения (36).

Теорема доказана.

Теорема 2. 2. На кусочно регулярной поверхности вращения Ф отрицательной гауссовой кривизны для каждой зафиксированной параллели g_0: $u=u_0$ существует счетное всюду плотное множество таких параллелей $g_l^{(n)}: u=u_l^{(n)}$, что поясы $\Phi_l^{(n)}$, ограниченные кривыми g_0 и одной из $g_l^{(n)}$, являются нежесткими относительно бесконечно малых изгибаний, сохраняющих или

а) кривизну граничных параллелей,

или б) среднюю кривизну поверхности вдоль граничных параллелей.

Доказательство. Найдем краевые условия, при которых следует интегрировать уравнение (7), чтобы оно описывало бесконечно малые изгибания поверхности вращения Ф, сохраняющие или кривизну граничных параллелей или средюю кривизну поверхности вдоль граничных кривых.

Поскольку вариация кривизны кривой $u=\mathrm{const}$ на поверхности задается формулой [2]

(39) $$\delta k=\frac{\delta N}{L}\cos\theta,$$

где θ — угол между главной нормалью кривой и нормалью поверхности в точке кривой, а вариация средней кривизны поверхности равняется выражением

(40) $$\delta H=\frac{E\,\delta N+G\,\delta L}{2EG}$$

при условии ортогональности координатной сети на поверхности, то условия сохранения кривизны граничных параллелей или средней кривизны поверхности вдоль граничных кривых приводят соответственно к равенствам

(41) $$\delta N|_{u=u_0}=0\,,\quad \delta N|_{u=u_l^{(n)}}=0\,,$$

(42) $$E\,\delta N-G\,\delta L|_{u=u_0}=0\,,$$
$$E\,\delta N+G\,\delta L|_{u=u_l^{(n)}}=0\,.$$

Вычислим вариации коэффициентов L и N второй квадратичной формы поверхности Ф. Беря во внимание равенства (33), (1), (2), (4), находим

(43) $$\delta L=-\sqrt{1+\rho^{12}}\cdot\psi_{uu}\,,$$

(44) $$\delta N=-\sqrt{1+\rho^{12}}\,(\psi_{vv}+\psi)\,.$$

Учитывая равенства (5), из (44) и (43) в силу линейной независимости функций $\cos nv$ и $\sin nv$ получаем:

(45) $$\psi_n(u_0)=0\,,$$
$$\psi_n(u_l^{(n)})=0\,.$$

Аналогично из равенств (5), (43), (44), (42) и (7) опять находим

$$\psi_n(u_0)=0\,,\quad \psi_n(u_l^{(n)})=0\,.$$

Таким образом, равенства (45) представляют собой необходимые и достаточные условия, при которых следует интегрировать уравнение (7), чтобы оно описывало бесконечно малые изгибания, в процессе которых сохраняется или кривизна граничных кривых, или средняя кривизна поверхности вдоль граничных параллелей.

Дальнейшее доказательство теоремы в силу теоремы 1 работы [3] анологично доказательству теоремы 2. 1.

Теорема 2. 3. На кусочно регулярной поверхности вращения Ф отрицательной гауссовой кривизны для каждой зафиксированной параллели $g_0: u=u_0$ существует счетное всюду плотное множество параллелей $g_l^{(n)}: u=u_l^{(n)}$, таких, что поясы $\Phi_l^{(n)}$, ограниченные кривыми g_0 и одной из $g_l^{(n)}$, допускают нетривиальные бесконечно малые изгибания, в процессе которых проекция изгибающего поля $\vec{z}(u, v)$ на касательной граничных кривых равна нулю.

Доказательство. Известно [1], что вектор $\dfrac{d\vec{a}(v)}{dv}$ коллинеарен с касательной к параллелям. Умножая равенство (2) скалярно на $\dfrac{d\vec{a}(v)}{dv}$, получаем

(46) $$\vec{z}(u, v)\cdot\frac{d\vec{a}(v)}{dv}=\chi(u, v)\,.$$

Вдоль граничных параллелей g_0 и $g_l^{(n)}$ равенство (46) принимает вид

$$\chi(u_0, v)=0, \qquad \chi(u_l^{(n)}, v)=0. \tag{47}$$

Учитывая равенства (4), (5), из равенства (47) находим

$$\psi_n(u_0)=0, \qquad \psi_n(u_l^{(n)})=0. \tag{48}$$

Равенства (48) представляют собой граничные условия, при которых следует интегрировать уравнение (7), чтобы оно описывало бесконечно малые изгибания, в процессе которых проекция вектора скорости $\vec{z}(u, v)$ на касательной к граничным параллелям поверхности Ф равнялась бы нулю.

Дальнейшее доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 2. 2.

Теорема 2. 4. На кусочно регулярной поверхности вращения Ф отрицательной гауссовой кривизны для каждой зафиксированной параллели $g_0: u=u_0$ существует счетное всюду плотное множество параллелей $g_l^{(n)}: u=u_l^{(n)}$, таких, что поясы $\Phi_l^{(n)}$, ограниченные кривыми g_0 и одной из $g_l^{(n)}$, допускают нетривиальные бесконечно малые изгибания, в процессе которых вдоль граничных кривых выполняется условие

$$\frac{\rho'(u)}{\sqrt{EG}}\delta K_n+\frac{d}{ds}\delta\tau_g\Big|_{g_0}=0, \quad \frac{\rho'(u)}{\sqrt{EG}}\delta K_n+\frac{d}{ds}\delta\tau_g\Big|_{g_l^{(n)}}=0. \tag{49}$$

Доказательство. Учитывая $\delta K_n=\frac{\delta N}{G}$ и равенства (28), (33), (44), (5), (6), получаем

$$\psi_n'(u_0)=0, \qquad \psi_n'(u_l^{(n)})=0. \tag{50}$$

Если поверхность Ф принадлежит классу C^2, то доказательство теоремы следует из доказательства теоремы 1. 1, а если поверхность Ф принадлежит кусочно классу C^2, а в целом классу C, то для доказательства теоремы достаточно применить рассуждения теоремы 2. 1 и теоремы 1. 1.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кон-Фоссен, С. Э.: Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом. М., 1959.
2. Векуа, И. Н.: Обобщенные аналитические функции. М., 1959.
3. Михайловский, В. І. Нескінченно малі згинання заклеєних поверхонь обертання від'ємної кривизни. Вісник КДУ. № 4. серія астр., матем. та мех., т. 2, 1961, . . .
4. Михайловский, В. И.: Бесконечно малые изгибания „скольжения" поверхностей вращения отрицательной кривизны. УМЖ, т. XIV, № 1, 1962, . . .
5. Михайловский, В. И.: Бесконечно малые изгибания кусочно-регулярных поверхостей вращения отрицательной кривизны. УМЖ, т. XIV, № 4, 1962. . . .

Постъпила на 25. VI. 1973 г.

INFINITESIMAL BENDINGS OF PIECEWISE REGULAR SURFACES OF REVOLUTION WITH NEGATIVE CURVATURE

S. T. Hineva

(SUMMARY)

Let Φ be a surface of revolution with a negative Gaussian curvature, which piecewise belongs to the class C^2, but globally to the class C.

In this paper it has been proved that on the surface Φ for every fixed parallel circle g_0 there exists a countable everywhere dense set of parallel circles $g_l^{(n)}$, such that the strips $\Phi_e^{(n)}$ bounded by the parallel circles g_0 and one of $g_e^{(n)}$ allow non-trivial infinitesimal bendings, in the process of which along the contours g_0 and $g_e^{(n)}$ one of the following conditions is fulfilled:

a) The variation of the mean curvature of the surface is equal to 0 ($\delta H=0$).

b) The variation of the curvature (or the normal curvature) of the curves g_0 and $g_e^{(n)}$ is equal to 0 ($\delta k=0$ or $\delta K_n=0$).

c) The variation of the geodesic torsion of the curves g_0 and $g_e^{(n)}$ is equal to 0 ($\delta\tau_g=0$).

d) The projection of the vector $\vec{z}(u, v)$ of the bending field of the surface Φ on the tangent to the contour curves g_0 and $g_e^{(n)}$ is equal to 0.

e) $\dfrac{\rho'(u)}{\sqrt{EG}}\,\delta k_n+\dfrac{d}{ds}\,\delta\tau_g=0$.