ЭКВИВАРИАНТНЫЕ МНОГОЗНАЧНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ СФЕРЫ

Генчо С. Скордев

I. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Пусть R^{n+1} — $n+1$-мерное евклидовое пространство; единичную сферу в R^{n+1} обозначим через S^n, $S^n=\{x \in R^{n+1}: |x|=1\}$; через B^{n+1} обозначим единичный шар в R^{n+1}, $B^{n+1}=\{x \in R^{n+1}: |x| \leqq 1\}$.

Рассмотрим ортогональную инволюцию $\alpha: R^{n+1} \to R^{n+1}$. Отображение α описывается следующим образом: α есть ортогональная симметрия относительно некоторого подпространства R^k пространства R^{n+1}, так что множество неподвижных точек α есть линейное пространство R^k.

Пусть A — подмножество R^{n+1}. Будем говорить, что A инвариантно относительно α, если, как только $x \in A$, то $\alpha(x) \in A$. Если A инварианто, то, не оговаривая специально, будем считать, что в A действует инволюция α. Таким образом, в S^n, B^{n+1}, $R_0^{n+1}=R^{n+1}\setminus\{0\}$, действует α (здесь 0 — нуль пространства R^{n+1}).

Если X и Y топологические пространства, а $F: X \to Y$ полунепрерывное сверху многозначное отображение, будем говорить, что F — компактно, если множество $F(x)$ имеет компактное замыкание в пространстве Y. При этом отметим, что для любой точки $x \in X$ всегда $F(x)$ есть компактное подмножество пространства Y.

Полунепрерывное сверху многозначное отображение $F: X \to Y$ будем называть **ациклическим**, если для любой точки $x \in X$, компакт $F(x)$ — ациклически. При этом, компакт Z называется **ациклическим**, если он связен и для любого $i \geqq 1$ имеем $H_i(Z)=0$. Здесь и в дальнейшем будем пользоваться гомологиями Александрова-Чеха с рациональными коэффициентами [1], гл. 7.

Пусть $F: X \to Y$ — ациклическое отображение, а X и Y метризуемые пространства. Через $\Gamma(F)$ обозначим график отображения F, $\Gamma(F)=\{(x, y) \in X \times Y: y \in F(x)\}$. Рассмотрим отображение $p: \Gamma(F) \to X$, $q: \Gamma(F) \to Y$, где $p(x, y)=x$ $q=(x, y)=y$, $(x, y) \in \Gamma(F)$. Имеем

а) отображение p есть отображение „на", т. е. $p(\Gamma(F))=X$;

б) p — совершенное отображение, т. е. оно замкнуто и полный прообраз $p^{-1}(x)$ любой точки $x \in X$ — компакт;

в) для любой точки $x \in X$, $p^{-1}(x)=x \times F(x)$ есть ациклический компакт.

Из теоремы Вьеториса следует, что $p_*: H_*(\Gamma(F)) \to H_*(X)$ есть изоморфизм [2, 3].

Если $f: X_1 \to X_2$ — непрерывное однозначное отображение, то $f_*: H_*(X_1) \to H_*(X)_2$ — гомоморфизм, индуцированный непрерывным отображением f.

Определим теперь $F_*: H_*(X) \to H_*(Y)$, положив $F_* = q_* p_*^{-1}$.

Пусть теперь $F: S^n \to S^n$ — ациклическое отображение. Определим степень $\deg F$ отображения F. Пусть $\gamma_n \in H_n(S^n)$ — фундаментальный класс гомологии сферы S^n, тогда $F_n(\gamma_n) = \deg F . \gamma_n$. Здесь $F_* = \{F_i\} \xi$.

Через R_0^{n+1} мы обозначили пространство $R^{n+1} \setminus \{0\}$. Пусть $i: S^n \to R_0^{n+1}$ — тождественное вложение и $\bar{\gamma}_n = i_n(\gamma_n)$, где $i_* = \{i_s\}_{s=0}^n$. Если теперь $F: S^n \to R_0^{n+1}$ есть ациклическое отображение, то степень $\deg F$ отображения F определяется следующим образом: $F_n(\gamma_n) = \deg F . \bar{\gamma}_n$.

Пусть E — пространство Банаха и $S = \{x \in E: \|x\| = 1\}$ — единичная сфера пространства E, а $B = \{x \in E: \|x\| \leq 1\}$ — единичный шар E. Если A — подмножество E, то будем говорить, что на A задано вполне непрерывное многозначное векторное поле $\Phi: A \to E$, если $\Phi = I - F$, где I — тождественное отображение E, а $F: A \to E$ есть полунепрерывное сверху многозначное компактное отображение. Вполне непрерывное многозначное векторное поле Φ будем называть ациклическим, если отображение F — ациклическое. Будем говорить, что Φ не имеет особенностей, если для любого $x \in A$ множество $\Phi(x)$ не содержит нуля пространства E.

Пусть теперь $\Phi: S \to E$ вполне непрерывное ациклическое векторное поле без особенностей. Определим степень $\deg \Phi$ поля Φ, см. [4]. Так как $\Phi = I - F$, и F — компактное полунепрерывное сверху многозначное отображение, то множество $\Phi(S)$ — замкнуто в E (здесь $\Phi(S) = \bigcup_{x \in S} \Phi(x)$). Следовательно, нуль пространства E находится на положительном расстоянии ε от множества $\Phi(S)$. Рассмотрим компакт $K = \overline{F(S)}$. Аппроксимируем компакт K конечномерным линейным подпространством пространства E с точностью $\frac{\varepsilon}{2}$, т. е. пусть $\mu: K \to R$ — непрерывное однозначное отображение, а R — конечномерное подпространство пространства E и, кроме того, для любой точки $x \in K$ имеем $\|x - \mu(x)\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Пусть $\Sigma = S \cap R$. Рассмотрим отображение $\varphi: \Sigma \to R\xi \setminus \{0\}$, где $\varphi(x) = x - \mu F(x)$, $x \in \Sigma$. Так как φ есть суперпозиция конечного числа ациклических отображений, то можем определить $\varphi_*: H_*(\Sigma) \to H_*(R \setminus \{0\})$ как суперпозицию гомоморфизмов в гомологиях, индуцированных этими ациклическими отображениями. Тогда если γ — фундаментальный класс гомологии сферы Σ, и $\bar{\gamma}$ класс гомологичный γ в $R \setminus \{0\}$, $\varphi_n(\gamma) = \deg \varphi . \gamma$. По определению $\deg \Phi = \deg \varphi$.

Важный класс ациклических отображений $F: X \to Y$ (где Y — линейное пространство) суть отображения, которые любой точке $x \in X$ ставят в соответствие выпуклый компакт в Y. Пусть $F: S^n \to R_0^{n+1}$ есть ациклическое отображение, для которого $F(x)$ — выпуклый компакт

для любого $x \in S^n$. В [5] § I степень $\deg F$ отображения F определяется следующим образом. Пусть τ — триангуляция S^n и $y^1, \ldots, y^k$ ее вершины. Тогда любая точка $x \in S^n$ однозначно определяется своими барицентрическими координатами $x(y^i)$, $i=1, \ldots, k$. Пусть $z^i \in F(y^i)$, $i=1, \ldots, k$. Определим непрерывное однозначное отображение $f: S^n \to R^{n+1}$, $f(x) = \sum_{i=1}^{k} x(y^i) z^i$, где $x \in S^n$. Легко проверяется, что если триангуляция τ достаточно мелка, будем иметь $f(S^n) \subset R_0^{n+1}$. Тогда, если $f(\gamma_n) = \deg f \cdot \bar{\gamma}_n$, то положим $\deg F = \deg f$. Нетрудно проверить, что для отображений с выпуклыми образами точек оба определения степени совпадают.

Верхнее определение степени для отображений с выпуклыми образами точек показывает, как изучаются такие отображения при помощи аппроксимации однозначными. Хороший обзор на эту тему можно найти в [6]. Для произвольных ациклических отображений этот метод неприменим.

II. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Предложение 1. Пусть $\alpha: S^n \to S^n$ — ортогональная инволюция и $F: S^n \to S^n$ — ациклическое отображение, коммутирующее с α, т. е. $F\alpha = \alpha F$. Если S^k есть множество неподвижных точек α и $F(S^k) \subset S^k$, то

$\deg F \equiv 1 \pmod 2$ для $k = -1$,

$\deg F \equiv \deg F \mid S^k \pmod 2$ для $k \geqq 0$.

Следствие 1. 1. Пусть $\alpha: R^{n+1} \to R^{n+1}$ — ортогональная инволюция и R^{k+1} ее множество неподвижных точек. Если $F: S^n \to R_0^{n+1}$ ациклическое отображение, которое коммутирует с α и $F(S^k) \subset R_0^{k+1}$, то

$\deg F \equiv 1 \pmod 2$ для $k = -1$,

$\deg F \equiv \deg F \mid S^k \pmod 2$ для $k \geqq 0$.

Следствие 1. 2. Не существует ациклическое отображение $F: S^n \to S^k$, $k \leqq n-1$, которое коммутирует с симметрией относительно центра сфер.

Следствие 1. 3. Пусть $\psi: B^{n+1} \to R^{n+1}$ — ациклическое отображение, $F = \psi \mid S^n: S^n \to R^{n+1}$ и $F(x) = -F(-x)$ для любого $x \in S^n$; тогда существует точка $z \in B^{n+1}$ такая, что $z \in \psi(z)$, т. е. ψ имеет неподвижную точку.

Замечания:

1. Если F — однозначное отображение и $k = -1$, то предложение 1 доказано в [7].

2. Если $F(x)$ — выпукло для любого $x \in S^n$ и $k = -1$, то следствие 1. 1 доказано в [5], в предположении, что $F(x) \cap F(-x) = \varnothing$ для любого $x \in S^n$.

3. В предположении, что $F(x) \cap F(-x) = \varnothing$ для любого $x \in S^n$, предложение 1 следует из [8] и [9], в случае $k = -1$.

Предложение 2. Пусть H — пространство Гильберта, $\alpha: H \to H$ ортогональная инволюция и $f(\alpha)$ множество неподвижных точек α. Если $\Phi: S \to H$ — вполне непрерывное ациклическое векторное поле без особенностей и $\Phi\alpha = \alpha\Phi$, и $\Phi f(\alpha) \subset f(\alpha)$, то

$$\deg \Phi = 1 \pmod 2, \qquad \text{если } \dim f(\alpha) = 0$$

$$\deg \Phi = \deg \Phi \ f(\alpha) \cap S \pmod 2, \quad \text{если } \dim f(\alpha) \geqq 1.$$

Следствие 2. 1. Пусть $F: B \to H$ — компактное ациклическое отображение, а $F_1 = F \ S: S \to H$ и $F_1(x) = -F_1(-x)$ для любого $x \in S$; тогда существует $z \in B$ такая, что $z \in F(z)$, т. е. отображение F имеет неподвижную точку.

Здесь S — единичная сфера, а B — единичный шар в H.

Замечания:

1. Предложение 2 доказано в [10] в предположениях, что Φ — однозначное векторное поле и $\dim f(\alpha) = 0$.

2. Предложение 2 доказано в [11] в предположениях, что $\Phi(x)$ — выпуклый компакт для любого $x \in S$ и $\dim f(\alpha) = 0$, см. также и [5].

3. Основные результаты этой заметки опубликованы без доказательств в [13]. Наша цель будет доказать сформулированные выше теоремы.

4. Как мне сообщил В. Обуховский, предложение 1 было получено недавно им и Я. Израилевичем в предположении, что $k = -1$ неопубликовано им пока.

III ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Существуют произвольно мелкие триангуляции τ сферы S^n со следующими свойствами:

а. Точки $N = (0, 0, \ldots, 1)$ и $S = \alpha(N)$ лежат во внутренности n-мерных симплексов триангуляции τ.

б. Сферы S^i суть подкомплексы триангуляции τ, $i \leqq n$.

в. Триангуляция τ — инвариантна относительно ортогональной инволюции α, т. е. если σ^i есть симплекс τ, то $\alpha(\sigma^i)$ тоже симплекс τ.

Дальше мы фиксируем триангуляцию τ сферы S^n, удовлетворяющую условиям а, б, в. Конечно, триангуляция τ завист от инволюции α. Отображение $\alpha: S^n \to S^n$ — симплициально в триангуляции τ. Через $C_*(S^n)$ обозначим цепной комплекс триангуляции τ, а через $\alpha_* = \{\alpha_i\}: C_*(S^n) \to C_*(S^n)$ — цепное отображение, индуцированное симплициальным отображением α. Если не оговорено предварительно, будем считать, что коэффициенты суть целые числа (большинство рассуждений не будут зависеть от коэффициентов).

Докажем следующую лемму.

Лемма 1. Для любого $0 \leqq i \leqq n-1$ существуют гомоморфизмы $\gamma_i: C_i(S^n) \to C_i(S^{n-1})$ и $s_i: C_i(S^n) \to C_{i+1}(S^n)$, удовлетворяющие следующим условиям:

а. $\gamma_* = \{\gamma_i\}$ — цепное отображение.

б. Если σ_i — симплекс триангуляции τ и $0 \leqq i \leqq n-1$, то $\partial s_i(\sigma^i) = \sigma^i - s_{i-1}(\partial\sigma^i) - \gamma_i(\sigma^i)$; при этом $S_{-1} = 0$.

в. $\alpha_i\gamma_i=\gamma_i\alpha_i$ для $0\leqslant i\leqslant n-1$.

г. $s_i\alpha_i=\alpha_i s_i$ для $0\leqslant i\leqslant n-1$.

Рассмотрим $i=0$. Пусть τ^0 — нульмерный симплекс в S^n триангуляции τ. Имеем два случая:

1. $\tau^0\in S^{n-1}$.
2. τ^0 не принадлежит S^{n-1}.

Пусть $\tau^0\in S^{n-1}$, тогда положим

$$s_0(\tau^0)=0,\quad \gamma_0(\tau^0)=\tau^0.$$

Пусть теперь τ^0 не принадлежит S^{n-1}. Так как носители точек N и S суть n-мерные симплексы в S^n, то три точки τ^0, N, S однозначно определяют двумерную плоскость $r(\tau^0)$, которая проходит через них. Плоскость $r(\tau^0)$ пересекает S^n по большой окружности $o(\tau^0)$, а S^{n-1} в двух точках k_1 и k_2. Обозначим через $o(\tau^0)(1)$ ту из точек k_1, k_2, которая ближе к τ^0. Через $d(\tau^0)$ обозначим меньшую из дуг $o(\tau^0)$ с концами τ^0 и $o(\tau^0)(1)$. Параметризуем эту дугу при помощи длины, начиная с τ^0. Тем самым получаем гомеоморфизм $f:[O,a]\to d(\tau^0)$; здесь a — длина дуги $d(\tau^0)$, при этом $f(0)=\tau^0$, $f(a)=o(\tau^0)(1)$. Существует достаточно мелкая триангуляция τ_1 отрезка $[O,a]$ $O=a_0<a_1<\ldots<a_{s-1}<a_s=a$ и симплициальная аппроксимация $\tilde f$, f, $\tilde f:[0,a]\to S^n$, удовлетворяющая:

1. $\tilde f(0)=\tau^0$.
2. Если $f(a)$ вершина в S^{n-1}, то $\tilde f(a)=f(a)$.
3. $\tilde f(a)\in S^{n-1}$.

Симплициальное отображение $\tilde f:[O,a]\leftarrow S^n$ индуцирует цепное отображение $\tilde f_*=\{\tilde f_i\}:C_*([O,a])\to C_*(S^n)$. Положим

$$S_0(\tau^0)=-\tilde f_1\Big(\sum_{\nu=0}^{s-1}[a_\nu,\ a_{\nu+1}]\Big),$$

$$\gamma_0(\tau^0)=\tilde f_1(a).$$

Пусть $\tau_1{}^0$ другая вершина S^n; если $\tau_1{}^0=\alpha(\tau^0)$, положим $s_0(\tau_1{}^0)=\alpha_1 s_0(\tau^0)$ и $\gamma_0(\tau_1{}^0)=\alpha_0\gamma_0(\tau^0)$. Если $\tau_1{}^0\neq\alpha(\tau^0)$, то, применив верхнюю процедуру, построим $s_0(\tau_1{}^0)$ и $\gamma_0(\tau_1{}^0)$. Тем самым мы построим гомоморфизмы $s_0:C_0(S^n)\to C_1(S^n)$ и $\gamma_0 C_0(S^n)\to C_0(S^{n-1})$, для которых $s_0\alpha_0(\tau^0)=\alpha_1 s_0(\tau^0)$, и $\gamma_0\alpha_0(\tau^0)=\alpha_0\gamma_0(\tau^0)$ для любого симплекса τ^0 размерности нуль триангуляции τ.

Проверим а, б, в, г леммы I. Условия а, в, г выполняются автоматически. Рассмотрим б.

Если $\tau^0\in S^{n-1}$, то $s_0(\tau^0)=0$, $\gamma_0(\tau^0)=\tau^0$; тогда $\partial s_0(\tau^0)=\tau^0-\gamma_0(\tau^0)$.

Пусть теперь τ^0 не принадлежит S^{n-1}. Имеем

$$\partial s_0(\tau^0)=-\tilde f_1\Big(\partial\sum_{\nu=0}^{s-1}[a_\nu,\ a_{\nu+1}]\Big)=\tilde f_1(0)-\tilde f_1(a)=\tau^0-\gamma_0(\tau^0),$$

см. (1) — (4).

Тем самым для $i=0$ построены искомые гомоморфизмы. Предположим теперь, что для $0 \leqq i \leqq k-1 < n-1$ построены гомоморфизмы s_i, γ_i, удовлетворяющие а, б, в, г леммы 1. Построим s_k и γ_k.

Пусть τ^k — k-мерный симплекс триангуляции τ. Положим $\nu_k(\tau^k) = \tau^k - s_{k-1}(\partial\tau^k)$. Имеем $\partial\nu_k(\tau^k) = \gamma_{k-1}(\partial\tau^k)$, следовательно, $\partial\nu_k(\tau^k)$ есть $(k-1)$-мерный цикл в S^{n-1}. Так как $k-1<n-1$, то существует k-мерная цепь $\gamma_k(\tau^k)$ в S^{n-1}, такая, что $\partial\gamma_k(\tau^k) = \gamma_{k-1}(\partial\tau^k)$. Тем самым мы определили $\gamma_k(\tau^k)$.

Рассмотрим k-мерную цепь $\beta_k(\tau^k) = \nu_k(\tau^k) - \gamma_k(\tau^k)$. $\beta_k(\tau^k)$ есть k-мерный цикл в S^n, и так как $k \leqq n-1$, то существует $(k+1)$-мерная цепь $s_k(\tau^k)$ такая, что $\partial s_k(\tau^k) = \beta^k(\tau^k)$. Тем самым мы определили $s_k(\tau^k)$.

Пусть $\tau_1{}^k$ — k-мерный симплекс S^n и $\tau_1{}^k = \alpha(\tau^k)$; положим $\gamma_k(\tau_1{}^k) = \alpha_k\gamma_k(\tau^k)$ и $s_k(\tau_1{}^k) = \alpha_{k+1}s_k(\tau^k)$. Если $\tau_1{}^k \neq \alpha_k(\tau^k)$, тогда верхней конструкцией определяем $\gamma_k(\tau_1{}^k)$ и $s_k(\tau_1{}^k)$.

Тем самым мы определили гомоморфизмы γ_k и s_k, такие, что $\gamma_k\varkappa_k = \alpha_k\gamma_k$ и $\alpha_{k+1}s_k = s_k\varkappa_k$. Проверка условий а,..., г леммы 1 автоматична. Таким образом лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть $\varkappa_*: C_*(S^n) \to C_*(S^n)$ — цепное отображение и $\varkappa_*\alpha_* = \alpha_*\varkappa_*$. Существует цепное отображение $\bar{\varkappa}_*: C_*(S^n) \to C_*(S^n)$ со следующими свойствами:

а. $\varkappa_*$ и $\bar{\varkappa}_*$ — гомотопные цепные отображения, т. е. существует гомоморфизмы $D_i: C_i(S^n) \to C_{i+1}(S^n)$, такие, что имеем $\bar{\varkappa}_i - \varkappa_i = \partial D_{i+1} + D_i\partial$.

б. $\bar{\varkappa}_*\alpha_* = \alpha_*\bar{\varkappa}_*$.

в. Если τ^i — симплекс S^{n-1}, то $\varkappa_i(\tau^i)$ есть цепь комплекса S^{n-1}.

Пусть σ^i — i-мерный симплекс S^n и $\partial\sigma^i = \sum_{j=0}^{i}(-1)^j\sigma^i(j)$ есть его граница. Положим

$$\bar{\varkappa}_i(\sigma^i) = \begin{cases} \gamma_i(\varkappa_i(\sigma^i)) & \text{, если } \sigma^i \notin S^{n-1}, \\ \varkappa_i(\sigma^i) - (-1)^k s_{i-1}(\varkappa_{i-1}(\sigma^i(k))), & \text{если } \sigma^i \cap S^{n-1} = \sigma^i(k), \\ \varkappa_i(\sigma^i) & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

$$D_i(\sigma^i) = \begin{cases} -s_i(\varkappa_i(\sigma^i)) & \text{, если } \sigma^i \notin S^{n-1}, \\ 0 & \text{, если } \sigma^i \in S^{n-1}, \end{cases}$$

где γ_i и s_i — гомоморфизмы, определенные в лемме 1.

Проверим, что $\bar{\varkappa}_i$ и D_i удовлетворяют условиям а,..., в леммы 2.

Пусть $\sigma^i \notin S^{n-1}$, тогда $\partial D_i\sigma^i + D_{i-1}\partial\sigma^i = -\partial s_i(\varkappa_i(\sigma^i)) - s_{i-1}(\varkappa_i(\partial\sigma^i))$. Если $\sigma^i \cap S^{n-1} = \sigma^i(k)$, то $\partial D_i\sigma^i + D_{i-1}\partial\sigma^i = (-1)^{k+1}s_{i-1}(\varkappa_{i-1}(\sigma^i(k)))$. $\bar{\varkappa}_i(\sigma^i) - \varkappa_i(\sigma^i) = \varkappa_i(\sigma^i) - (-1)^k s_{i-1}(\varkappa_{i-1}(\sigma^i(k)) - \varkappa_i(\sigma^i)$.

Если σ^i пересекается с S^{n-1} наиболее по $(i-2)$-мерную грань, то $\partial D_i\sigma^i + D_{i-1}\partial\sigma^i = 0$ и $\bar{\varkappa}_i(\sigma^i) - \varkappa_i(\sigma^i) = 0$. То, что $\bar{\varkappa}_i$ цепное отображение, непосредственно следует из равенства $\partial D_i + D_{i-1}\partial = \bar{\varkappa}_i - \varkappa_i$. Итак условие а. леммы 2 выполнено.

Проверим условие б. Если $\sigma^i \in S^{n-1}$, то $\alpha_i\bar{\varkappa}_i(\sigma^i) = \varkappa_i\gamma_i(\varkappa_i(\sigma^i)) = \gamma_i(\varkappa_i(\alpha_i(\sigma^i))) = \varkappa_i(\alpha_i(\sigma^i))$. Если $\sigma^i \cap S^{n-1} = \sigma^i(k)$, где $\partial\sigma^i = \sum(-1)^k\sigma^i(k)$, то $\alpha_i\bar{\varkappa}_i(\sigma^i) = \alpha_i(\varkappa_i(\sigma^i) - (-1)^k s_{i-1}(\varkappa_{i-1}(\sigma^i(k)))) = \bar{\varkappa}_i(\alpha_i(\sigma^i))$,
так как $\alpha_i(\sigma^i) \cap S^{n-1} = \alpha_i(\sigma^i(k))$.

Наконец, если σ^i пересекает S^{n-1} наиболее по $(i-2)$-мерную грань, тогда $\bar{\varkappa}_i(\sigma^i) = \varkappa_i(\sigma^i)$. Этим б. проверено.

Условие в., очевидно, выполнено. Лемма 2 — доказана.

Теперь рассмотрим два случая:

I. Когда $\alpha: S^n \to S^n$ есть симметрия относительно центра S^n.

II. Когда $\alpha = S^n \to S^n$ есть симметрия относительно подпространства R^k, где $k \geqq 1$.

Случай I. $\alpha : S^n \to S^n$, $\alpha(x) = -x$, т. е. α есть ортогональная инволюция без неподвижных точек.

Лемма 3. Пусть $\rho_*: C_*(S^n) \to C_*(S^n)$ — цепное отображение, удовлетворяющее условиям:

а. $\rho_*\alpha_* = \alpha_*\rho_*$.

б. Если a — вершина S^n, то $\rho_0(a)$ — вершина S^n. Тогда $\deg \rho_* \equiv 1 \pmod 2$.

Пусть $n = 1$. Рассмотрим цепное отображение ρ_* и предположим, что $\rho_* C_*(S^0) \subset C_*(S^0)$, и пусть, например, $\rho_0(0) = 0$. Здесь $S^0 = \{0, 1\}$. Сфера S^0 разбивает S^1 на две полуокружности D_1^1 и D_2^1. Ввиду выбора триангуляции S^1 полуокружности D_1^1 и D_2^1 суть подкомплексы. Рассмотрим их как одномерные цепи и пусть $\partial D_1^1 = 1 - 0$, $\partial D_2^1 = 0 - 1$. Имеем $\partial\rho_1(D_1^1) = \rho_0(\partial D_1^1) = 1 - 0$, следовательно, $\rho_1(D_1^1) = pS^1 + D_1^1$ или $\rho_1(D_1^1) = pS^1 - D_2^1$, где p — целое число. В случае, когда $\rho_1(D_1^1) = pS^1 + D_1^1$, получаем $\rho_1(D_2^1) = \rho_1(\alpha_1(D_1^1)) = pS^1 + D_2^1$. В случае $\rho_1(D_1^1) = pS^1 - D_2^1$ получаем $\rho_1(D_2^1) = pS^1 - D_1^1$. Следовательно, $\rho_1(D_1^1 + D_2^1) = (2p \pm 1)(D_1^1 + D_2^1)$, т. е. $\deg \rho_* \equiv 1 \pmod 2$. То же самое получаем и когда $\rho_0(0) = 1$.

Если $\rho_* C_*(S^0)$ не есть подкомплекс $C_*(S^0)$, то к цепному отображению ρ_* применим леммы 3: существует цепное отображение $\tilde{\rho}_*: C_*(S^1) \to C_*(S^1)$ следующими свойствами:

1. $\tilde{\rho}_* C_*(S^0) \subset C_*(S^0)$.

2. ρ_* и $\tilde{\rho}_*$ — гомотопны.

3. $\tilde{\rho}_*$ коммутирует с α_*.

Из 1 и 3 получаем $\deg \tilde{\rho}_* \equiv 1 \pmod 2$, и из 2 имеем $\deg \rho_* = \deg \tilde{\rho}_*$. Лемма доказана для $n = 1$.

Предположим, что лемма доказана для $n \leqq i-1$. Докажем ее для $n = i$.

Сфера S^{i-1} разбивает S^i на две полусферы D_1^i и D_2^i. Ввиду выбора триангуляции S^{i-1}, D_1^i, D_2^i суть подкомплексы S^i. Будем рассматривать их как i-мерные цепи и пусть $\partial D_1^i = S^{i-1}$, а $\partial D_2^i = -S^{i-1}$. Здесь S^{i-1} рассматриваем как $(i-1)$-мерную цепь. Здесь имеем две возможности: либо $\alpha_i(D_1^i) = -D_2^i$, либо $\alpha_i(D_1^i) = \xi D_2^i$ (это зависит от четности и нечетности i).

Предположим, что $\rho_* C_*(S^{i-1}) \subset C_*(S^{i-1})$. Имеем $\partial \rho_i(D_1^i) = l \cdot S^{i-1}$, где l — целое число, равное $\deg \rho_* S^{i-1}$. Следовательно, $\rho_i(D_1^i) = pD_1^i + qD_2^i$, где p и q — целые числа и $l = p - q$. Напомним, что по индуктивному предположению число l — нечетно. Имеем $\rho_i(D_2^i) = pD_2^i + qD_1^i$. Следовательно, $\rho_i(D_1^i + D_2^i) = (p+q)(D_1^1 + D_2^1)$, т. е. $\deg \rho_* = p + q$. Так как $p - q \equiv 1 \pmod 2$, то $\deg \rho_* = p + q \equiv p - q \pmod 2 \equiv 1 \pmod 2$.

Если $\rho_* C_*(S^{i-1})$ не есть подкомплекс $C_*(S^{i-1})$, то к цепному отображению ρ^* применим леммы 2 и получим цепное отображение $\tilde{\rho}_* : C_*(S^i) \to C_*(S^i)$, которое гомотопно ρ_* и коммутирует с α_*, и $\tilde{\rho}^* C_*(S^{i-1}) \subset C_*(S^{i-1})$. Тогда ввиду верхних рассуждений имеем $\deg \tilde{\rho}_* \equiv 1 \pmod 2$ и из-за гомотопности ρ_* и $\tilde{\rho}_*$ получаем $\deg \rho_* \equiv 1 \pmod 2$. Тем самым лемма доказана.

Замечание. При помощи лемм 2 и 3 легко получить теорему Борсука о нечетности степени нечетного отображения, см. [7]. Действительно, пусть $f : S^n \to S^n$ непрерывное однозначное нечетное отображение, т. е. $f(x) = -f(-x)$ для любого $x \in S^n$. Докажем, что $\deg f$ нечетное число.

Лемма 4. Пусть $f : S^n \to S^n$ — непрерывное однозначное отображение и $\alpha : S^n \to S^n$ — ортогональная инволюция S^n. Если $f\alpha = \alpha f$, то существует цепное отображение $\varphi_* : C_*(S^n) \to C_*(S^n)$, удовлетворяющее следующим условиям:

1. $\deg \varphi_* = \deg f$.
2. $\varphi_* \alpha_* = \alpha_* \varphi_*$.
3. Если σ^0 — вершина τ, то $\varphi_0(\sigma^0)$ — вершина τ.
4. Если S^k — множество неподвижных точек инволюции α, то $\varphi_* C_*(S^k) \subset C_*(S^k)$.

Пусть ω — покрытие, составленное из главных звезд триангуляции τ, $\omega = \{\mathrm{St}(a_i, \tau)\}_i$. Рассмотрим покрытие $f^{-1}\omega = \{f^{-1}\mathrm{St}(a_i, \tau)\}_i$. Пусть τ_1 — столь мелкое барицентрическое подразделение τ, что любая главная звезда τ_1 содержится в некотором элементе $f^{-1}\omega$. Пусть $\omega_1 = \{\mathrm{St}(b_j, \tau_1)\}_j$ — покрытие, составленное из главных звезд триангуляции τ_1. Так как триангуляция τ инвариантна относительно инволюции α, а τ_1 есть барицентрическое подразделение τ и α есть ортогональное отображение, то τ_1 инвариантна относительно α. Пусть b_0 — вершина τ_1 и $\tilde{b}_0 = \alpha(b_0)$. Если выполнено $f\,\mathrm{St}(b_0, \tau_1) \subset \mathrm{St}(a_0, \tau)$, то будем иметь также $f\,\mathrm{St}(\tilde{b}_0, \tau_1) \subset \mathrm{St}(\alpha(a_0), \tau)$. Для вершин b_0 и $\tilde{b}_0$ фиксируем вершины a_0 и $\tilde{a}_0 = \alpha(a_0)$. При этом, если $b_0 \in S^k$, то $a_0 \in S^k$. Положим $\psi(b_0) = a_0$, $\psi(\tilde{b}_0) = \tilde{a}_0$; получаем симплициальное отображение триангуляции τ_1 в триангуляцию τ. Это симплициальное отображение индуцирует цепное отображение $\psi_* : C_*(S^n, \tau_1) \to C_*(S^n, \tau)$. Здесь мы просто применили стандартную конструкцию симплициальной аппроксимации непрерывного отображения.

Пусть, теперь, $\tau^{(1)}$ — первое барицентрическое подразделение триангуляции τ. Так как $\tau_1 = \tau^{(r)}$, где $\tau^{(r)}$ — r-ое барицентрическое подразделение, то пусть цепное отображение $\chi_* = \chi_*^r \ldots \chi_*^1$, где $\chi_*^{i+1} : C_*(S^n, \tau^{(i)}) \to C_*(S^n, \tau^{(i+1)})$ суть стандартные цепные отображения „ба-

рицентрическое подразделение", см. [1]. Имеем $\chi_* \alpha_* = \alpha_* \chi_*$, следовательно, χ_* коммутирует с α_*. Положим $\varphi_* = \psi_* \chi_*$; очевидно, φ_* удовлетворяет условиям леммы 4. Лемма доказана.

Пусть теперь $f: S^n \to S^n$ и $f(x) = -f(-x)$ для любого $x \in S^n$. Рассмотрим $\varphi_*: C_*(S^n) \to C_*(S^n)$ из леммы 4. Имеем $\deg \varphi_* = \deg f$, $\varphi_* \alpha_* = \alpha_* \varphi_*$ и если σ^0 — вершина τ, то $\varphi_0(\sigma^0)$ — вершина τ. Применяя к φ_* лемму 3, получаем $\deg \varphi_* \equiv 1 \pmod 2$. Тем самым $\deg f \equiv 1 \pmod 2$, и теорема Борсука об антиподах доказана.

Пусть X — компакт и Z_2 — группа вычетов по модулю два. Будем говорить, что X есть Z_2-пространство, если задано действие группы Z_2 в пространство X, т. е. дано непрерывное отображение $\mu: Z_2 \times X \to X$ такое, что следующие диаграммы коммутативны

$$\begin{array}{ccc} Z_2 \times Z_2 \times X & \xrightarrow{1 \times \mu} & Z_2 \times X \\ m \times 1 \downarrow & & \downarrow \mu \\ Z_2 \times X & \xrightarrow{\mu} & X \end{array}$$

Здесь $1 \times \mu(l_1, l_2, x) = (l_1, \mu(l_2, x))$, $(l_1, l_2, x) \in Z_2 \times Z_2 \times X$, $(m \times 1)(l_1, l_2, x) = ((l_1 \cdot l_2), x)$.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{e \times 1} & Z_2 \times X \\ & 1X \searrow \quad \swarrow \mu & \\ & X & \end{array}$$

Здесь
$(l \times 1)(x) = (l, x)$, где l — единица группы Z_2. Как обычно будем писать $\mu(g, x) = gx$.

Через $g(X)$ обозначим множество неподвижных точек действия Z_2 в пространстве X, т. е. $g(X) = \{x \in X: hx = x, \ \forall h \in Z_2\}$.

Пусть $F: X \to Y$ и X и Y суть Z_2-пространства. Отображение F будем называть Z_2-отображением, при условии, что

1. $F(hx) = hF(x)$ для любого $h \in Z_2$ и $x \in X$

2. Если $x \in g(X)$, то $F(x) \subset g(Y)$.

Отметим, что здесь F — многозначное отображение. Если F однозначное отображение, то условие 2 выполняется автоматически. Если для отображения F выполнено только условие 1, то для любой точки $x \in g(X)$ множество $F(x)$ должно быть инвариантным. Условие 2 дает, что в этом случае множество $F(x)$ поточечно инвариантно.

Задание Z_2-структуры в пространстве X иногда выражают, говоря, что в пространстве X действует инволюция.

Ниже в S^n фиксируем действия Z_2 заданием ортогональной инволюции в S^n.

Отображение $F: S^n \to S^n$ будем называть д о п у с т и м ы м, если су-

ществуют Z_2-пространства X_i и Z_2-отображения $G_i: X_i \to X_{i-1}$, удовлетворяющие следующим условиям:

1. $F = G_{s0} \circ \ldots \circ G_1$
2. G_i суть ациклические отображения, $i = 1, \ldots, s$.
3. $X_1 = S^n$, $X_{s+1} = S^n$ как Z_2—пространства.

Определим степень $\deg F$ отображения F равенством $G_{sn0} \circ \ldots \circ G_{1n}(\gamma_n) = \deg F . \gamma_n$; здесь $\gamma_n \in H_n(S^n)$ — фундаментальный класс гомологии сферы S^n. Отметим, что это определение зависит от представления F в виде суперпозиции ациклических отображений G_i.

Пусть ω — конечное открытое покрытие пространства X. Покрытие ω будем называть Z_2-покрытием, если для любого элемента $U \in \omega$ и всякого $h \in Z_2$ множество $h(U) \in \omega$. Множество Z_2-покрытий пространства X есть конфинальное подмножество в множестве всех открытых покрытий пространства X (порядок задается вписанности, см. [1], прибавление В). Обозначим через $\mathrm{Cov}(X)$ множество всех конечных и открытых покрытий пространства X. Нам будут нужны еще и покрытия пространства X, которые лучше связанны чем Z_2-покрытия с действием Z_2 в X. Это так называемые специальные покрытия, см. [1], прибавление В.

Пусть X есть Z_2-пространство. Напомним, что через $g(X)$ мы обозначили множество неподвижных точек действия Z_2.

Пусть $\omega = \{U_s\} \in \mathrm{Cov}(X)$ есть Z_2-покрытие. Будем называть ω специальным покрытием, при условии, что:

1. Если $U \in \omega$, то $h(U) \cap U \neq \varnothing$ для некоторого $h \in Z_2$ тогда и только тогда, когда $U \cap g(X) \neq \varnothing$, или $h = l$.

2. Если $U_i \in \omega$, $i = 0, \ldots, k$ и $\bigcap_{i=0}^{k} U_i \neq \varnothing$, $U_i \cap g(X) \neq \varnothing$, тогда $\bigcap_{i=0}^{k} U_i \cap g(X) \neq \varnothing$.

Пусть $\omega \in \mathrm{Cov}(X)$ и ω есть специальное покрытие. Рассмотрим нерв $N(\omega)$ покрытия ω. Так как ω есть Z_2-покрытие, то $N(\omega)$ есть Z_2-пространство. Так как ω есть специальное покрытие, то $N(\omega)$ есть Z_2-пространство, в котором множество неподвижных точек действия $g(N(\omega))$ есть замкнутый подкомплекс.

В [1], прибавление В, доказано, что множество всех специальных покрытий пространства X есть конфинальное множество в множестве $\mathrm{Cov}(X)$, т. е. для любого $\omega_1 \in \mathrm{Cov}(X)$ найдется специальное покрытие пространства ω_2, которое вписано в ω_1.

Пусть дано однозначное непрерывное отображение $f: A \to B$, где A и B — компакты. Отображение f будем называть n — Вьеториcовым, если

а. $f(A) = B$

б. для любого конечного и открытого покрытия $\omega \in \mathrm{Cov}(A)$ и любой точки $y \in B$ существует покрытие $P = P(\omega, y) \in \mathrm{Cov}(A)$, которое вписано в ω и такое, что любой k-цикл Вьеториса, принадлежащий $C_*(f^{-1}y, P)$ ограничивает в $C_*(f^{-1}y, \omega)$, где $0 \leqq k \leqq n$. Здесь $C_*(f^{-1}y, P)$ и $C_*(f^{-1}y, \omega)$ суть цепные комплексы P-цепей и ω-цепей Вьето-

риса пространства $f^{-1}y$, соответственно. Об определении цепей циклов и гомологии Вьеториса см. [3].

Если отображение $f: A \to B$ удовлетворяет следующему условию: для любой точки $y \in B$ множество $f^{-1}y$ есть ациклический компакт и $f(A) = B$, то будем говорить, что f есть Вьеторисовое отображение. В [3] доказано, что если f есть Вьеторисовое отображение, то f есть n-Вьеторисово для любого n. Это следует из того, что коэффициенты гомологии суть поле рациональных чисел. По этой причине мы пользуемся рациональными коэффициентами.

Введем некоторые обозначения. Если $\omega \in \mathrm{Cov}(X)$ и $M \subset X$, то через $\mathrm{St}(M, \omega)$ будем обозначать звезду множества M относительно ω. Через $^*\omega$ будем обозначать покрытие, звездно вписанное в ω, т. е. звезда любого элемента $^*\omega$ содержится в некотором элементе ω. Через $C_*(X, \omega)$ будем обозначать цепной комплекс всех Вьеторисовых ω-цепей, т. е. множество всех конечных линейных комбинаций с рациональными коэффициентами Вьеторисовых ω-симплексов. При этом Вьеторисовый симплекс σ^k называется ω-симплексом, если его вершины содержатся в некотором множестве, принадлежащем ω. Наконец, множество из $k+1$ точек $(a_0, a_1, \ldots, a_k)$ называется k-мерным симплексом Вьеториса.

Если X есть Z_2-пространство, то, очевидно, $C_*(X, \omega)$ есть векторное пространство над полем Z_2, если ω — Z_2-покрытие.

Пусть X есть Z_2-пространство, а ω и $^*\omega$ суть специальные покрытия пространства X, $^*\omega$ звездно вписано в покрытие ω. Через $N(\omega)$ и $N(^*\omega)$ обозначим нервы покрытий ω и $^*\omega$, соответственно, а через $C_*(N(\omega))$ и $C_*(N(^*\omega))$ — цепные комплексы данных триангуляций. Так как X есть Z_2-пространство, то $N(\omega)$ и $N(^*\omega)$ суть Z_2-пространства и действие Z_2 в $N(\omega)$ и $N(^*\omega)$ симплициально. Действительно, пусть U — вершина ω. Положим $hU = h(U)$. Так как ω есть Z_2-покрытие, то $h(U) \in \omega$. Тем же самым способом определяется действие Z_2 в пространстве $N(^*\omega)$. Так как эти действия симплициальны, то $C_*(N(\omega))$ и $C_*(N(^*\omega))$ суть векторные пространства над Z_2, т. е. в них действует линейно группа Z_2.

Так как $^*\omega$ звездно вписано в покрытие ω, то имеем проекцию $\pi(^*\omega, \omega): N(^*\omega) \to N(\omega)$. Это есть симплициальное соответствие, которое без ограничений общности можем считать Z_2-отображением.

Построим цепные отображения $\zeta_*: C_*(X, {}^*\omega) \to C_*(N(\omega)$ и $\eta_*: C_*(N(^*\omega)) \to C_*(X, \omega)$. Эти цепные отображения используются при доказательстве изоморфности гомологических функторов Александрова-Чеха и Вьеториса, см. [3].

Пусть σ^0 — вершина $C_*(X, {}^*\omega)$ и $\widetilde{\sigma}^0 = h\sigma^0$. Выберем элемент U, принадлежащий $^*\omega$, который содержит σ^0. Заметим, что $hU \in {}^*\omega$, и $hU \ni \sigma^0$. Пусть $V \in \omega$ и $V \supset \mathrm{St}(U, {}^*\omega)$, тогда $hV \supset \mathrm{St}(hU, {}^*\omega)$. Положим $\zeta_0(\sigma^0) = V$, $\zeta_0(\widetilde{\sigma}^0) = hV$. Для $\sigma^k = (a_0, \ldots, a_k)$ — k-мерного симплекса h цепного комплекса $C_*(X, {}^*\omega)$, положим

$$\zeta_k(\sigma^k) = \begin{cases} (\zeta_0(a_0), \ldots, \zeta_0(a_k)), & \text{если } (\zeta_0(a_0), \ldots, \zeta_k(a_k)) \text{ не вырождается;} \\ 0, & \text{если } (\zeta_0(a_0), \ldots, \zeta_k(a_k)) \text{ вырождается.} \end{cases}$$

Построенное цепное отображение коммутирует с действием Z_2 в $C_*(N(\omega))$ и $C_*(X, {}^*\omega)$. Кроме того, следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{array}{ccc} C_*(g(N(\omega))) & \longrightarrow & C_*(N(\omega)) \\ \uparrow \tilde{\eta}_* & & \uparrow \tilde{\eta}_* \\ C_*(g(X), {}^*\omega) & \longrightarrow & C_*(X, {}^*\omega) \end{array}$$

Здесь горизонтальные стрелки суть цепные отображения, индуцированные тождественным вложением.

Построим теперь цепное отображение η_*. Пусть U — вершина $N(^*\omega)$, $\tilde{U}=hU$, $h \in Z_2$. Если $a \in U$, $\tilde{a}=ha$, положим $\eta_0(U)=a$, $\eta_0(\tilde{U})=\tilde{a}$. Если $\sigma^k=(U_0,\ldots, U_k)$ — k-мерный симплекс $N(^*\omega)$, то $\eta_k(\sigma^k)=(\eta_0(U_0),\ldots, \eta_k(U_k))$. Цепное отображение η_* коммутирует с действием Z_2, и следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{array}{ccc} C_*(g(N(^*\omega))) & \longrightarrow & C_*(N(^*\omega)) \\ \eta_* \downarrow & & \downarrow \eta_* \\ C_*(g(X), \omega) & \longrightarrow & C_*(X, \omega) \end{array}$$

Здесь горизонтальные стрелки суть цепные отображения, индуцированные тождественными вложениями.

Лемма 5. Пусть X и Y суть Z_2-пространства, $f: X \to Y$ есть Z_2-отображение, которое является Вьеторисовым, а n — целое число. Для любых специальных покрытий $\omega \in \mathrm{Cov}(X)$ и $\nu \in \mathrm{Cov}(Y)$ существует специальное покрытие $Q=Q(\omega, \nu) \in \mathrm{Cov}(Y)$, которое вписано в ν и такое, что если B есть подмножество Y, содержащееся в некотором элементе Q, существует точка $y(B) \in Y$ такая, что

а. $\mathrm{St}(y(B), \nu) \supset B$.

б. $\mathrm{St}(f^{-1}(y(B)), {}^*P) \supset f^{-1}(y(B))$, здесь $P=P(\omega, y)$.

в. Если $U \in Q$ и $U \cap g(Y) \neq \varnothing$, то $y(U) \in g(Y)$.

г. Если $\tilde{B}=hB$, где $h \in Z_2$, то $y(\tilde{B})=hy(B)$.

Эта лемма доказывается, как лемма 1 в [3].

Так как отображение f — Вьеторисово, то оно и n-Вьеторисово. Пусть ${}^*P$ — звездно вписанное в P специальное покрытие пространства X и $A_y=X \setminus \mathrm{St}(f^{-1}(y), {}^*P)$. Рассмотрим систему множеств $\Gamma=\{A_y\}$. Если $A_y \in \Gamma$, то и $hA_y \in \Gamma$, где $h \in Z_2$, точнее $hA_y=A_{hy}$. Действительно, ввиду того, что f есть Z_2-отображение, мы выбираем $P(\omega, y)=P(\omega, h(y))$ и ${}^*P(\omega, y)={}^*P(\omega, h(y))$.

Множества A_y — замкнуты, следовательно, $f(A_y)$ — замкнуты. Так как $y \notin f(A_y)$, существует окрестность B_y точки y, не пересекающаяся с множеством $f(A_y)$ (и $g(Y)$, если $y \in g(Y)$). Пусть $B(_{hy})=hB_y$, где $h \in Z_2$.

Тем самым построено открытое Z_2-покрытие $\tilde{\Gamma}=\{B_y\}$ пространства Y. В покрытии $\tilde{\Gamma}$ впишем специальное покрытие $Q=Q(\omega, \nu)$.

Пусть $U \in Q$ и $B_{yu} \supset U$. Фиксируем для любого U B_{yu}, притом так, что $B_{yhu} = B_{hyu}$. Сопоставим множеству U точку $y(U) = y_u$. Заметим, что если $U \cap g(Y) \neq \varnothing$, то $B_{yu} \cap g(Y) \neq \varnothing$ и, следовательно, $y(U) \in g(Y)$.

Если теперь B содержится в некотором элементе покрытия Q, U, то положим $y(B) = y(U)$. Отметим, что если $B \cap g(Y) \neq \varnothing$, то $U \cap g(Y) \neq \varnothing$ и, следовательно, $y(B) = y(U) \in g(Y)$. Свойства а,..., г. леммы проверяются автоматически. Лемма доказана.

Точку $y(B)$ будем называть **сателлитом** множества B.

Лемма 6. Пусть X и Y суть Z_2-пространства, $f: X \to Y$ есть Вьеторисовое Z_2-отображение и n — целое число. Если для любого $y \in g(Y)$ имеем $f^{-1}(y) \subset g(X)$, то для любых покрытий $\omega \in \mathrm{Cov}(X)$ и $\nu \in \mathrm{Cov}(Y)$, где ω — вписано в $f^{-1}\nu$ существует специальное покрытие $R = R(\omega, \nu) \in \mathrm{Cov}(Y)$, вписанное в ν, и цепное отображение T_*, $(n+1)$ — остова $C_*(Y, R)$ в $C_*(X, \omega)$ со следующими свойствами:

1. Для любого k-симплекса σ^k, принадлежащего $C_*(Y, R)$, $0 \leqq k \leqq n+1$, цепь $\delta\, \sigma^k$ есть барицентрическое подразделение симплекса σ^k и носитель цепи $f T_k \sigma^k$ содержится в некотором элементе покрытия ν.

2. Цепное отображение T_* коммутирует с действием Z_2 в $C_*(Y, R)$ и $C_*(X, \omega)$.

3. Диаграмма

$$\begin{array}{ccc} C_*(g(Y), R) & \longrightarrow & C_*(Y, R) \\ T_* \downarrow & & \downarrow T_* \\ C_*(g(X), \omega) & \longrightarrow & C_*(X, \omega) \end{array}$$

коммутативна.

Здесь горизонтальные стрелки суть гомоморфизмы, индуцированными тождественными вложениями.

4. Если σ^0 — вершина $C_*(Y, R)$, то $T_0 \sigma^0$ — вершина $C_*(X, \omega)$. На самом деле, T_* зависит ω и ν, и иногда будем писать $T_* = T_*(\omega, \nu)$.

Доказательство этой леммы проводится таким же способом, как и доказательство леммы 2 из [3]. Опишем конструкцию T_*.

Пусть $\omega_{n+1} = \omega$ и $\nu_{n+1} = \nu$ и $Q_n = Q(\omega_{n+1}, {}^*\nu_{n+1})$, где ${}^*\nu_{n+1} \in \mathrm{Cov}(Y)$ есть специальное покрытие, звездно вписанное в ν_{n+1}. Пусть ${}^*Q_n$ принадлежит $\mathrm{Cov}(Y)$ и есть специальное покрытие, звездно вписанное в Q_n и $\nu_n = {}^*Q_n$. Рассмотрим элемент $q_{n,i}$ покрытия и Q_n, и пусть $\tilde{q}_{n,i} = hq_{n,i}$, $h \in Z_2$ — образующий элемент. Пусть $y(q_{n,i})$ и $y(\tilde{q}_{n,i}) = hy(q_{n,i})$ — сателлиты множеств $q_{n,i}$ и $\tilde{q}_{n,i}$, соответственно, построенные в лемме 5. Через $P(q_{n,i})$ обозначим специальное покрытие $P(\omega_{n+1}, y(q_{n,i})$, тогда $P(\omega_{n+1}, y(\tilde{q}_{n,i})) = P(\tilde{q}_{n,i}) = P(q_{n,i})$. Пусть ω_n есть специальное покрытие, вписанное в ${}^*P(q_{n,i})$ для любого i. Здесь ${}^*P(q_{n,i})$ — специальное покрытие, звездно вписанное в $P(q_{n,i})$, при этом ${}^*P(\tilde{q}_{n,i}) = {}^*P(q_{n,i})$.

Теперь, пусть $\{y(q_{n-1}, i)\}$ суть сателлиты элементов покрытия Q_{n-1}, где $Q_{n-1} = Q(\omega_n, {}^*\gamma_n)$; ${}^*\gamma_n$ — специальное покрытие, звездно вписанное в γ_n и $P(q_{n-1,i}) = P(\omega_n, y(q_{n-1,i}))$, при этом $P(hq_{n-1,i}) = P(\omega_n, y(q_{n-1,i}))$. Опять, как и наверху, ω_{n-1} есть специальное покрытие, звездно вписанное в ${}^*P(q_{n-1,i})$, а ${}^*P(q_{n-1,i})$ есть специальное покрытие, звездно вписанное в $P(q_{n-1,i})$.

Продолжая по индукции, мы получим последовательность специальных покрытий $\{\omega_k\}$ и $\{\gamma_k\}$ пространства X и Y, соответственно, и сателлиты $\{y(q_{k,i})\}$, удовлетворяющие следующим условиям:

1. $\gamma_{k-1} = {}^*Q_{k-1}$, $Q_{k-1} = Q(\omega_k, {}^*\gamma_k)$.
2. $\omega_{k-1} > {}^*P(\omega_k, y(q_{k-1,i}))$.
3. $\{y(q_{k,i})\}$ суть инвариантные множества и если $q_{k,i} \cap g(Y) \neq \varnothing$, то $y(q_{k,i}) \in g(Y)$.

Наконец получим покрытие γ_0. Утверждается, что γ_0 есть искомое специальное покрытие $R(\omega, \gamma)$.

Теперь построим $T_* = \{T_i\}_{i=0}^{n-1}$ (оно строится индукцией по остову $C_*(Y, R)$).

Пусть σ_0 есть нульмерный симплекс $C_0(Y, R)$ и $\widetilde{\sigma}^0 = h\sigma^0$. Выберем точку $\Sigma^0 \in f^{-1}(\sigma^0)$ и пусть $\widetilde{\Sigma}^0 = h\Sigma^0$. Так как f коммутирует с действием Z_2, то $\widetilde{\Sigma}^0 \in f^{-1}(\widetilde{\sigma}^0)$.

Положим $T_0(\sigma^0) = \Sigma^0$ и $T_0(\widetilde{\sigma}^0) = \widetilde{\Sigma}^0$. Заметим, что если $\sigma^0 \in g(Y)$, то по предположению $f^{-1}(\sigma^0) \subset g(X)$. Тем самым построено T_0. Для T_0 выполняются 1—4 леммы 6.

Предположим теперь, что T_* определено на всех симплексах $\sigma^m \in C_*(Y, R)$ для $m < k$ таким образом, что

а. $T_m(\sigma^m)$ есть цепь $C_*(X, \omega_m)$.

б. $f T_m \sigma^m$ есть барицентрическое подразделение $\delta\, \sigma^m$ симплекса σ^m и носитель цепи $f T \sigma^m$ содержится в некотором элементе γ_m.

в. T_m коммутирует с дифференциалами $C_*(Y, R)$ и $C_*(X, \omega_m)$.

г. T_m коммутирует с действием Z_2 в $C_*(Y, R)$ и $C_*(X, \omega_m)$.

д. Диаграмма

$$\begin{array}{ccc} C_m(g(Y), R) & \longrightarrow & C_m(Y, R) \\ \downarrow{\scriptstyle T_m} & & \downarrow{\scriptstyle T_m} \\ C_m(g(X), \omega_m) & \longrightarrow & C_m(Y, \omega_m) \end{array}$$

коммутативна.

Горизонтальные стрелки индуцированны тождественными вложениями.

Пусть теперь σ^k есть k-мерный симплекс $C_*(Y, R)$ и $\widetilde{\sigma}^k = h\sigma^k$. Через $\partial\sigma^k$ будем обозначать границу σ^k. Гомоморфизм T_* определен на $\partial\sigma^k$ и по предположению $T_{k-1}\,\partial\sigma^k$ есть цепь $C_*(X, \omega_{k-1})$, т. е. любой симплекс $T_{k-1}\,\partial\sigma^k$ содержится в некотором элементе покрытия ω_{k-1}. Так как $\sigma^k \in C_k(Y, R)$, то существует элемент $U_0 \in R$, содержащий σ^k; тогда $hU_0 = \widetilde{U}_0$ содержит $\widetilde{\sigma}^k$. Если σ^k принадлежит $C_k(g(Y), R)$, то $hU_0 = U_0$ ввиду того, что покрытие γ_0 — специально. Тогда $h\sigma^k = \sigma^k$.

Пусть $\partial\sigma^k=\Sigma\varepsilon_i\sigma_i^{k-1}$, тогда, так как $C_*(Y, R)$ есть Z_2-комплекс, $\partial\widetilde{\sigma}^k=\Sigma\varepsilon_i\widetilde{\sigma}_i^{k-1}$, где $\widetilde{\sigma}_i^{k-1}=h\sigma_i^{k-1}$. По предположению имеем $fT_{k-1}\sigma_i^{k-1}=\delta\sigma_i^{k-1}$, где $\delta\sigma_i^{k-1}$ — есть барицентрическое подразбиение симплекса σ_i^{k-1}, и при этом носитель $\delta\sigma_i^{k-1}$ содержится в некотором элементе ν_{k-1}. Так что $\mathrm{St}(U_0, \nu_{k-1})$ содержит $fT_{k-1}\partial\sigma^k$, аналогично, $\mathrm{St}(\widetilde{U}_0, \nu_{k-1})\supset fT\partial\widetilde{\sigma}^k$. Покрытие ν_0 вписано в покрытие ν_{k-1}, а $\nu_{k-1}={}^*Q_{k-1}$, так что $fT_{k-1}\partial\sigma^k$ содержится в некотором элементе $Q_{k-1}=Q(\omega_k,{}^*\nu_k)$, например, $q_{k-1,1}$ и $fT_{k-1}\partial\widetilde{\sigma}^k\subset hq_{k-1,1}$. Следовательно, имеем $\mathrm{St}(y(q_{k-1,1}), {}^*\nu_k)\supset fT_{k-1}\partial\sigma^k$ и $\mathrm{St}(f^{-1}(y(q_{k-1,1})), {}^*P(\omega_k, y(q_{k-1,1}))\supset T_{k-1}\partial\sigma^k$. Аналогично имеем $\mathrm{St}(hy(q_{k-1,1}), {}^*\nu_k)\supset fT_{k-1}\partial\widetilde{\sigma}^k$ и $\mathrm{St}(f^{-1}(hy(q_{k-1,1})), {}^*P(\omega_k, y(q_{k-1,1}))\supset T_{k-1}\partial\widetilde{\sigma}^k$.

Если $\sigma^k\in C_*(g(Y), R)$, то $\sigma_i^{k-1}\in(g(Y), R)$ ввиду того, что покрытие R — специально и тогда носитель $fT_{k-1}\partial\sigma^k$ есть множество, пересекающееся с $g(Y)$. Следовательно, $q_{k-1,1}\cap g(Y)\neq\varnothing$ и, тем самым, $y(q_{k-1,1})\in g(Y)$. Теперь построим, как это сделал Бигл, и $T_k\sigma^k$ и $T_k\widetilde{\sigma}^k$.

Обозначим симплициальный комплекс, составленный из всех симплексов цепи $T_{k-1}\partial\sigma^k$, через Z_{k-1}. Определим симплициальные отображения $\mu: Z_{k-1}\times I\to X(P(\omega_k, y(q_{k-1,1}))$.

Напомним, что $Z_{k-1}\times I$ есть цилиндр над Z_{k-1}, а $X(P(\omega_k, y(q_{k-1,1}))$ есть симплициальный комплекс, составленный из всех $P(\omega_k, y(q_{k-1,1}))$ симплексов пространства X. Призма $Z_{k-1}\times I$ рассматривается с стандартной триангуляцией.

Пусть A — вершина Z_{k-1}, т. е. $A\times 0$ есть вершина основания $Z_{k-1}\times I$. Положим $\mu(A\times 0)=A$.

Пусть $A'\in Z_{k-1}\times 1$, $A'=A\times 1$, где A — вершина Z_{k-1}, т. е. A' есть вершина $Z_{k-1}\times I$, лежащая над вершиной $A\times 0$.

Так как $\mathrm{St}(f^{-1}(y(q_{k-1,1})), {}^*P(\omega_k, y(q_{k-1,1}))\supset T_{k-1}\partial\sigma^k$, то существует множество U, принадлежащее ${}^*P(q_{k-1,1})$, которое пересекает $f^{-1}(y(q_{k-1,1}))$ и содержит A. Тогда пусть $\mu(A')$ есть точка, принадлежащая $U\cap f^{-1}(y(q_{k-1,1}))$.

Если $\sigma^k\in C_*(g(Y, R))$, то $y(q_{k-1,1})\in g(Y)$, и тогда $f^{-1}(y(q_{k-1,1}))\subset g(X)$, следовательно, $\mu(A')\in g(X)$.

Пусть теперь $\sigma^k=(A_0,\ldots, A_i, A_i',\ldots, A_{k'-1})$ есть k-мерный симплекс $Z_{k-1}\times I$. Положим $\mu(\sigma^k)=(A_0,\ldots, A_i;\ \mu(A_i'),\ldots, \mu(A_{k'-1}))$. Легко проверяется, что $\mu(A_0,\ldots, A_i, A_i',\ldots, A_{k'-1})$ суть симплексы в $X(P(\omega_k, y(q_{k-1,1}))$. Рассмотрим, куда отображается при μ верхнее основание $Z_{k'-1}=Z_{k-1}\times 1$. Имеем, что $\mu(Z_{k'-1})$ есть цикл в $C_*(f^{-1}(y(q_{k-1,1})), P(\omega_k, y(q_{k-1,1}))$. Из конструкции покрытия $P(\omega_k, y(q_{k-1,1}))$ следует, что $\mu(Z_{k'-1})$ ограничивает в $C_*(f^{-1}(y(q_{k-1,1}), \omega_k)$. Пусть Σ_2^k есть k-мерная цепь в $C_*(f^{-1}(y(q_{k-1,1}), \omega_k)$, такая, что $\partial\Sigma_2^k=\mu(Z_{k'-1})$. Симплициальное отображение μ отображает призму над цепью $T_{k-1}\partial\sigma^k$ в цепь Σ_1^k. Пусть $T_k\sigma^k=\Sigma_2^k-\Sigma_1^k$, и $T_k\widetilde{\sigma}^k=hT_k\sigma^k$, $\widetilde{\sigma}^k=h\sigma^k$.

Свойства 1, 2 леммы 6 проверяются, как в доказательстве леммы 2 из [3]. Посмотрим, выполнено ли 3. Пусть $\sigma^k\in C_*(g(Y), R)$ и $\sigma^k=(A_0,\ldots,$

A_k); тогда $\mu(A_i^1) \in g(X)$ и, следовательно, симплекс $(\mu(A_0'), \ldots, \mu(A_k'))$ принадлежит $C_k(g(X), P(y(q_{k-1,1}), \omega_k)$. Тогда Σ_2^k будет принадлежать $f^{-1}(y(q_{k-1,1}))$, а последнее содержится в $g(X)$. Цепь Σ_1^k тоже принадлежит $g(X)$, тем самым $T_k\sigma^k$ принадлежит $g(X)$. Лемма доказана.

Лемма 7. Пусть $F: S^n \to S^n$ есть Z_2-допустимое отображение и S_k — множество неподвижных точек инволюции γ в S^n. Существует цепное отображение $\varkappa_*: C_*(S^n) \to C_*(S^n)$, удовлетворяющее следующим условиям:

а. $\varkappa_*$ коммутирует с α_*.

б. $\deg \varkappa_* = \deg F$.

в. $\varkappa_* C_*(S^k) \subset C_*(S^k)$, если $k \geqq 0$.

г. $\deg \varkappa_* \; S^k = \deg F \; S^k$, если $k \geqq 0$.

д. Если σ^0 — вершина S^n, то $\varkappa_0(\sigma^0)$ — вершина S^n.

Напомним, что α_* — цепное отображение, индуцированное инволюцией α.

Так как F есть Z_2 — допустимо, то $F = G_{s_0} \ldots_0 G_1$. Здесь достаточно рассмотреть случай $s = 2$.

Итак, пусть $F = G_2 . G_1$ и $G_1: S^n \to X$, $G_2: X \to S^n$ суть ациклические отображения. Кроме того X есть Z_2-пространство и G_1, G_2 суть Z_2-отображения. Последнее означает, что G_1 и G_2 коммутируют с действием Z_2 и $G_1(S^k) \subset g(X)$, $G_2(g(X)) \subset S^k$.

Пусть $\Gamma(G_i)$ — график отображения G_i, $i = 1,2$. В $\Gamma(G_1)$ и $\Gamma(G_2)$ рассмотрим следующее действие Z_2. Пусть $(x, y) \in \Gamma(G_1)$, тогда $U(x, y) = (hx, hy)$. Аналогично, если $(U, V) \in \Gamma(G_2)$, то $h(u, v) = (hu, hv)$.

Рассмотрим проекции $p_1: \Gamma(G_1) \to S^n$, $q_1: \Gamma(G_1) \to X$, $p_2: \Gamma(G_2) \to X$ $q_2: \Gamma(G_2) \to S^n$ — индуцированные естественными проекциями $X \times S^n$, $S^n \times X$ на множители. Легко проверятся, что p_i и q_i суть Z_2-отображения, т. е. они коммутируют с действием Z_2 и $p_1^{-1}(S^k) \subset g(X)$, $p_2^{-1}(g(X)) \subset g(\Gamma(G_1))$, $q_1(g\,\Gamma(G_1)) \subset g(X)$, $q_2(\Gamma(G_2)) \subset S^k$. Отображения p_1 и p_2 суть Вьеторисовые отображения, а q_i суть непрерывные однозначные отображения, $i = 1,2$.

Пусть τ рассматриваемая ранее триангуляция сферы S^n и $\tau^{(1)}$ ее первое барицентрическое подразделение. Через ρ_0 обозначим покрытие S^n, составленное из главных звезд триангуляции τ, а через ρ_1 покрытие, составленное из главных звезд триангуляции $\tau^{(1)}$. Пусть $\delta(\rho_1)$ — число Лебега покрытия ρ_1. Пространство $\Gamma(G_2)$ — компакт, так как G_2 — полунепрерывное сверху. Следовательно, существует такое специальное покрытие ω, что если U есть элемент ω, то $q_2(U)$ имеет диаметр меньше $\delta(\rho_1)$.

Пусть ν есть такое специальное покрытие X, что ω вписано в $p_2^{-1}(\nu)$. Рассмотрим отображение $p_2: \Gamma(G_2) \to X$, покрытия ω, ν и числа n. Применим лемму 6: существует специальное покрытие $R = R(\omega, \nu)$ пространства X, вписанное в ν, и цепное отображение $(n+1)$ — мерного остова $C_*(X, R)$ $T_*: C_*(X, R) \to C_*(\Gamma(G_2), \omega)$, удовлетворяющие условиям леммы 6.

Пространство $\Gamma(G_1)$ — компактно, следовательно, существует специальное покрытие ω_1 такое, что если V есть элемент ω_1, то $q_1(V)$ содержится в некотором элементе R.

Пусть $\tau^{(r)}$ — r-ое барицентрическое подразделение τ и ρ_r покрытие, составленное из главных звезд $\tau^{(r)}$.

Рассмотрим, теперь, отображение $p_1:\Gamma(G_1)\to S^n$, покрытия ω_1, ρ_1 и число n. Применив лемму 6, получаем покрытие $\widetilde{R}=R(\omega_1, \rho_1)$, вписанное в ρ_1, и цепное отображение $\widetilde{T}_*$, $(n+1)$ остова $C_*(S^n, \widetilde{R})$, $\widetilde{T}_*: C_*(S^n, \widetilde{R})\to C_*(\Gamma(G_1), \omega_1)$.

Опять через q_1 и q_2 обозначим цепные отображения $q_1: C_*(\Gamma(G_1), \omega_1)\to C_*(X, R)$, $q_2: C_*(\Gamma(G_2), \omega)\to C_*(S^n, \rho_1)$, индуцированные непрерывными отображениями q_1 и q_2, соответственно. Пусть $\tau^{(l)}$ столь мелкое барицентрическое подразделение τ, что покрытие, составленное из главных звезд τ^l, вписано в $\widetilde{R}$. Через $\chi_*: C_*(S^n)\to C_*(S^n, \tau^{(l+1)})$ обозначим цепное отображение „$(l+1)$-ое барицентрическое подразделение цепей". Пусть $\zeta_*: C_*(S^n, \tau^{(l+1)})\to C_*(S^n, \widetilde{R})$ и $\eta_*: C_*(S^n, \rho_1)\longrightarrow C_*(S^n)$ суть ранее построенные отображения. Здесь $C_*(S^n, \tau^{(l+1)}$ — цепной комплекс триангуляции $\tau^{(l+1)}$. Положим $\varkappa_*=\eta_* q_2 T_* q_1 \widetilde{T}_* \zeta_* \chi_*$.

Проверим, что $\varkappa_*$ удовлетворяет условиям леммы. $\varkappa_*$ есть цепное отображение — как суперпозиция цепных отображений; $\varkappa_*$ коммутирует с α_*, так как отображения, из которых составлено, коммутируют с α_*. Если σ^0 — вершина S^n, то $\varkappa_0(\sigma^0)$ — вершина S^n, так как этим свойством обладают T_* и $\widetilde{T}_*$.

Проверим, что выполняется условие в. леммы. Пусть $\sigma^i\in C_*(S^k)$ есть i-мерный симплекс. Тогда $\chi_i(\sigma^i)$ есть цепь, чьи симплексы лежат в σ^i. $\zeta_i\chi_i(\sigma^i)$ есть цепь Вьеториса и из построения ζ_i видим, что все симплексы этой цепи лежат в S^k. Для цепи $\widetilde{T}_i\zeta_i q_i(\sigma^i)$ — все ее симплексы лежат в $g(\Gamma(G_1))$, см. б. леммы 5. Дальше ввиду того, что q_1 коммутирует с α_*: $\backslash q_1\widetilde{T}_i\zeta_i\chi_i(\sigma^i)\subset g(X)$. Опять из б. леммы 5 получаем, что $T_i q_1\widetilde{T}_i\zeta_i\chi_i(\sigma^i)$ есть цепь пространства $g(\Gamma(G_2))$ и наконец $\chi_i(\sigma^i)$ есть цепь пространства S^k.

Обратим внимание на то, что $\varkappa_*$ S^k можно рассматривать как цепное отображение, полученное конструкцией $\varkappa_*$, примененной к отображению F S^k. Если теперь нами доказано, что $\deg F=\deg\varkappa_*$, то из верхнего замечания получим $\deg\varkappa_*$ $S^k=\deg F$ S^k.

Проверим наконец, что $\deg F=\deg\varkappa_*$.

Степень $\varkappa_*$ определяется следующим образом. Пусть $\widetilde{\varkappa}_*: H_*(S^n)\to H_*(S^n)$ — гомоморфизм, индуцированный цепным отображением $\varkappa_*$. Тогда $\widetilde{\varkappa}_n(\gamma_n)=\deg\varkappa_*\cdot\gamma_n$. Пусть σ_n есть цикл, принадлежащий классу γ_n. Имеем $\varkappa_n(\sigma^n)=\eta_n q_2 T_n q_1\widetilde{T}_n\zeta_n\chi_n(\sigma^n)$. Вспомним подробнее определение $\deg F$. Имеем $F_n(\gamma_n)=\deg F\cdot\gamma_n$, где $F_n=G_{2n}\cdot G_{1n}$. Снова обратимся к [3]. Наверху в лемме 6 построили цепные отображения T_*, $\widetilde{T}_*$, η_*, ζ_*, χ_*, исходя из триангуляции τ. Теперь тем же самым способом по

строим цепные отображения T_*^i, $\widetilde{T}_*^i$, η_*^i ζ_*^i, χ_*^i, исходя из триангуляции $\tau^{(i)}$.

Пусть σ_n^i есть i-ое барицентрическое подразделение цикла σ_n. Рассмотрим $\{\zeta_n^i \chi_n^i(\sigma_n^i)\}_i$ — это цикл Вьеториса сферы S^n, чей гомологический класс есть γ_n. Рассмотрим теперь $\{\widetilde{T}_n^i \zeta_n^i \chi_n^i(\sigma_n^i)\}_i$. Применяя рассуждения из [3], § 5, получим, что $\{\widetilde{T}_n^i \zeta_n^i \chi_n^i(\sigma_n^i)\}_i$ есть цикл Вьеториса и притом такой, что его гомологический класс лежит в $p_{1n}^{-1}(\gamma_n)$. Потом $\{q_1 \widetilde{T}_n^i \zeta_n^i \chi_n^i(\sigma_n^i)\}_i$ есть цикл Вьеториса пространства X и его гомологический класс есть $G_{1n}(\gamma_n)$. $\{T_n^i q_1 \widetilde{T}_n^i \zeta_n^i \chi_n^i(\sigma_n^i)\}$ есть цикл Вьеториса пространства $\Gamma(G_2)$ и его гомологический класс есть $p_{2n}^{-1} G_{1n}(\gamma_n)$ и т. д. Циклы $\eta_n^s \cdot q_2 T_n^s q_1 \widetilde{T}_n^s \zeta_n^s \chi_n^s(\sigma_n^s)$, $s=i$, $i+1$, суть симплициальные циклы триангуляции $\tau^{(i)}$ и $\tau^{(i+1)}$ и они гомологичны в $C_*(S^n, \tau^{(i)})$. Эти симплициальные циклы имеют гомологический класс $\varkappa_*(\gamma_n)$. Тем самым лемма доказана.

Нам будет нужна еще одна лемма, которая относится к случаю II, когда инволюция α есть симметрия относительно пространства с положительной размерности.

Лемма 8. Пусть в S^n действует ортогональная инволюция $\alpha: S^n \to S^n$ и S^k — множество неподвижных точек α, $k \geqq 0$. Если цепное Z_2 — отображение $\rho_*: C_*(S^n) \to C_*(S^n)$ удовлетворяет условиям:

а. Если σ^0 есть вершина S^n, то $\rho_0(\sigma^0)$ — вершина S^n.

б. $\rho_* C_*(S^k) \subset C_*(S^k)$,

то $\deg \rho_* \equiv \deg \rho_* \mid S^k \pmod 2$.

Сфера S^{n-1} разбивает S^n на полусферы D_1^n и D_2^n. Будем считать, что $\partial D_1^n = S^{n-1}$, $\partial D_2^n = -S^{n-1}$, и будем рассматривать D_1^n и D_2^n как n-мерные цепи. Из леммы получаем, что без ограничения общности можем считать, что $\rho_* C_*(S^{n-1}) \subset C_*(S^{n-1})$. Имеем $\rho_n(D_1^n) = p D_1^n + q D_2^n$, где p и q — целые числа. Из этого получаем $\rho_n(D_2^n) = p D_2^n + q D_1^n$, следовательно, $\deg \rho_* = p + q$. Имея в виду, что $\rho_{n-1}(S^{n-1}) = (p-q) S^{n-1}$, получаем $\deg \rho_* \mid S^{n-1} \equiv \deg \rho_* \pmod 2$. Если $n-1=k$, лемма доказана. Если $n-1>k$, мы к $\rho_* \mid S^{n-1}$ применим верхние рассуждения и получим $\deg \rho_* \mid S^{n-1} \equiv \deg \rho_* \mid S^{n-2} \pmod 2$.

Заметим, что если $k=0$, тогда $S^k = \{0, 1\}$ и степень $\rho_* \mid S^0$ определяется следующим образом. Рассмотрим приведенную группу гомологии $\widetilde{H}_0(S^0)$; если $1-0$ есть ее образующая, то $\deg \rho_* / S^0 \xi = \rho_0(1-0)$.

Замечания.

Пусть $\alpha: S^n \to S^n$ есть ортогональная инволюция и S^k множество неподвижных точек α, $k \geqq 0$. Если $f: S^n \to S^n$ непрерывное однозначное отображение, которое коммутирует с α, то $\deg f \equiv \deg f \mid S^k \pmod 2$.

Это предложение легко доказывается путем сведения к лемме 8. Для этой цели нужно построить симплициальную аппроксимацию $\widetilde{f}$ отображения f, которая коммутирует с α. Это сделано в лемме 4.

Применив эту лемму, получим цепное отображение $\tilde{f}_*$ со следующими свойствами:

а. $\deg \tilde{f}_* = \deg f$, $\deg \tilde{f}_* \mid S^k = \deg f \mid S^k$.

б. $\tilde{f}_* C_*(S^k) \subset C_*(S^k)$.

в. $\tilde{f}_* \alpha_* = \alpha_* \tilde{f}_*$.

г. Если σ^0 — вершина S^n, то $\tilde{f}_0(\sigma^0)$ — вершина S^n.

Теперь, применив к $\tilde{f}_*$ леммы 3, получаем, что

$$\deg f = \deg f \mid S^k \pmod 2.$$

Предложение I'. Пусть в S^n фиксированно ортогональное действие Z_2 и $F: S^n \to S^n / Z_2$ допустимое отображение. Если S^k множество неподвижных точек действия Z_2, то имеем $\deg F = 1 \pmod 2$ в случае $k = -1$ и $\deg F = \deg F \mid S^k \pmod 2$ в случае $k \geq 0$.

Применим к отображению F лемму 7. Получаем цепное отображение $\varkappa_*: C_*(S^n) \to C_*(S^n)$, удовлетворяющее условиям а) — д) этой леммы.

Рассмотрим теперь случай $k = -1$. Из леммы 3 следует, что $\deg \varkappa_* = 1 \pmod 2$ и так как $\deg F = \deg \varkappa_*$, то $\deg F = 1 \pmod 2$.

Если $k \geq 0$, то применим леммы 8 и получим, что $\deg \varkappa_*$ равна по модулю два $\deg \varkappa_* \mid S^k$. Ввиду того, что $\deg F \mid S^k = \deg \varkappa_* \mid S^k \pmod 2$ и $\deg F = \deg \varkappa_*$, то $\deg F = \deg F \mid S^k \pmod 2$. Предложение доказано.

Замечание. Пусть $G: A \to B$ — полунепрерывное сверху многозначное отображеиие. Будем говорить, что G — компактно, если

а. $G(x)$ есть компакт для любого $x \in A$.

б. $G(A) \subset K \subset B$, и K — компакт.

Лемма 7 и предложение I' справедливы в предположении, что отображение $F = G \circ_0 \ldots \circ_0 G_1$, где $G_1: X_i \to X_{i+1}$ есть компактное ациклическое Z_2-отображение, т. е. не требуя компактности пространства X_2, а заменяя ее компактности отображения. Доказательства проводятся почти без изменений.

Теперь будем рассматривать полунепрерывное сверху отображение $F: S^n \to R_0^{n-1}$, которые коммутируют с симметрией α относительно центра R^{n-1}. При этом $R_0^{n-1} = R^{n-1} \setminus \{0\}$, где 0 — нуль пространства R^{n-1}. Отображение F будем называть Z_2-допустимым, если существуют Z_2-пространства X_i и ациклические Z_2-отображения $G_i = X_i \to X_{i-1}$, $i = 1, \ldots, s$, такие, что:

а. X_i — компакты для $1 \leq i \leq s-1$, $X_1 = S^n$ и $X_s = R^{n-1}$ как Z_2-пространства. В S^n действует симметрия α.

б. $F = G_s \circ_0 \ldots \circ_0 G_1$.

Следствия:

1. Пусть $F: S^n \to R_0^{n-1} / Z_2$ допустимое отображение. Тогда $\deg F = 1 \pmod 2$.

Степень отображения F определяется следующим образом. Пусть $i: S^n \to R_0^{n+1}$ — тождественное вложение и $i_*(\gamma_n) = \bar{\gamma}_n \in H_n(R_0^{n+1})$ тогда $F_n(\gamma_n) = G_{sn\,0\ldots0}\, G_{1n}(\gamma_n) = \deg F \cdot \gamma_n$.

Докажем следствие 1. Существуют числа $0 < r < 1 < R$, такие, что если $K^{n+1} = \{x \in R^{n+1} : r \leqq x \leqq R\}$, то $F(S^n) \subset K^{n+1}$. Пусть $j: S^n \to K^{n+1}$ тождественное вложение и $\tilde{\gamma}_n = j_n(\gamma_n)$, где $j_* = \{J_n\} = H_*(S_n) \to H_*(K^{n+1})$ гомоморфизм, индуцированный j. Если $k: K^{n+1} \to R_0^{n+1}$ — тождественное вложение, то $k_n(\tilde{\gamma}_n) = \bar{\gamma}_n$. Рассмотрим еще и $\pi: K^{n+1} \to S_n$ $\pi(x) = \frac{x}{x}$, $x \in K^{n+1}$. Имеем $\pi_n(\bar{\gamma}_n) = \gamma_n$. Пусть $\Phi: S^n \to S^n$ определено следующим образом $\Phi(x)$ $\pi F(x)$, для $x \in S^n$. Отображение $\Phi - Z_2$ — допустимо, следовательно, из предложения I имеем $\deg \Phi \equiv 1 \pmod 2$, где $\Phi_n(\gamma_n) = \deg \Phi \cdot \gamma_n$. При этом имеем

$$\Phi_n(\gamma_n) = \pi_n k_n F_n(\gamma_n) = \pi_n k_n \deg F \cdot \tilde{\gamma}_n = \deg F \cdot \pi_n(\tilde{\gamma}_n) = \deg F \cdot \gamma_n,$$

т. е. $\deg F = \deg \Phi$. Следствие I доказано.

2. Не существует Z_2 — допустимое отображение $F: S^n \to R_0^k$, $k \leqq 0$. Здесь $R_0^k = R^n \setminus \{0\}$, а 0 — нуль пространства R^k.

Пусть $B^{n+1} = \{x \in R^{n+1} : x \leqq 1\}$.

3. Пусть $\psi: B^{n+1} \to R^{n+1} - Z_2$ — допустимое отображение, $F = \psi / S^n$: $S^n \to R^{n+1}$ и $F(x) = -F(-x)$ для любого $x \in S^n$. Существует точка $z_0 \in B^{n+1}$, такая, что $z_0 \in \psi(z_0)$.

Ради простоты ограничимся случаем ациклических отображений. Предположим противное, т. е. для любой точки $z \in B^{n+1}$ имеем $z \bar{\in} \psi(z)$. Рассмотрим отображение $\varphi: S^n \to R_0^{n+1}$, где $\varphi(x) = x - F(x)$, если $x \in S^n$. Здесь $R_0^{n+1} = R^{n+1} - \{0\}$. Отображение φ — полунепрерывно сверху, ациклично и любой точке $x \in S^n$ ставит в соответствие компакт $\varphi(x)$. Кроме того, $\varphi\alpha = \alpha\varphi$. Из следствия 1 получаем, что $\deg \varphi \equiv 1 \pmod 2$. Покажем, что $\deg \varphi = 0$, и тем самым получим противоречие.

Определим гомотопию $p: S^n \times I \to R_0^{n+1}$, где $p(x, t) = \varphi(tx)$. Отображение p — полунепрерывное сверху, ациклическое и точкам $S^n \times I$ ставит в соответствие компакты. Имеем $p(x, 1) = \varphi(x)$, $p(x, 0) = \varphi(0) = \theta(x)$, где $\theta: S^n \to R_0^{n+1}$, $\theta(x) = \varphi(0)$. Итак, мы получили, что φ и θ — гомотопны, следовательно, $\deg \theta = \deg \varphi$. Легко проверяется, что $\deg \theta = 0$. Следствие 3 доказано.

Рассмотрим бесконечномерный случай. Для простоты мы ограничимся пространствами Гильберта. Отметим, что проводимые ниже конструкции и рассуждения имеют место и в классе отделимых локально выпуклых топологических векторных пространств, но формулировки несколько усложняются.

Итак, пусть H — пространство Гильберта, $H_0 = H \setminus \{0\}$, где 0 — нуль пространства H. Через S обозначим единичную сферу, а через B

единичный шар пространства, т. е. $S=\{x \in H: \|x\|=1\}$, $B=\{x \in H : \|x\| \leq 1\}$.

Нам будут нужны несколько определений и обозначений.

Пусть $\alpha: H \to H$ — ортогональная инволюция пространства H и $g(H)$ — множество неподвижных точек α. Так как инволюция α — ортогональна, то α является ортогональной симметрией относительно пространства $g(H)$. Кроме того, α действует и на S и H_0. Будем их рассматривать как Z_2 — пространства, снабженными инволюцией α.

Пусть $\Phi: S \to H_0$ — вполне непрерывное ациклическое векторное поле на S. Напомним определения степени $\deg \Phi$ отображения Φ, см. [4].

Так как Φ — вполне непрерывное векторное поле, то $\Phi = I - F$, где $F: S \to H$ — компактное полунепрерывное сверху и ациклическое отображение, и множество $\Phi(S)$ — замкнуто в H. Пусть $\varepsilon = \min \|z\|$, $z \in \Phi(S)$, ε — положительное число, и K — компакт в H, содержащий $F(S)$. Рассмотрим однозначное непрерывное $\mu: K \to R^{n+1}$, для которого имеем $\|x - \mu(x)\| < \frac{\varepsilon}{2}$, для любого $x \in K$ (см. [14], гл. 7, § 3). Пусть $S^n = S \cap R^{n+1}$ и рассмотрим отображение $\varphi: S^n \to R^{n+1}$, $\varphi(x) = x - \mu F(x)$, $x \in S^n$. Отображение φ есть полунепрерывное сверху и есть суперпозиция ациклических отображений. Кроме того, $\varphi(x) \neq 0$ для любого $x \in S^n$, т. е. $\varphi(S^n) \subset R_0^{n+1}$, где $R_0^{n+1} = H \cap H_0$. Для таких отображений определена степень $\deg \varphi$. Тогда $\deg \Phi = \deg \varphi$.

Рассмотрим теперь компакт K, который инвариантен относительно действия Z_2 в H. Через $g(K)$ опять будем обозначать множество неподвижных точек действия Z_2 в пространстве K. Здесь $g(K) = K \cap g(H)$.

Лемма 9. Пусть K есть инвариантный компакт, лежащий в H, и ε — положительное число. Существует однозначное Z_2-отображение $\mu: K \to R$, такое, что

а. R есть конечномерное инвариантное подпространство H.

б. Для любого $x \in K$ имеем $\|x - \mu(x)\| < \varepsilon$.

Отображение μ строится стандартным способом, см. [14], гл. 7, § 3.

Пусть $M = \{x_i\}$ — конечное подмножество H, удовлетворяющее следующим условиям:

1. Если $x \in M$, то $\alpha(x) \in M$, т. е. M — инвариантное подмножество относительно действия Z_2.

2. M есть ε — сеть компакта K, т. е. для любого $x \in K$ существует $y \in M$ такая, что $\|x - y\| < \varepsilon$.

Положим

$$\nu_i(x) = \begin{cases} \varepsilon - \|x - x_i\|, & \text{если } \|x - x_i\| < \varepsilon, \\ 0, & \text{если } \|x - x_i\| \geq \varepsilon, \end{cases}$$

для $x \in K$. Здесь $x_i \in M$.

Рассмотрим $\mu_i(x) = \nu_i(x)(\Sigma \nu_i(x))^{-1}$; тогда $\mu: K \to R$ определяется $\mu(x) = \Sigma \mu_i(x) x_i$; здесь R есть линейная оболочка множества M и нуль

пространства H. Непосредственно проверяется, что μ удовлетворяет условиям леммы.

Итак мы построили искомое отображение μ. Отметим, что если $x \in g(K)$, то $\mu(hx) = \mu(x)$. Так как μ есть Z_2-отображение, то $\mu(x) \subset g(R) \cap R \cap g(H)$.

Докажем предложение 2.

Рассмотрим сначала случай $\dim g(H) = 0$. Тогда α является симметрией пространства H относительно нуля. Так как Φ — вполне непрерывное, то множество $\Phi(S)$ замкнуто в H и не содержит нуля пространства H. Пусть $0 < \varepsilon < \frac{1}{3} \min z$, $z \in \Phi(S)$, и $K = F(S)$. Применив к ε и K леммы 9, получим Z_2-отображение $\mu : K \to R$. Пусть $S_1 = S \cap R$ и $\varphi : S_1 \to R$ есть отображение $\varphi = I - \mu F$, т. е. для любой точки $x \in S_1$ $\varphi(x) = x - \mu F(x)$. Проверим, что φ есть суперпозиция ациклических Z_2-отображений. Пусть $F_1 : S_1 \to K$, где $F_1(x) = F(x)$ для любого $x \in S_1$, $\Gamma(F_1)$ — график отображения F_1 и $p : \Gamma(F_1) \to S_1$ — первая проекция $\Gamma(F_1)$. Через G_1 обозначим $G_1 : S_1 \to \Gamma(F_1)$, $G_1(x) = p^{-1}(x)$. Отображение G_1 есть ациклическое Z_2-отображение и $\Gamma(F_1)$ есть компакт. Пусть $\mu_1 : \Gamma(F_1) \to R_0$, $\mu_1(x, y) = x - \mu(y)$, $(x, y) \in \Gamma(F_1)$. Автоматически проверяется, что $\mu_1(\Gamma(F_1)) \subset R_0$ (здесь используется, что число ε — достаточно мало). Отображение μ_1 есть Z_2-отображение, и $\varphi = G_2 G_1$. Из следствия 1 получаем $\deg \varphi = 1 \pmod 2$. Так как $\deg \Phi = \deg \varphi$, то в случае $\dim g(H) = 0$, предложение 2 доказано.

Рассмотрим теперь случай $\dim g(H) = 1$.

Опять рассмотрим $\varphi : S_1 \to R_0$, $\varphi = I - \mu F$. Пусть $S_2 = S_1 \cap g(H)$. Как и наверху $\varphi = G_2 G_1$; здесь $G_1 : S_1 \to \Gamma(F_1)$, $G_2 : \Gamma(F_1) \to R_0$: $G_1(x) = x \times F_1(x)$, а $G_2(x, y) = x - \mu(y)$. G_1 и G_2 суть ациклические Z_2-отображения. Тогда если $\pi : R_0 \to S_1$, $\pi(x) = \frac{x}{x}$ для $x \in R_0$, то для отображения $\psi = \pi\varphi$ имеем $\deg \psi = \deg \varphi$. Из предложения I' получаем $\deg \psi = \deg \psi \mid S_2 \pmod 2$. Легко проверить, что $\deg \psi \mid S_2 = \deg \varphi \mid S_2$, следовательно, $\deg \varphi = \deg \varphi \backslash S_2 \pmod 2$. Из определения степени вполне непрерывного ациклического векторного поля имеем $\deg \Phi = \deg \varphi$, $\deg \Phi \backslash s \cap g(H) = \deg \varphi \backslash s_2$. Тем самым $\deg \Phi = \deg \Phi \backslash S \cap g(H) \pmod 2$. Предложение доказано.

Следствия:

4. Пусть $F : B \to H$ есть компактное ациклическое отображение, а $F_1 = F \backslash S : S \to H$ есть Z_2-отображение и в H фиксирована симметрия относительно нуля пространства H. Тогда существует $z_0 \in B$ такая, что $z_0 \in F(z_0)$.

Предположим противное, т. е. для любой точки $z \in B$ имеем $z \notin F(z)$. Рассмотрим вполне непрерывное ациклическое векторное поле $\Phi = I - F : B \to H_0$, т. е. $\Phi(x) = x - F(x)$ для любого $x \in B$, и пусть $\varphi = \Phi \backslash S$. Отображение φ — вполне непрерывное ациклическое Z_2-

поле. Из предложения 2 получаем $\deg\varphi = 1 \pmod 2$. Теперь напомним, что степень вполне непрерывного векторного ациклического поля есть гомотопический инвариант, если гомотопия есть вполне непрерывное ациклическое векторное поле на $S\times I$, см. [4]. Построим гомотопию отображения $\varphi: p: S\times I \to H_0$, $p(x, t) = \Phi(tx)$. Так как $p(x, t) = tx - F(t, x)$, то p есть вполне непрерывное ациклическое векторное поле и, кроме того, $p(S\times I)\subset H_0$. Тогда $\deg p(x, 1) = \deg p(x, 0)$, т. е. $\deg\varphi = \deg G$, где $G: S \to H_0$ и $G(x) = F(0)$. Теперь получим противоречие, если докажем, что $\deg G = 0$.

Это следует из следующей леммы „о селекторах".

Лемма 10. Пусть $\beta, \tilde\beta: S \to H_0$ — вполне непрерывные ациклические векторные поля и для любой точки $x \in S$ имеем $\tilde\beta(x)\subset\beta(x)$. Тогда $\deg\beta = \deg\tilde\beta$.

Пусть $\beta = I - \beta_0$, $\tilde\beta = I - \tilde\beta_0$, где β_0 и $\tilde\beta_0$ суть компактные и ациклические отображения и пусть $\beta_0(S)\subset K$ и $\alpha(K) = K$ (K — компакт). Пусть $\varepsilon = \frac{1}{3}\min z$, $z \in \beta(S)$. Построим отображение $\mu: K \to R^{n-1}$, см. лемму 9, и пусть $\rho = I - \mu\beta_0$, $\tilde\rho = I - \mu\tilde\beta_0$. Имеем $\deg\beta = \deg\rho$, $\deg\tilde\beta = \deg\tilde\rho$. Так что нам достаточно доказать $\deg\rho = \deg\tilde\rho$.

Отображения ρ и $\tilde\rho$ суть суперпозиции ациклических и пусть $\Gamma(\rho)$ и $\Gamma(\tilde\rho)$ суть графики отображения ρ и $\tilde\rho$ соответственно. Имеем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
S_n & \Gamma(\rho) \arrow[l, "p"'] \arrow[r, "q"] & K \arrow[r, "\mu"] & R_0^{n-1} \\
 & \Gamma(\tilde\rho) \arrow[u, "i"] \arrow[l, "\tilde p"'] \arrow[r, "\tilde q"] & K \arrow[r, "\mu"] & R_0^{n-1}.
\end{tikzcd}$$

Здесь p, q, $\tilde p$, $\tilde q$ — проекции, а i — тождественное вложение.

Из этой диаграммы получаем $\deg\rho\cdot\gamma_n = \mu_n q_n p_n^{-1}(\gamma_n)$, $\deg\tilde\rho\cdot\gamma_n = \mu_n \tilde q_n \tilde p_n^{-1}(\gamma_n)$, и $p_n^{-1}(\gamma_n) = i_n \tilde p_n^{-1}(\gamma_n)$. Имея в виду, что $q_n i_n = \tilde q_n$, получаем $\deg\rho\cdot\gamma_n = \mu_n \tilde q_n \tilde p_n^{-1}(\gamma_n) = \deg\tilde\rho\cdot\gamma_n$,
т. е. $\deg\rho = \deg\tilde\rho$. Тем самым лемма доказана.

Вернемся теперь к доказательству следствия 4. Рассмотрим $G: S \to H_0$, $G(x) = F(0)$, $f: S \to H_0$, $f(x) = a \in F(0)$. Так как $f(x)\subset G(x)$ для любого $x \in S$, то $\deg G = \deg f = 0$. Следствие доказано.

Замечания

Пусть E — отделимое локально выпуклое топологическое векторное пространство, а B — выпуклая открытая окрестность нуля, для которой $B\cap R$ есть ограниченное множество для любого конечномерного подпространства R линейного пространства E. Пусть, кроме того, B — симметрично относительно нуля E и S его граница.

Предположим, что $E=E_1\oplus E_2$, где E_1 и E_2 — локально выпуклые топологические векторные пространства. Пусть $\alpha: E\to E$ инволюция: симметрия относительно E_1 параллельно E_2, т. е. если $z\in E$ и $z=x_1+x_2$, где $x_1\in E_1$, $x_2\in E_2$, тогда $\alpha(z)=x_1-x_2$.

Предположим, что $\Phi: S\to E$ — вполне непрерывное ациклическое векторное поле без особенностей и $\Phi\alpha=\alpha\Phi$ и $\Phi(S\cap E_1)\subset E_1$. Тогда $\deg\Phi\equiv 1 \pmod 2$, если $\dim E_1=0$, $\deg\Phi\equiv\deg\Phi\backslash S\cap E_1 \pmod 2$, если $\dim E_1\geq 1$.

Из этого предложения получаем и теорему о неподвижной точки:

Если $F: B\to E$ — компактное ациклическое отображение и $F_1=F\backslash S$. $F_1(x)=-F_1(-x)$ для любого $x\in S$, то F имеет неподвижную точку, т. е. найдется, $z\in B$ такая, что $z\in F(z)$.

В случае когда $\dim E_1=0$ и $\Phi(x)$ есть выпуклый компакт для любого $x\in B$, верхнее предложение доказано в [12].

ЛИТЕРАТУРА

1. Лефшец, С.: Алгебраическая топология, ИЛ, Москва, 1949.
2. Bredon, G.: Sheaf theory, Mc. Graw-Hill, New York, 1967.
3. Begle, E.: The Vietoris mapping theorem for bicompact spaces. Ann. Math., **51**, 3 (1950), 534—543.
4. Williams, I.: Set valued maps in infinite dimensional spaces. Proc. Amer. Math Soc., **31**, 2 (1972), 12—23.
5. Борисович, Ю., Гельман, Б., Мухамадиев, Э., Обуховский, В.: О вращении многозначных векторных полей. Труды Семинара по функциональному анализу, **12** (1969), 69—84.
6. Cellina, A.: A role of approximation in the theory of multivalued mappings. Diff. Games and Related Topics. Proc. Int. Summer School. Varena. 1970. 209—220.
7. Borsuk, K.: Drei Sätze über die n-dimensionale Euklidische Sphäre. Fund. Math., **20** (1933), 177—190.
8. Jaworowski, J.: Theorem on antipodes for multivalued mappings and a fixed point theorem. Bull. Acad. Polon., Sér. sci. math., astr., phys., **4**, 4 (1956), 187—192.
9. Израилевич, Я., Обуховский, В.: Эквивариантные многозначные отображения. Докл. АН СССР, **13**, 4 (1972), 16—18.
10. Красносельский, М.: О вполне непрерывных векторных полей. Украинский мат. журн., **3** (1949).
11. Granas, A.: Theorem on antipodes and theorems on fixed points for certain class of multivalued mappings. Bull. Acad. Polon., Sér. sc. math., astr., phys., **7**, **5** (1959), 123—129.
12. Altman, M.: An extension to locally convex spaces of Borsuk theorem on antipodes. Bull. Acad. Polon., Sér. sc. math., astr., phys., **6**, 5 (1958), 293—296.
13. Скордев, Г.: Антиподальные ациклические отображения. Докл. Болг. АН (в печати).
14. Люстерник, Л., Соболев, В.: Элементы функционального анализа. Москва, 1967.

Поступила 17. IX. 1973 г.

EQUIVARIANT MULTIVALUED MAPPINGS OF THE SPHERE

G. S. Skordev

(SUMMARY)

Let R^{n+1} be the $(n+1)$-dimensional euclidean space, $\alpha: R^{n+1} \to R^{n+1}$ an orthogonal involution and $g(\alpha)$ the set of fixed points of α. By S we denote the n-dimensional sphere.

Theorem 1. Let $F: S^n \to S^n$ be a multivalued acyclic map, $\alpha F = F\alpha$, and $F(g(\alpha) \cap S^n) \subset g(\alpha) \cap S^n$. Then $\deg F \equiv 1 \pmod 2$, if $\dim g(\alpha) = 0$; $\deg F \equiv \deg F/g(\alpha) \cap S^n \pmod 2$, if $\dim g(\alpha) \geqq S$.

Let H be a Hilbert space, $\beta: H \to H$ an orthogonal involution, and $g(\beta)$ the set of fixed points of β. We consider multivalued compact acyclic vector fields without singularities on the sphere S of H; $\Phi: S \to H$.

Theorem 2. Suppose that $\Phi\beta = \beta\Phi$ and $\Phi S \cap g(\beta) \subset g(\beta)$, then $\deg \Phi \equiv 1 \pmod 2$, if $\dim g(\beta) = 0$, $\deg \Phi$ $\deg \Phi \backslash S \cap g(\beta) \pmod 2$ if $\dim g(\beta) \geq 1$.