# ЗАМЕЧАНИЕ К ТЕОРИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

**Димитр Скордев**

В настоящей заметке будем использовать терминологию и обозначения из [1]. Цель заметки — обратить внимание на некоторые свойства, которые могут быть полезными для упрощения изложения теории интегрирования числовых функций.

Будем предполагать, что даны некоторое локально компактное топологическое пространство $E$ и некоторая положительная мера $\mu$ на нем.

Предложение 1. Пусть $A \subset E$ и $f$ — отображение множества $A$ в $\mathbf{R}$. Для того, чтобы множество $E-A$ было $\mu$-пренебрежимым и функция $f$ была $\mu$-интегрируемой, необходимо и достаточно, чтобы существовали функции $f_1$ и $f_2$ из $J_+(E)$, (т. е. неотрицательные и полунепрерывные снизу на $E$), удовлетворяющие следующим двум условиям:

а) $\mu^*(f_1) < +\infty$, $\mu^*(f_2) < +\infty$;

б) все $x$ из $E$, для которых $f_1(x) < +\infty$ и $f_2(x) < +\infty$, принадлежат множеству $A$ и для всех этих $x$ верно равенство

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x).$$

*Доказательство.* Достаточность очевидна. Для доказательства необходимости предположим, что $E-A$ $\mu$-пренебрежимо и $f$ $\mu$-интегрируема. Известно (см. [1], гл. IV, § 3, упр. 2*), что $f$ равна почти всюду разности двух функций $g_1$ и $g_2$ из $J_+(E)$, для которых $\mu^*(g_1) < +\infty$ и $\mu^*(g_2) < +\infty$. Пусть $B$ — объединение множества $E-A$ и множества тех точек $x$ из $A$, для которых не имеет места равенство $f(x) = g_1(x) - g_2(x)$. Множество $B$ $\mu$-пренебрежимо. Поэтому для любого натурального $n$ можно найти такую функцию $h_n$ из $J_+(E)$, что $h_n(x) \geq 1$ для любого $x$ из $B$ и $\mu^*(h_n) < \frac{1}{2^n}$. Пусть

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(x).$$

* Заметим, что в формулировке этого упражнения имеется небольшой недосмотр. В этой формулировке вместо слов „принадлежащих $L^p$" должны стоять слова „интегрируемые в $p$-й степени", так как функции $g_1$ и $g_2$ могут оказаться не всюду конечными.

Тогда $h(x)=+\infty$ для любого $x$ из $B$, $h\in J_+(E)$ и $\mu^*(h)<+\infty$. Поэтому, если положить $f_1=g_1+h$, $f_2=g_2+h$, то $f_1$ и $f_2$ будут принадлежать $J_+(E)$ и будут удовлетворять условиям а) и б).

Замечание. К условиям а) и б) предложения 1 можно добавить дополнительное условие

в) множество точек $x$ из $E$, для которых $f_1(x)<+\infty$, совпадает с множеством точек $x$ из $E$, для которых $f_2(x)<+\infty$.

В самом деле, если мы построили функции $f_1$ и $f_2$, удовлетворяющие условиям а) и б), то мы можем положить

$$\hat{f}_1=2f_1+f_2, \qquad \hat{f}_2=f_1+2f_2$$

и заменить $f_1$ и $f_2$ соответственно на $\hat{f}_1$ и $\hat{f}$.

Предложение 1 допускает некоторую модификацию. Обозначим через $L^1_\uparrow(E, \mu)$ множество тех отображений $g$ множества $E$ в $\mathbf{R}_+$, которые удовлетворяют следующему требованию: существует такая функция $h$ из $J_+(E)$, что $\mu^*(h)<+\infty$ и для всех $x$ из $E$, для которых $h(x)<+\infty$, верно равенство $g(x)=h(x)$. Имеет место

Предложение 2. Пусть $f$ — отображение множества $E$ в $\mathbf{R}$. Для того, чтобы $f\in L^1(E, \mu)$, необходимо и достаточно, чтобы существовали две функции из $L^1_\uparrow(E, \mu)$, разность которых всюду равна $f$.

*Доказательство.* Достаточность опять очевидна. Докажем необходимость. Пусть $f\in L^1(E, \mu)$. Положив $A=E$, на основании предложения 1 и следующего за ним замечания строим функции $f_1$ и $f_2$, удовлетворяющие сформулированным выше условиям а), б) и в). Пусть $C$ — множество тех точек $x$ из $E$, для которых $f_1(x)$ и $f_2(x)$ конечны. Положим

$$g_1(x)=\begin{cases} f_1(x), & \text{если } x\in C,\\ \frac{1}{2}(f(x)+f(x)), & \text{если } x\in E-C;\end{cases}$$

$$g_2(x)=\begin{cases} f_2(x), & \text{если } x\in C,\\ \frac{1}{2}(f(x)-f(x)), & \text{если } x\in E-C.\end{cases}$$

Тогда $g_1$ и $g_2$ принадлежат $L^1_\uparrow(E, \mu)$ и для любого $x$ из $E$ верно равенство

$$f(x)=g_1(x)-g_2(x).$$

Имея в виду предложение 1 или предложение 2, можно строить теорию интегрирования числовых функций несколько проще чем в [1], не вводя понятия верхнего интеграла для произвольных положительных функций (и не вводя предварительно понятия пренебрежимого множества, а также не прибегая к аппроксимации янговского типа). Для того, чтобы лучше выяснить это, докажем прямым способом

(используя только свойства интегрирования на $J_+$) следующее утверждение:

Предложение 3. Пусть $f_1$ и $f_2$ — функции, которые принадлежат $J_+(E)$, и пусть они удовлетворяют условиям

а) $\mu^*(f_1)<+\infty$, $\mu^*(f_2)<+\infty$;

б) для всех $x$ из $E$, для которых $f_1(x)<+\infty$ и $f_2(x)<+\infty$, имеет место неравенство $f_2(x)\leqq f_1(x)$.

Тогда верно неравенство $\mu^*(f_2)\leqq\mu^*(f_1)$.

Вот прямое доказательство предложения 3:

Пусть $\varepsilon>0$. Для любого $x$ из $E$ верно неравенство

$$f_2(x)\leqq f_1(x)+\varepsilon f_2(x).$$

Отсюда получаем, что

$$\mu^*(f_2)\leqq\mu^*(f_1)+\varepsilon\mu^*(f_2).$$

После этого устремляем $\varepsilon$ к нулю.

В заключении отметим, что все сказанное выше допускает обобщение на случай абстрактных мер (в смысле [1], гл. IV, § 1, $n^0$ 5).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бурбаки, Н.: Интегрирование. Меры, интегрирование мер. Москва, 1967.

Поступила 11. X. 1973 г.

## A REMARK TO THE THEORY OF INTEGRATION

D. Skordev

(SUMMARY)

Let $E$ be a locally compact topological space and $\mu$ be a positive measure on $E$. The following property can be useful for simplifying the exposition of the theory of integration of scalar functions:

Proposition 1. Let $f$ be a real-valued function, defined on a subset of $E$. Then $f$ is defined almost everywhere on $E$ (with respect to $\mu$) and $f$ is $\mu$-integrable if and only if there exist two $\mu$-integrable lower semicontinuous non-negative functions $f_1$ and $f_2$, defined on $E$, such that for all $x$ satisfying the conditions $f_1(x)<+\infty$ and $f_2(x)<+\infty$ $f(x)$ is defined and equals $f_1(x)-f_2(x)$.

A modification of proposition 1 can be given. Let $L^1_\uparrow(E,\mu)$ be the set of those finite-valued non-negative functions $g$, defined on $E$, which satisfy the following condition: there exists a $\mu$-integrable lower semicontinuous non-negative function $h$, defined on $E$, such that $g(x)=h(x)$ for all $x$ for which $h(x)<+\infty$. Then we have

Proposition 2. A finite-valued real function $f$, defined on $E$, is $\mu$-integrable if and only if there exist two functions belonging to $L^1_\uparrow(E,\mu)$ such that their difference is equal to $f$ everywhere on $E$.