РЕГУЛЯРНОСТ НА РЕШЕНИЕТО НА ЕДНО ЕЛИПТИЧНО ВАРИАЦИОННО НЕРАВЕНСТВО С ДВЕ ПРЕПЯТСТВИЯ

Йордан Йорданов

ВЪВЕДЕНИЕ

В [2] е разгледана следната вариационна задача:
Нека $\Omega \subset R^n$ е ограничена област, $E = E \subset \Omega$ и $\psi \in H_0^1(\Omega)$. Да означим с K множеството от всички функции $v \in H_0^1(\Omega)$, за които $v \geqq \psi$ над E в определен смисъл (вж. § 1). Нека билинейната форма

$$a(u, v) = \int_\Omega a_{ij}(x) u_{x_i} v_{x_j} dx, \quad v, u \in H_0^1(\Omega)$$

е коерцитивна в смисъл, че:

$$a(u, u) \geqq \nu \| u \|_{H_0^1(\Omega)} \quad \nu = \text{const} > 0.$$

Съгласно една теорема на Lions и Stampacchia [3] съществува единствен елемент $u \in K$, за който:

$$a(u, v-u) \geqq 0 \quad \text{за всяко } v \in K.$$

Ако формата $a(.,.)$ е симетрична, тази задача е еквивалентна с минимизирането на квадратичния функционал $a(v, v)$ над K. В статията [2] е изследвана регулярността на решението u.

Използувайки същите методи, в тази работа се изследва друга подобна задача, при която аналогичното на K множество се състои от функциите v от $H_0^1(\Omega)$, удовлетворяващи условията:

$$v \geqq \psi \text{ над } E \text{ и } v \leqq \psi \text{ над } F,$$

където E и F са затворени непресичащи се подмножества на Ω. Решението u на тази задача е непрекъснато в Ω (§ 2).

Въпросът за намирането на задоволителни условия, осигуряващи диференцируемост на решението, фактически остава открит, въпреки че в § 3 е посочено едно необходимо и достатъчно условие (теорема 3.1), което за съжаление е неконструктивно, и едно достатъчно условие (следствие 3.1). Гладкостта на решението не зависи директно от гладкостта на ψ и на контурите на Ω, E и F.

Както се вижда от пример, подобен на изложения в началото на § 3, дори при значително по-силни условия от наложените в част III

на [2], решението на разглежданата там задача е само непрекъснато. Пропускът в доказателството на теорема 3.1 от [2] се състои в това, че при дадена ψ, колкото и гладка да е тя, след като вече по такъв начин е фиксирано решението $u \in H_0^1(\Omega)$ на задачата, разгледана в [2], невинаги е възможно построяването на функция ψ_1, която да бъде достатъчно гладка и да удовлетворява условията:

$\psi_1 \geqq \psi$ над E и $\psi_1 \leqq u$ поне в околност на E.

Във всеки случай подобно на изложеното в § 3 се вижда, че решението на тази задача е от класа $C^{1,\alpha}(\Omega)$, ако функцията ψ е достатъчно гладка и $\psi_{\partial E} \leqq 0$.

Задача с две препятствия е разгледана в [8], като там ролята на множеството K се играе от

$$\{v \quad v \in H_0^1(\Omega), \ \psi_1 \leqq v \leqq \psi_2 \text{ п. н. в } \Omega\},$$

където ψ_1 и ψ_2 са дадени функции, такива, че $\psi_1 \leqq \psi_2$ п. н. в Ω и $\psi_1 \leqq 0 \leqq \psi_2$ върху $\partial\Omega$. При тази задача поради факта, че препятствията са върху цялата област Ω, при достатъчно гладки ψ_i се получава регулярно решение.

§ 1. Означения и предварителни леми

Нека $\Omega \subset R^n$ е ограничена област с контур $\partial\Omega$; $\Omega = \Omega \cup \partial\Omega$. С $H^{1,p}(\Omega)$ (респ. $H_0^{1,p}(\Omega)$) означаваме попълнението на $C^1(\Omega)$ (респ. $C_0^1(\Omega)$) по нормата:

$$\|u\|_{1,p} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \|u_{x_i}\|_{L^p(\Omega)}, \ p \geqq 1.$$

Когато $p = 2$, ще пишем просто $H^1(\Omega)$ и $H_0^1(\Omega)$. (Последните две пространства са хилбертови.)

Нека $u, v \in H^{1,p}(\Omega)$ $(H_0^{1,p}(\Omega))$ и G е подмножество на $\Omega(\Omega)$.

Дефиниция 1.1. Ще казваме, че $u \geqq v$ върху множеството G в $H^{1,p}(\Omega)$ $(H_0^{1,p}(\Omega))$-смисъл, ако съществуват редици $\{u_n\}$, $\{v_n\}$, съдържащи се в $C^1(\Omega)$ $(C_0^1(\Omega))$, които клонят по норма в $H^{1,p}(\Omega)$ $(H_0^{1,p}(\Omega))$ съответно към u и v и освен това удовлетворяват $u_n \geqq v_n$ над G.

Дефиниция 1.2. Ще казваме, че $u = v$ върху G в $H^{1,p}(\Omega)$ $(H_0^{1,p}(\Omega))$ - смисъл, ако едновременно $u \geqq v$ и $v \geqq u$ над G според дефиниция 1.1.

Забележка 1.1. Ако току-що дефинираните релации са в сила над някое множество G, то те са в сила и върху всяко негово подмножество.

Забележка 1.2. Ако $u \geqq v$ над G в $H^{1,p}(\Omega)$-смисъл, то $u \geqq v$ над G почти навсякъде (п. н.). Това обаче е по-слабо изискване, за-

щото горните дефиниции налагат ограничения върху u и v дори ако $\operatorname{mes} G = 0$. Едно частично обръщане дава следната

Лема 1.1 ([2]). Нека $u, v \in H^{1,p}(\Omega)$ и $G \subset \Omega$. Ако $u \geqq 0$ п. н. в G, то върху всяко подмножество $A \subset G$, намиращо се на положително разстояние от ∂G, е изпълнено $u \geqq 0$ в $H^{1,p}(\Omega)$-смисъл.

Доказателство. Нека $\rho > 0$ е разстоянието между A и ∂G. Средните функции $u_h(x)$, $h \leqq \rho$ на функцията u я апроксимират в $H^{1,p}(\Omega)$ и освен това удовлетворяват $u_h \geqq 0$ над A в обичаен смисъл.

Лема 1.2. Нека $u, v, w \in H^{1,p}(\Omega)$, $G \subset \Omega$ и са изпълнени в $H^{1,p}(\Omega)$-смисъл неравенствата $u \geqq v$ и $v \geqq w$. Тогава $u \geqq w$ в същия смисъл.

Доказателство. Нека редиците $\{u_n\}$ и $\{v_n'\}$, апроксимиращи u и v в $H^{1,p}(\Omega)$, се състоят от функции от $C^1(\overline{\Omega})$, за които $u_n \geqq v_n'$ над G. Нека $\{v_n''\}$ и $\{w_n\}$ са аналогични редици, които апроксимират v и w и удовлетворяват $v_n'' \geqq w_n$ над G. Очевидно $u_n - v_n' + v_n'' \geqq w_n$ над G и освен това $u_n - v_n' + v_n'' \to u$, $w_n \to w$ в $H^{1,p}(\Omega)$, с което лемата е доказана.

Следствие 1.1. Нека $u, \psi_i \in H^{1,p}(\Omega)$, $i = 1, 2$, и $G \subset \Omega$. Ако $\psi_1 = \psi_2$ над G в $H^{1,p}(\Omega)$-смисъл, то релациите: $u \geqq \psi_1$ над G и $u \geqq \psi_2$ над G в $H^{1,p}(\Omega)$-смисъл са еквивалентни.

Забележка 1.3. Лема 1.2 и следствие 1.1 остават верни, ако $H^{1,p}(\Omega)$ се замени с $H_0^{1,p}(\Omega)$.

В [2; 169] е доказана следната важна теорема:

Лема 1.3. Нека $F \subset \Omega$ е измеримо множество, $v \in H_0^1(\Omega)$ и $v = \text{const}$ над F в $H_0^1(\Omega)$-смисъл. Тогава $\int\limits_F \left(\sum\limits_{i=1}^n u_{x_i}^2 \right) dx = 0.$

Дефиниция 1.3. Нека $v, \varphi \in H^{1,p}(\Omega)$. Ще казваме, че $v > \varphi$ в точката $x_0 \in \Omega$ в $H^{1,p}(\Omega)$-смисъл, ако съществува число $\rho > 0$, такова, че кълбото $O_{2\rho}(x_0)$ с център точката x_0 и радиус 2ρ се съдържа в Ω, и функция $\alpha \in C_0^1(O_{2\rho}(x_0))$, която е неотрицателна и $\alpha > 0$ върху $O_\rho(x_0)$, такава, че $v - \alpha \geqq \varphi$ в $H^{1,p}(\Omega)$-смисъл върху $O_{2\rho}(x_0)$. (В случай, че се разглежда $H_0^{1,p}(\Omega)$, дефиницията е аналогична.)

От тази дефиниция веднага следва, че множеството от точките, в които $v > \varphi$, е отворено. Също така е очевидно, че ако съществуват въпросното число ρ и функцията α, то можем да считаме, че числото ρ е произволно малко.

Нека $a_{ij}(x)$, $i, j = 1, \ldots, n$, са измерими и ограничени функции в Ω, които удовлетворяват неравенството:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geqq \nu \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \quad \nu > 0, \tag{1.1}$$

за всяко $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in R^n$ и за почти всяко $x \in \Omega$. За $u, v \in H_0^1(\Omega)$ дефинираме билинейната форма

$$a(u, v) = \int_{\Omega} a_{ij}(x) u_{x_i} v_{x_j} dx,$$

която поради (1.1) е коерцитивна над $H_0^1(\Omega)$, т. е.

$$a(u, u) \geqq c \ \|u\|^2_{H_0^1}, \quad c > 0, \tag{1.2}$$

защото $\|u\|_{H_0^1}$ е еквивалентна с $\left[\int_{\Omega} \sum_i |u_{x_i}|^2 dx\right]^{1/2}$ поради неравенството на Фридрихс.

Следната лема, доказана в [2] при малко по-силни предположения, ще играе роля на принцип за максимума за формата $a(u, v)$.

Лема 1.4. Нека отвореното ограничено множество A се съдържа вътре в областта Ω, т. е. $A \subset \Omega$. Ако за функцията $v \in C^1(\bar{A})$ са в сила условията:

1) $v \geqq 0$ над ∂A;

2) за всяко неотрицателно $\varphi \in C_0^1(A)$: $\int_A a_{ij}(x) v_{x_i} \varphi_{x_j} dx \geqq 0$, тогава $v \geqq 0$ в A.

Доказателство. Поради непрекъснатостта на функцията v нейният минимум m в $\bar{A}$ се достига в затворено множество F. Ако допуснем, че $m < 0$, от условието за v по ∂A ще следва, че $F \subset A$, а оттук и съществуването на такава точка $x_0 \in F$, чието разстояние до ∂A ще бъде минимално в сравнение с разстоянията на останалите точки от F до ∂A. Означаваме с O околността на точката x_0, състояща се от всички точки $x \in A$, в които $v(x) < \frac{m}{2}$. Очевидно $v_{\partial O} = \frac{m}{2}$, а поради $v|_{\partial A} \geqq 0 > \frac{m}{2}$ разстоянието между O и ∂A е положително.

Нека $\lambda(t) \in C^1(-\infty, +\infty)$ има свойствата:

$$\lambda'(t) < 0 \text{ за } t < \frac{m}{2} \text{ и } \lambda(t) = 0 \text{ за } t \geqq \frac{m}{2}.$$

Можем да вземем например:

$$\lambda(t) = \begin{cases} \left(t - \frac{m}{2}\right)^2, & t \leqq \frac{m}{2} \\ 0, & t \geqq \frac{m}{2}. \end{cases}$$

Очевидно функцията $\varphi(x) = \lambda(v(x))$, $x \in A$, е неотрицателна и принадлежи на $C_0^1(A)$. По условие $J = \int_A a_{ij}(x) v_{x_i} \varphi_{x_j} dx \geqq 0$. От друга страна, $J = \int_A \lambda'(v) \left[\sum_{ij} a_{ij}(x) v_{x_i} v_{x_j}\right] dx \leqq 0$. Следователно $J = 0$. Оттук и като

вземем пред вид, че $\lambda'(v)<0$ върху O, получаваме посредством (1.1)

$$0=-J\geqq\int_A\left[-\lambda'(v)\right]\gamma\sum_i v_{x_i}^2\,dx\geqq 0.$$

Ако допуснем, че в някоя точка от O неотрицателната и непрекъсната в A функция $\sum_{i=1}^{n} v_{x_i}^2$ има строго положителна стойност, тогава последният интеграл ще има също положителна стойност, което противоречи на $J=0$. Следователно $\sum_i v_{x_i}^2=0$ върху O, което показва, че в достатъчно малка (съдържаща се в O) свързана околност на точката $x_0: v=\text{const}$, т. е. $v=m$. Това обаче противоречи на избора на x_0, с което желаното неравенство $m\geqq 0$ е доказано.

При $a_{ij}\in C^1(\Omega)$ можем да разглеждаме елиптичния оператор

$$Lu=-\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j},$$

който ще наричаме асоциран на формата $a(u,v)$. Очевидно е, че за $u\in H^2(\Omega)$ и $v\in H^1(\Omega)$, от които поне едната функция е с носител вътре в Ω, е в сила $a(u,v)=(Lu,v)$, където с $(.,.)$ е означено скаларното произведение в $L_2(\Omega)$.

Нека $\omega\subset\Omega$ е област.

Дефиниция 1.4. Функцията $u\in H^1(\omega)$, за която

$$\int_\omega a_{ij}u_{x_i}w_{x_j}dx\geqq 0 \text{ за всяко } w\in H_0^1(\omega),\ w\geqq 0,$$

се нарича **суперрешение** на оператора L в областта ω. Функцията $u\in H^1(\omega)$ се нарича **субрешение** на оператора L, ако $-u$ е суперрешение в ω.

Лема 1.5. Нека v е суперрешение (субрешение) на L в ω и $Lv\in C(\omega)$. Тогава $Lv\geqq 0$ $(Lv\leqq 0)$.

Доказателство. За всяко $w\in H_0^1(\omega)$, $w\geqq 0$, имаме

$$\int_\omega Lv\,.\,w\,dx=\int_\omega a_{ij}v_{x_i}w_{x_j}dx\geqq 0$$

съгласно дефиницията за суперрешение.

Ако съществува точка $x_0\in\omega$, в която $Lv(x_0)<0$, то в цяла околност $O_\rho(x_0)$ на точката $x_0: Lv<0$. Следователно, ако $w\in C_0^1(O_\rho(x_0))$, $w\geqq 0$ и $w>0$ върху $O_{\rho/2}(x_0)$, то $\int_\omega Lv\,.\,w<0$, което е в противоречие с вече установената неотрицателност на този интеграл. С това лемата е доказана.

Ще напомним дефиницията на релацията $\geqq$ за разпределения.

Дефиниция 1.5. Ще казваме, че разпределението $T \in D'(\Omega)$ е позитивно в областта $\omega \subset \Omega$, ако за всяко $\varphi \in C_0^\infty(\omega)$, което е неотрицателно, е в сила $T(\varphi) \geqq 0$.

Теорема на Рис-Шварц [5]. Нека ω е ограничена област и $T \in D'(\omega)$ е позитивно разпределение. Тогава съществува такава неотрицателна мярка μ, че за всяко $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ е в сила равенството

$$T(\varphi) = \int_\omega \varphi \, d\mu .$$

Накрая ще формулираме още един спомагателен резултат, свързан с понятието функция на Грийн за оператора $Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x) u_{x_i})_{x_j}$ в област $\Omega \subset R^n$. Тя се дефинира като слабо решение на задачата:

$$Lv(y) = \delta_x \qquad \text{в } \Omega$$

$$v(y) = 0 \quad \text{върху } \partial\Omega,$$

т. е. представлява такава функция $G(x, y)$, за която

$$\int_\Omega G(x, y) L\varphi(y) dy = \varphi(x)$$

за всяка функция $\varphi \in H_0^1(\Omega) \cap C^0(\Omega)$, такава, че $L\varphi$ съвпада п. н. с непрекъсната в Ω фунция. Както е показано в [4], при регулярен в определен смисъл контур $\partial\Omega$ и при ограничени и измерими коефициенти $a_{ij} = a_{ji}$ на оператора L, функцията на Грийн съществува за всяка фиксирана точка $x \in \Omega$ и по променливата y принадлежи на $H_0^{1,s}(\Omega)$, $1 < s < \frac{n}{n-1}$. При $x \neq y$ функцията $G(x, y)$ е непрекъсната и неотрицателна, а за $y \to x$ клони към $+\infty$.

Обобщена теорема на Evans. Нека $\mu(y)$ е неотрицателна мярка с компактен носител, съдържащ се вътре в ограничената област $\Omega \subset R^n$, а функцията

$$v(x) = \int_\Omega G(x, y) \, d\mu(y), \quad x \in \Omega,$$

където $G(x, y)$ е функцията на Грийн за областта Ω и оператора L, е непрекъсната, ако се разглежда само върху $\operatorname{supp} \mu$. Тогава $v(x) \in C(\Omega)$.

Доказателството е изложено в [2].

§ 2. Постановка на задачата. Непрекъснатост на решението

Нека E и F са затворени и непресичащи се подмножества на областта $\Omega \subset R^n$. Допуска се те да не са свързани, а да се състоят от отделни свързани компоненти: $E = \bigcup E_i$, $F = \bigcup F_j$.

Фиксираме функцията $\psi \in H_0^1(\Omega)$ и означаваме с K множеството от тези елементи $v \in H_0^1(\Omega)$, които удовлетворяват в H_0^1 (Ω) - смисъл релациите

$$v \geqq \psi \text{ над } E \text{ и } v \leqq \psi \text{ над } F.$$

Очевидно K е изпъкнало и затворено подмножество на $H_0^1(\Omega)$. Съгласно една важна теорема на Lions и Stampacchia [3] съществува единствен елемент $u \in K$, такъв, че

$$a(u, v-u) \geqq 0 \quad \text{за всяко } v \in K. \tag{2.1}$$

Елементът u ще наричаме решение на вариационното неравенство (2.1). В случай, че формата $a(u, v)$ е симетрична, за което например е достатъчно да бъде в сила $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1, \ldots, n$, то решаването на вариационното неравенство (2.1) е равносилно с търсене на минимума на квадратичния функционал $a(v, v)$ над K.

Означаваме с K_u изпъкналия конус с връх в началото на тези елементи $w \in H_0^1(\Omega)$, за които има представяне

$$w = \varepsilon(v - u), \ \varepsilon = \text{const} > 0, \ v \in K.$$

Условието (2.1) е еквивалентно с

$$a(u, w) \geqq 0 \quad \text{за всяко } w \in K_u. \tag{2.2}$$

Конусът от елементи $w \in H_0^1(\Omega \backslash F)$, продължени извън $\Omega \backslash F$ като нула, които са неотрицателни в $H_0^1(\Omega)$-смисъл, се съдържа в K_u. Действително всяко такова w се представя като $1.(v-u)$, където $v = u + w \in K$, защото над $E: u + w \geqq \psi + 0 = \psi$, а над $F: u + w = u + 0 \leqq \psi$.

Аналогично конусът от елементи от $H_0^1(\Omega \backslash E)$, продължени извън $\Omega \backslash E$ като нула, които са неположителни, се съдържа в K_u. Следователно:

$$a(u, w) \geqq 0 \quad \text{за всяко} \quad w \in H_0^1(\Omega \backslash F), \ w \geqq 0$$

и

$$a(u, w) \geqq 0 \quad \text{за всяко} \quad w \in H_0^1(\Omega \backslash E), \ w \leqq 0.$$

Последното е еквивалентно с

$$a(u, w) \geqq 0 \text{ за всяко } w \in H_0^1(\Omega \backslash E), \ w \geqq 0.$$

Съгласно теоремата на Рис-Шварц (вж. § 1) съществуват неотрицателни мерки μ_E и μ_F, чрез които се представят горните позитивни разпределения, т. е.

$$a(u, w) = \int_{\Omega \setminus F} w \, d\mu_E \quad \text{за всяко } w \in H_0^1(\Omega \setminus F)$$

и

$$a(u, w) = -\int_{\Omega \setminus E} w \, d\mu_F \quad \text{за всяко } w \in H_0^1(\Omega \setminus E).$$

Ако вземем произволен неотрицателен елемент $w \in H_0^1(\Omega)$ с носител в $\Omega \setminus (E \cup F)$, пред вид неотрицателността на мерките μ_E и μ_F получаваме $a(u, w) = \int_{\Omega \setminus F} w \, d\mu_E = -\int_{\Omega \setminus E} w d\mu_F = 0$.

Понеже всяко $w \in H_0^1$ може да се представи като сума от елементи на H_0^1, имащи постоянен знак, по формулата $w = \max(0, w) + \min(0, w)$*, намираме окончателно

$$\mu_E = \mu_F = 0 \quad \text{в} \quad \Omega \setminus (E \cup F).$$

Оттук следва, че $\operatorname{supp} \mu_E \subset E$ и $\operatorname{supp} \mu_F \subset F$.

По такъв начин за решението u на (2.1) получихме в смисъл на теорията на разпределенията

$$(2.3) \qquad \begin{aligned} Lu &= \mu_E \quad \text{в} \quad \Omega \setminus F \quad \text{и} \quad \operatorname{supp} \mu_E \subset E \\ Lu &= -\mu_F \quad \text{в} \quad \Omega \setminus E \quad \text{и} \quad \operatorname{supp} \mu_F \subset F, \end{aligned}$$

където, както по-рано, $Lu = -\sum_{ij} (a_{ij}(x) u_{x_i})_{x_j}$. В частност това означава, че $Lu = 0$ в $\Omega \setminus (E \cup F)$.

Ще изследваме по-подробно Lu върху $E \cup F$. Въвеждаме следните отворени множества

$$\Omega_1 = \{x \;\; x \in \Omega, \quad u > \psi \quad \text{в} \quad H_0^1(\Omega)\text{-смисъл в т. } x\}$$

и

$$\Omega_2 = \{x \;\; x \in \Omega, \quad u < \psi \quad \text{в} \quad H_0^1(\Omega)\text{-смисъл в т. } x\}.$$

Очевидно $\Omega_1 \cap F = \emptyset$ и $\Omega_2 \cap E = \emptyset$.

Нека $u > \psi$ в т. x_0 (т. е. $x_0 \in \Omega_1$) и съответното число ρ е толкова малко, че $O_{2\rho}(x_0) \cap F = \emptyset$. За неотрицателната функция $\alpha \in C_0^1(O_{2\rho}(x_0))$ със свойствата $\alpha|_{O_\rho(x_0)} > 0$ и $u - \alpha \geqq \psi$ в $H_0^1(\Omega)$-смисъл, е валидно представянето — $\alpha = v - u$, $v = u - \alpha \in K$. Следователно — $\alpha \in K_u$. Нека $\zeta \in C_0^1(O_\rho(x_0))$ и $\zeta \leqq \alpha$. Понеже $u - \zeta \geqq u - \alpha \geqq \psi$, намираме — $\zeta \in K_u$. Ако $\eta \in C_0^1(O_\rho(x_0))$ е произволна, то съществува $\varepsilon > 0$, такова, че $-\varepsilon\eta \leqq \alpha$, т. е. $\varepsilon\eta \in K_u$, а следователно и $\eta \in K_u$. Оттук намираме, че $C_0^1(\Omega_1) \subset K_u$ и аналогично $C_0^1(\Omega_2) \subset K_u$. Следователно

* Тук и по-нататък в статията символите $\max(u, v)$ и $\min(u, v)$ при $u, v \in H_0^1$ се дефинират по обичайния начин чрез апроксимиращи редици от гладки функции (вж. [2]).

$$Lu=0 \text{ в } \Omega_1 \cup \Omega_2. \tag{2.4}$$

Неотрицателността на мерките μ_E и μ_F означава, че над $\Omega \backslash F$ ($\Omega \backslash E$) функцията u е суперрешение (субрешение). Ако предположим, че Lu и $L\psi$ са непрекъснати функции, пред вид лема 1.5 и поради (2.3) и (2.4) ще намерим, че $u=\psi$ и следователно $Lu=L\psi$ е възможно над $\Omega \backslash F$ само върху тези части на E, върху които $L\psi \geqq 0$. Аналогично при същото предположение върху F е възможно $Lu=L\psi$ само там, където $L\psi \leqq 0$.

Ако означим с $e(x)$ и $f(x)$ характеристичните функции на множествата E и F, стигаме до предположението, че решението u на (2.1) удовлетворява уравнението

$$\begin{aligned} Lu-e(x)\,H(u-\psi)\max(0,\,L\psi) \\ -f(x)\,H(\psi-u)\min(0,\,L\psi)=0, \end{aligned} \tag{2.5}$$

където

$$H(t)=\begin{cases} 1, & t\leqq 0 \\ 0, & t>0. \end{cases}$$

Лема 2.1 Нека N е неотрицателна константа и $\psi \leqq N$ в $H^1(\Omega)$-смисъл над $E \cup F$. Тогава $u \leqq N$ в $H^1(\Omega)$-смисъл над Ω.

Доказателство. Нека $\zeta=\min(u, N)$*. Понеже $u \in H_0^1(\Omega)$ и $N \geqq 0$, то $\zeta \in H_0^1(\Omega)$. Тъй като $\zeta \leqq N$, всичко ще бъде доказано, ако установим, че $\zeta=u$ в $H_0^1(\Omega)$-смисъл над Ω.

Очевидно $\zeta \in K$. Наистина $u \geqq \psi$ и $N \geqq \psi$ над E, а следователно и $\zeta \geqq \psi$ над E. От друга страна, над $F: u \leqq \psi$ и $\psi \leqq N$ и съгласно лема 1.2 $u \leqq N$, т. е. $\zeta=u$ над F, което от своя страна не надминава ψ. Оттук следва, че $a(u, \zeta-u) \geqq 0$, т. е.

$$\int_\Omega a_{ij}(x)\,(-u)x_i\,(\zeta-u)_{x_j}dx \leqq 0.$$

Понеже $\zeta \leqq u$, като вземем пред вид, че от $\zeta<u$ следва $\zeta=N$, и приложим лема 1.3, получаваме

$$\int_\Omega a_{ij}(x)\,\zeta_{x_i}(\zeta-u)_{x_j}dx=\int_{\Omega\cap\{\zeta<u\}}\cdot\;\cdot\;\cdot+\int_{\Omega\cap\{\zeta=u\}}\cdot\;\cdot\;\cdot=0.$$

Следователно $a(\zeta-u,\,\zeta-u) \leqq 0$, което поради (1.2) означава, че $\zeta=u$ в $H_0^1(\Omega)$, а значи и в $H_0^1(\Omega)$-смисъл.

Лема 2.2. Нека $M \leqq 0$ е константа и $\psi \geqq M$ над $E \cup F$ в $H^1(\Omega)$-смисъл. Тогава $u \geqq M$ в $H^1(\Omega)$-смисъл над Ω.

Доказателството е аналогично на това на лема 2.1.

Следствие 2.1. Ако съществуват константи N и M такива, че $\psi=N \geqq 0$ над E и $\psi=M \leqq 0$ над F в $H_0^1(\Omega)$-смисъл, то върху

* Вж. забележката под линия на стр. 176.

множествата E и F решението u съвпада с N и M съответно в $H^1(\Omega)$-смисъл.

Доказателство. Прилагаме леми 2.1 и 2.2.

Забележка 2.1. Ако $\psi \leqq 0$ върху E и $\psi \geqq 0$ върху F в $H_0^1(\Omega)$-смисъл, тогава решението u на (2.1) е равно на нула. Действително сега $0 \in K$ и освен това $a(0, v) = a(0, 0)$ за всяко $v \in K$, т. е. нулата е решение на 2.1. Твърдението следва от теоремата за единственост.

Преминаваме към изследване на непрекъснатостта на решението u. Условието $Lu = 0$ в $\Omega \setminus (E \cup F)$, което се получи като следствие от (2.3), показва, че $u \in C(\Omega \setminus (E \cup F))$, тъй като L е равномерно елиптичен оператор и $u_{\partial\Omega} = 0$. По такъв начин доказването на $u \in C(\Omega)$ се свежда до доказване на непрекъснатостта на u в две произволно избрани отворени околности на E и F. Това ще направим при предположенията:

$$\psi \in H_0^1(\Omega) \cap C(\Omega). \tag{2.6}$$

Контурите ∂E и ∂F са регулярни [4] в смисъл, че ако E' и F' са околности на E и F, които имат гладки контури, задачите на Дирихле за $Lv = 0$ в $E' \setminus E$ и $F' \setminus F$ с непрекъснати данни по контура имат непрекъснати решения.

Фиксираме произволни $E' \subset \Omega \setminus F$ и $F' \subset \Omega \setminus E$ със свойството (2.7). Нека ζ_E е решение на следната задача на Дирихле

$$Lv = 0 \quad \text{в } E', \tag{2.7}$$

$$v_{\partial E'} = u_{\partial E'}.$$

Означаваме $u_E = u - \zeta_E \in H_0^1(E')$ и $\psi_E = \psi - \zeta_E$. При всяко $w \in H_0^1(E')$ е очевидно изпълнено

$$\int_{E'} u_E L w dx = a(u_E, w) = a(u, w) - \int_{E'} a_{ij}(x) \zeta_{E x_i} w_{x_j} dx = \int_{E'} w d\mu_E.$$

По аналогичен начин дефинираме ζ_F, u_F, ψ_F и установяваме

$$\int_{F'} u_F L w dx = a(u_F, w) = -\int_{F'} w d\mu_F$$

за всяко $w \in H_0^1(F')$.

Като означим с $G_E(x, y)$ и $G_F(x, y)$ функциите на Грийн (§ 1) за областите E' и F' и оператора L и като повторим доказателството на лема 2.1 от [2], получаваме

Лема 2.3. Решението u на вариационното неравенство (2.1) удовлетворява:

$$u_E(x) = \tilde{u}_E(x) = \int_{E'} G_E(x, y) d\mu_E(y) \quad \text{п. н. в } E'$$

и

$$-u_F(x) = \tilde{u}_F(x) = \int_{F'} G_F(x, y) d\mu_F(y) \quad \text{п. н. в } F'.$$

Функциите $\tilde{u}_E$ и $\tilde{u}_F$ са неотрицателни и полунепрекъснати отдолу.

По-нататък нашата цел ще бъде да докажем, че те са непрекъснати, тъй като поради непрекъснатостта на ζ_E и ζ_F оттук ще следва и непрекъснатостта на u.

Понеже $\tilde{u}_{E\,\partial E'} = 0$ и $\tilde{u}_{F\,\partial F'} = 0$, продължаваме $\tilde{u}_E$ и $\tilde{u}_F$ извън областите E' и F съответно като нула.

Нека $O_\rho(x)$ е кълбо с център в точката x и радиус ρ. Дефинираме средна стойност на измерима функция w над $O_\rho(x)$:

$$Av_\rho w(x) = \frac{1}{\operatorname{mes} O_\rho(x)} \int_{O_\rho(x)} w(y)\, dy.$$

Повтаряйки лема 2.2 от [2], получаваме

Лема 2.4.

$$Av_\rho \tilde{u}_E(x) \to \tilde{u}_E(x)$$

и

$$Av_\rho \tilde{u}_F(x) \to \tilde{u}_F(x)$$

при $\rho \to O$ за всяка точка x съответно от E' и F'.

Следната лема е по същество аналог на лема 2.3 от [2]:

Лема 2.5.

$$\tilde{u}_E(x) \geqq \psi_E(x) \text{ над } E \text{ и } \tilde{u}_F(x) \geqq -\psi_F(x) \text{ над } F,$$

където и двете неравенства са в обичаен смисъл.

Доказателство. Ще докажем само първото неравенство. Нека x е точка от вътрешността на E. Следователно за достатъчно малки ρ, тъй като $u_E \geqq \psi_E$ п. н. върху E, намираме

$$Av_\rho \tilde{u}_E(x) = Av_\rho u_E(x) \geqq Av_\rho \psi_E(x),$$

откъдето след граничен преход при $\rho \to 0$ получаваме $\tilde{u}_E(x) \geqq \psi_E(x)$.

Нека $x \in E' \backslash E$. Съгласно (2.6) и (2.7) е непрекъснато и решението $z_E(x)$ на следната задача на Дирихле

$$Lv = 0 \qquad \text{в } E' \backslash E$$

$$v|_{\partial E} = \psi_{E\,\partial E}, \quad v_{\partial E'} = u_{E\,\partial E'}.$$

Понеже $(u_E - z_E)_{\partial E} = (u_E - \psi_{E\,\partial E} \geqq 0$ в $H^1(E')$-смисъл и $(u_E - z_E)|_{\partial E'} = 0$, с помощта на принципа за максимума, използуван в лема 2.3 на [2], заключаваме, че $u_E \geqq z_E$ п. н. в $E' \backslash E$ и следователно $\tilde{u}_E \geqq z_E$ п. н. в

$E'\backslash E$. Тъй като $\tilde{u}_E - z_E \in C(E'\backslash E)$, последното неравенство е валидно навсякъде в $E'\backslash E$. Накрая нека $x \in \partial E$. Означаваме

$$\tilde{\psi}_E(x) = \begin{cases} \psi_E(x), & x \in E \\ z_E(x), & x \in E'\backslash E. \end{cases}$$

Очевидно $\tilde{\psi}_E \in C(E')$. Понеже вече навсякъде в E' (освен върху ∂E) знаем, че $\tilde{u}_E \geqq \tilde{\psi}_E$, намираме $Av_\rho \tilde{u}_E(x) \geqq Av_\rho \tilde{\psi}_E(x)$ за всички достатъчно малки ρ. За $\rho \to 0$ това неравенство дава:

$$\tilde{u}_E(x) \geqq \tilde{\psi}_E(x) = \psi_E(x),$$

с което лема 2.5 е окончателно доказана.

С нейна помощ ще получим важно следствие. Нека за т. $x_0 \in E$ е в сила релацията $\tilde{u}_E(x_0) > \psi_E(x_0)$, т. е. $\tilde{u}_E(x_0) > \tilde{\psi}_E(x_0)$. Но $\tilde{\psi}_E \in C(E')$, а $\tilde{u}_E$ е полунепрекъсната отдолу. Следователно съществуват число $c > 0$ и околност N_1 на точката x_0, в която $\tilde{u}_E - \tilde{\psi}_E \geqq c$. Понеже $\tilde{u}_E = u_E$ п. н., намираме, че $u_E - \tilde{\psi}_E \geqq c$ п. н. в N_1, т. е. $u_E \geqq \frac{c}{2} + \tilde{\psi}_E + \frac{c}{2}$. От друга страна, стойностите на непрекъснатите функции $\tilde{\psi}_E$ и ψ_E в т. x_0 съвпадат, откъдето следва съществуването на околност $N_2 \ni x_0$, в която $\tilde{\psi}_E + \frac{c}{2} > \psi_E$. По такъв начин в околността $N = N_1 \cap N_2$ на точката x_0 намерихме, че $u - \psi = u_E - \psi_E \geqq \frac{c}{2} > 0$ п. н., от което поради лема 1.1 се получава, че $u > \psi$ в т. x_0 в $H^1(\Omega)$-смисъл. Съгласно изложеното в началото на този параграф $\mu_E = 0$ върху N, т. е. $x_0 \in \operatorname{supp} \mu_E$. Следователно навсякъде върху $\operatorname{supp} \mu_E$ непременно е изпълнено равенството $\tilde{u}_E(x) = \tilde{\psi}_E(x) = \psi_E(x)$, което означава, че функцията $\tilde{u}_E$, разглеждана само върху $\operatorname{supp} \mu_E$, е непрекъсната. Като приложим теоремата на Evans (§ 1), получаваме окончателно, че

$$\tilde{u}_E \in C(E').$$

§ 3. Гладкост на решението на вариационното неравенство

В този параграф ще посочим достатъчни условия за функцията ψ, формата $a(u, v)$ и областта Ω, при които решението u на (2.1) ще бъде гладко.

Преди това ще построим един пример, от който се вижда, че гладкостта на решението u не зависи директно от гладкостта на ψ, a и Ω, E, F.

Нека $\Omega \subset R^3$* е кълбото $|x| < 4$, $E = \{x \mid |x| \leqq 1\}$, $F = \{x \mid 2 \leqq |x| \leqq 3\}$, $L = -\Delta$, а ψ е функция от $C_0^\infty(\Omega)$, която е равна на 1 върху E

* При $n = 1$, 2 и $n > 3$ очевидно съществуват подобни примери.

и на -1 върху F. Съгласно леми 2.1 и 2.2 за решението u е в сила $u \leq 1$ в $H_0^1(\Omega)$-смисъл.

Следователно върху E $u=1$ п. н. и върху F $u=-1$ п. н. Понеже решението u е непрекъснато, ще получим:

$$u_{\partial E}=1, \quad u_{\partial F}=-1.$$

Като вземем пред вид още и релациите

$$\Delta u=0, \quad \Omega\setminus(E\cup F)$$

$$u=0, \quad \partial\Omega,$$

получаваме

$$u(x)=\begin{cases} 1 & , E \\ \frac{4}{x}-3, & 1\leq x\leq 2 \\ -1, & F \\ \frac{-12}{x}+3, & 3\leq x\leq 4. \end{cases}$$

Тази функция обаче е само непрекъсната, понеже радиалните първи производни на u върху ∂E и ∂F не съществуват.

Ще посочим едно просто достатъчно условие за функцията ϕ, при което решението на вариационното неравенство ще бъде от класа $C^{1,\alpha}(\Omega)$. Преди това ще изследваме по-подробно нелинейното уравнение, споменато в § 2.

Да въведем банаховото пространство $H^{2,p}(\Omega)$, $p\geq 1$, което се дефинира като попълнение на класа $C^2(\bar{\Omega})$ по нормата

$$\|u\|_{2,p}=\sum_{0\leq|\alpha|\leq 2}\|D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)},$$

където α е мултииндекс.

По-нататък ще бъде необходима следната

Лема на Соболев. Нека $p>n$ и $v\in H^{2,p}(\Omega)$. Тогава v е еквивалентна с функция от класа $C^{1,\alpha}(\Omega)$, $\alpha=1-\frac{n}{p}$.

(3.1) Ще предполагаме, че областта Ω и коефициентите $a_{ij}(x)$ са такива, че задачата на Дирихле

$$Lv=f \quad \text{в} \quad \Omega,$$

$$v=0 \quad \text{върху} \quad \partial\Omega$$

при всяко $f\in L_p(\Omega)$, $p>n$, има решение

$$v\in H_0^1(\Omega)\cap H^{2,p}(\Omega), \text{ за което}$$

$$\|v\|_{2,p}\leq C(\Omega, p, L)\|f\|_{L_p(\Omega)}.$$

Забележка 3.1. За да бъде в сила (3.1), е достатъчно [1] $a_{ij}(x) \in C^1(\Omega)$ и Ω да има двукратно гладък контур.

Лема 3.1. Нека е изпълнено (3.1) и φ е сумируема функция. Нека $g_1, g_2 \in L_p(\Omega)$, $p > n \geqq 2$ и $\theta(t)$, $t \in R^1$, е липшицова функция, за която $0 \leqq \theta(t) \leqq 1$. Тогава съществува решение $v \in H_0^1(\Omega) \cap H^{2,p}(\Omega)$ на уравнението

$$Lv = g_1\,\theta(v-\varphi) + g_2\,\theta(\varphi - v), \tag{3.2}$$

което удовлетворява неравенството

$$\|v\|_{2,p} \leqq C(\|g_1\|_{L_p(\Omega)} + \|g_2\|_{L_p(\Omega)}), \tag{3.3}$$

където константата C зависи само от оператора L, областта Ω и числото p.

Доказателството е напълно аналогично на доказателството на лема 3.2 от [2]. Фиксираме $w \in H_0^1(\Omega)$ и разглеждаме решението $v \in H_0^1(\Omega)$ на

$$Lv = g_1\,\theta(w-\varphi) + g_2\theta(\varphi - w).$$

Понеже дясната страна е очевидно от $L_p(\Omega)$, такова решение съществува съгласно (3.1). По такъв начин се дефинира оператор $v = T(w)$ от $H_0^1(\Omega)$ в $H_0^1(\Omega) \cap H^{2,p}(\Omega)$. Ще покажем, че образът на $H_0^1(\Omega)$ е ограничено множество в $H^{2,p}(\Omega)$, което очевидно ще бъде компактно в $H_0^1(\Omega)$. Действително:

$$\|v\|_{2,p} \leqq C\|Lv\|_{L_p(\Omega)} \leqq C(\|g_1\theta(w-\varphi)\|_{L_p(\Omega)} + \|g_2\theta(\varphi - w)\|_{L_p(\Omega)})$$
$$\leqq C(\|g_1\|_{L_p} + \|g_2\|_{L_p}),$$

защото $|\theta| \leqq 1$. Следователно $T: H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ е компактен оператор, защото освен това е и непрекъснат. Наистина нека $w_n \to w$ в $H_0^1(\Omega)$, тогава $\theta(w_n - \varphi)$ и $\theta(\varphi - w_n)$ клонят в $L_2(\Omega)$ съответно към $\theta(w-\varphi)$ и $\theta(\varphi - w)$ (понеже θ е липшицова функция). Нека $v_n = T(w_n)$, $v = T(w)$, и да означим $v_n - v$ с u. Понеже $u \in H_0^1(\Omega)$, като вземем пред вид дефиницията на слабо решение, получаваме

$$\text{const}\,\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leqq \int_\Omega a_{ij}(x) u_{x_i} u_{x_j}\,dx \tag{3.4}$$

$$= \int_\Omega \{g_1[\theta(w_n - \varphi) - \theta(w-\varphi)] + g_2[\theta(\varphi - w_n) - \theta(\varphi - w_n)]\} u\,dx.$$

Тъй като за всяка тройка функции $f \in L_2(\Omega)$, $g \in L_p(\Omega)$, $p \geqq 2$, и $h \in L_q(\Omega)$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{p}$ е валидно неравенството

$$\left|\int_\Omega fgh\,dx\right| \leqq \|f\|_{L_2}\|g\|_{L_p}\|h\|_{L_q},$$

ще можем да оценим интегралите в (3.4) по следния начин:

$$\int_\Omega g_1[\theta(w_n - \varphi) - \theta(w - \varphi)]u\,dx \leq \text{const} \int_\Omega g_1 \; |w_n - w| \; |u| \, dx$$

$$\leq \text{const} \; \|g_1\|_{L^p(\Omega)} \; \|w_n - w\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|u\|_{L^q(\Omega)}.$$

Но функцията $u \in H_0^1(\Omega)$. Понеже по условие $p > n$, за числото $q = \dfrac{2p}{p-2}$ намираме $q < q^* = \dfrac{2n}{n-2}$. Като приложим теорема 4 от [**7**; 372], получаваме

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq \text{const} \; \|u\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Комбинирайки този резултат с (3.4), тъй като $u = T(w_n) - T(w)$, намираме

$$\|T(w_n) - T(w)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \text{const}\,(L, \Omega, \theta, g_1, g_2) \; \|w_n - w\|_{L^2(\Omega)},$$

с което непрекъснатостта на оператора T е доказана.

Нека образът $\operatorname{Im} T$ се съдържа в кълбото

$$\beta = \{v \; | \; v \in H_0^1(\Omega), \quad \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \text{const}\,(g_1, g_2)\}.$$

(Съществуването на β следва от оценката в началото на доказателството.) След като непрекъснатият компактен оператор T изобразява затвореното изпъкнало множество β в себе си, по теоремата на Шаудер [6; 291] съществува неподвижна точка $u \in \beta$, т. е. $Tu = u$, което означава, че $u \in H_0^1(\Omega)$ удовлетворява (3.2) и като елемент от $\operatorname{Im} T$ принадлежи на $H^{2,p}(\Omega)$ и

$$\|u\|_{2,p} \leq C(\|g_1\|_{L^p(\Omega)} + \|g_2\|_{L^p(\Omega)}).$$

Лемата е доказана.

За да се подчертае по-ясно идеята на доказателството за гладкост на решението, ще докажем най-напред една теорема, която въпреки общността си има твърде неконструктивен характер. Нека

$$\psi \in H_0^1(\Omega) \cap H^{2,p}(\Omega), \quad p > n. \tag{3.5}$$

Оттук следва по лемата на Соболев, че $\psi \in C^{1,1-n/p}(\Omega)$.
Въвеждаме означенията

$$N = \max\,(0, \max_{E \cup F} \psi), \quad M = \min\,(0, \min_{E \cup F} \psi).$$

Съгласно леми 2.1 и 2.2 в сила са н. н. в Ω следните неравенства:

$$M \leq u \leq N,$$

където u е решението на вариационното неравенство (**2.1**).

Основно ще бъде следното предположение:

(3 6) Съществуват функция $\hat{\psi} \in H_0^1(\Omega) \cap H^{2,p}(\Omega)$, $p>n$, и измерими множества E' и F', които са на положително разстояние помежду си, съдържат E и F съответно и такива, че:

$$M \leqq \hat{\psi} \leqq N, \quad \hat{\psi}_{\partial E'} = M, \quad \hat{\psi}|_{\partial F'} = N,$$

$$\hat{\psi}|_E \geqq \psi|_E, \quad \hat{\psi}|_F \leqq \psi_F,$$

$$u_{E'} \geqq \hat{\psi}_{E'}, \quad u_{F'} \leqq \hat{\psi}_{F'}{}^{*}.$$

Забележка 3.2. При формулировката и доказателството на изложената по-долу теорема условието (3.5) не е необходимо, защото се използва само за да осигури съществуването на константите M и N. Вместо него за функцията $\psi \in H_0^1(\Omega)$ ще бъде достатъчно да съществуват константи C_i такива, че $C_1 \leqq \psi \leqq C_2$ над $E \cup F$ в $H_0^1(\Omega)$-смисъл. Тогава, разбира се, и неравенствата между ψ и $\hat{\psi}$ в (3.6) също ще бъдат в $H_0^1(\Omega)$-смисъл.

Теорема 3.1. Нека е в сила (3.1) и $n \geqq 2$. Необходимо и достатъчно условие решението u на вариационното неравенство (2.1) да бъде от класа $H^{2,p}(\Omega)$, $p>n \geqq 2$, е да бъде изпълнено условието (3.6). (Тогава по лемата на Соболев $u \in C^{1,1-n/p}(\Omega)$.)

Доказателство. Необходимост. Нека $u \in H^{2,p}(\Omega)$. Ще конструираме функция $\hat{\psi}$, удовлетворяваща (3.6), където E' и F' са произволно избрани непресичащи се околности на E и F, чиито затворени обвивки се съдържат в Ω. Нека E'' е такава отворена околност на E, че $\bar{E}'' \subset E'$, а функцията $\varkappa_E \in C_0^\infty(E')$ е тъждествено равна на 1 върху E'' и удовлетворява $0 \leqq \varkappa_E \leqq 1$. Означаваме $v = (u-M)\varkappa_E + M$. Очевидно $v_{\partial E'} = M$, $v|_{E''} = u_{E''}$.

Остава да се провери, че над E' е изпълнено $v \leqq u$, т. е. $(u-M)\varkappa_E \leqq u-M$, което е тривиално поради $\varkappa_E \leqq 1$ и $u-M \geqq 0$. По аналогичен начин дефинираме функция w над F', която в околност на F съвпада с u и удовлетворява

$$w|_{\partial F'} = N \quad \text{и} \quad w \geqq u \quad \text{над } F'.$$

Търсената функция $\hat{\psi}$ построяваме като продължение в $H_0^1(\Omega) \cap H^{2,p}(\Omega)$ на вече дефинираната над $E' \cap F'$ функция.

Достатъчност. Означаваме

* Последните две неравенства са в $H_0^1(\Omega)$-смисъл.

$$\theta_m(t)=\begin{cases} 1 & , \ t\leqq\frac{1}{2m}, \\ 2-2mt & , \ \frac{1}{2m}\leqq t\leqq\frac{1}{m}, \\ 0 & , \ t\geqq\frac{1}{m}. \end{cases}$$

С помощта на лема 3.1, в която сме положили $\varphi=\hat{\psi}$, $\theta(t)=\theta_m(t)$ и $g_1=e'(x)\max(0,\ L\hat{\psi})$, $g_2=f'(x)\min(0,\ L\hat{\psi})$, където e' и f' са характеристичните функции на множествата E' и F', намираме решение $u_m\in H_0^1(\Omega)\cap H^{2,p}(\Omega)$ на задачата

$$(3.7)\qquad Lv=e'\max(0,\ L\hat{\psi})\,\theta_m(v-\hat{\psi})+f'\ \min(0,\ L\hat{\psi})\theta(\hat{\psi}-v),$$
$$v_{\partial\Omega}=0.$$

Понеже $\|u_m\|_{2,p}\leqq\text{const}$, съществува подредица $\{u_m\}$, сходяща в $H^{1,p}(\Omega)$ към някаква функция $\hat{u}\in H^{2,p}(\Omega)$. От теоремите за влагане [7; 372] следва, че подредицата $\{u_m\}$ клони равномерно към $\hat{u}$ и дори може да се счита, че

$$(3.8)\qquad \|u_m-\hat{u}\|<\frac{1}{m}.$$

Ще покажем, че $\hat{u}$ съвпада с решението u на вариационното неравенство. Най-напред ще покажем, че са в сила неравенствата

$$M\leqq\hat{u}\leqq N.$$

Ако допуснем, че съществува точка x_0, в която $\hat{u}(x_0)<M$, то от непрекъснатостта на $\hat{u}$ следва съществуването на цяла околност A на точката x_0, в която $\hat{u}<M$ и $\hat{u}_{\partial A}=M$. (Понеже $\hat{u}_{\partial\Omega}=0$ и $M\leqq 0$, е очевидно както съществуването на A, така и релацията $A\subset\Omega$.) Нека $w\in C_0^1(A)$, $w\geqq 0$. Пред вид (3.7) е изпълнено

$$(Lu_m,\ w)=(e'.\max(0,\ L\hat{\psi})\,\theta_m(u_m-\hat{\psi})$$
$$+f'.\min(0,\ L\hat{\psi})\theta_m(\hat{\psi}-u_m),\ w).$$

Нека числото m_0 е толкова голямо, че върху компакта $\operatorname{supp} w$ да бъде в сила неравенството $\hat{u}\leqq M-\frac{2}{m_0}$, а следователно и $\hat{u}\leqq\hat{\psi}-\frac{2}{m_0}$. Заедно с (3.8) последното дава

$\hat{\psi}-u_m\geqq\hat{\psi}-\hat{u}+\hat{u}-u_m\geqq\frac{2}{m_0}-\frac{1}{m}\geqq\frac{1}{m}$ при $m\geqq m_0$. За такива номера

$m: \theta_m(\hat{\psi} - u_m) = 0$. Следователно

$$\int_A a_{ij}(x) u_{mx_i} w_{x_j} dx = \int_\Omega e' \max(0, L\hat{\psi}) \theta_m(u_m - \hat{\psi}) w dx \geqq 0,$$

откъдето след граничен преход при $m \to +\infty$ се получава

$\int_A a_{ij}(x) \hat{u}_{x_i} w_{x_j} dx \geqq 0$, което може да се запише и по следния начин:

$$\int_A a_{ij}(x) (\hat{u} - M)_{x_i} w_{x_j} dx \geqq 0.$$

Поради произволния избор на $w \in C_0^1(A)$, $w \geqq 0$, с помощта на принципа за максимума (лема 1.4) се вижда, че $\hat{u} \geqq M$ над A, което противоречи на допускането. По същия начин се доказва и неравенството $\hat{u} \leqq N$.

Следващата стъпка ще бъде доказването на неравенствата

$$\hat{u} \geqq \hat{\psi} \text{ над } E' \text{ и } \hat{u} \leqq \hat{\psi} \text{ над } F'.$$

Ако допуснем, че съществува точка $x_0 \in E'$, в която $\hat{u}(x_0) < \hat{\psi}(x_0)$, то поради $\hat{u}_{|\partial E'} \geqq M = \hat{\psi}_{\partial E'}$ следва съществуването на множество B, $B \subset E'$ такова, че

$$\hat{u} < \hat{\psi} \text{ в } B \text{ и } \hat{u}_{\partial B} = \hat{\psi}_{\partial B}.$$

Както по-горе, при всяко $w \in C_0^1(B)$, $w \geqq 0$:

$$\int_B a_{ij}(x)(u_m - \hat{\psi})_{x_i} w_{x_j} dx$$

$$= \int_\Omega [e'(x) \max(0, L\hat{\psi}) \theta_m(u_m - \hat{\psi}) - L\hat{\psi}] w dx,$$

стига номерът m да бъде достатъчно голям. Но върху $\operatorname{supp} w$: $e' = 1$, защото $\operatorname{supp} w \subset B \subset E'$ и $\theta_m(u_m - \hat{\psi}) = 1$, защото разликата $u_m - \hat{\psi}$ става отрицателна за големи m. Следователно

$$\int_B a_{ij}(x)(u_m - \hat{\psi})_{x_i} w_{x_j} dx = \int_B [\max(0, L\hat{\psi}) - L\hat{\psi}] w dx \geqq 0,$$

защото и двете функции под интеграла са неотрицателни. След граничен преход при $m \to +\infty$:

$$\int_B a_{ij}(x) (\hat{u} - \hat{\psi})_{x_i} w_{x_j} dx \geqq 0,$$

откъдето отново с помощта на принципа за максимума намираме неравенството $\hat{u} \geqq \hat{\psi}$ над B, противоречащо на допускането. Остава да се провери, че $\hat{u}$ е решение на неравенството

$$a(\hat{u},\ v-\hat{u}) \geqq 0 \qquad \text{за всяко } v \in \hat{K},$$

където с $\hat{K}$ е означено множеството от всички функции v, принадлежащи на $H_0^1(\Omega)$ и удовлетворяващи в $H_0^1(\Omega)$-смисъл неравенствата

$$v \geqq \hat{\psi} \quad \text{над } E' \quad \text{и} \quad v \leqq \hat{\psi} \quad \text{над } F'.$$

Лесно се проверява, че операторът

$$Av = Lv - e' \max(0,\ L\hat{\psi})\ \theta_m(v-\hat{\psi}) - f' \min(0,\ L\hat{\psi})\theta_m(\hat{\psi}-v)$$

е монотонен относно скаларното произведение в $L_2(\Omega)$, т. е.

$$(A(v_1)-A(v_2),\quad v_1-v_2) \geqq 0,$$

където v_i са поне от $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. В частност $(A(v)-A(u_m),\ v-u_m) \geqq 0$ за всяко $v \in C_0^\infty(\Omega)$. Но от (3.7) следва $(A(u_m),\ v-u_m)=0$, което заедно с горното неравенство дава

$$(A(v),\ v-u_m) \geqq 0,\ v \in C_0^\infty(\Omega). \tag{3.9}$$

Нека $v \in C_0^\infty(\Omega)$ е такава, че

$$v-\hat{\psi} > \frac{1}{m_0} \text{ над } E' \text{ и } \quad -v+\hat{\psi} > \frac{1}{m_0} \text{ над } F', \tag{3.10}$$

където m_0 е естествено число. При този избор на v се получава

$$e'\theta_m(v-\hat{\psi})=0 \ \text{ и } \ f'\theta_m(\hat{\psi}-v)=0 \ \text{ в } \Omega \text{ за } m \geqq m_0,$$

поради което (3.9) добива вида

$$\int_\Omega a_{ij}(x) v_{x_i}(v-u_m)_{x_j}\, dx \geqq 0. \tag{3.11}$$

Понеже всяка функция от $H_0^1(\Omega)$ може да се апроксимира в $H_0^1(\Omega)$ с функции от $C_0^\infty(\Omega)$, можем да считаме че (3.11) е валидно за всяко $v \in H_0^1(\Omega) \cap C(\Omega)$ със свойствата (3.10). От друга страна, е очевидно, че ако за $v \in H_0^1(\Omega) \cap C(\Omega)$ са изпълнени неравенствата

$$v > \hat{\psi} \text{ над } E' \text{ и } v < \hat{\psi} \text{ над } F', \tag{3.10'}$$

съществува число m_0, за което е валидно (3.10), тъй като $\overline{E}'$ и $\overline{F}'$ са компактни.

При фиксирано $t \in (0,1)$ функцията $w = (1-t)\hat{u} + t v_1$ притежава свойствата (3.10′) при условие, че $v_1 \in H_0^1(\Omega) \cap C(\Omega)$ ги притежава. Замествайки v с w в (3.11) и извършвайки граничен преход при $m \to +\infty$, получаваме $a(w, w-\hat{u}) \geq 0$, т. е.

$$a((1-t)\hat{u} + t v_1,\ t(v_1 - \hat{u})) \geq 0.$$

След като разделим с t и оставим $t \to +0$, намираме

$$a(\hat{u},\ v_1 - \hat{u}) \geq 0. \tag{3.12}$$

Ако $v \in \hat{K}$ е произволна, т. е. $v \geq \hat{\psi}$ над E' и $v \leq \hat{\psi}$ над F' в $H_0^1(\Omega)$-смисъл, след апроксимиране на v с функции от $C_0^1(\Omega)$, притежаващи свойствата на функцията v_1, и извършване на граничен преход в (3.12), установяваме окончателно, че

$$a(\hat{u},\ v - \hat{u}) \geq 0 \quad \text{за всяко } v \in \hat{K}.$$

Според последните две условия в (3.6) решението u на вариационното неравенство принадлежи на $\hat{K}$ и следователно

$$a(\hat{u},\ u - \hat{u}) \geq 0. \tag{3.13}$$

От друга страна, очевидно $\hat{u} \in K$ и следователно

$$a(u,\ \hat{u} - u) \geq 0. \tag{3.14}$$

Като съберем (3.13) и (3.14) почленно и вземем пред вид коерцитивността на формата $a(u, v)$, получаваме

$$\|u - \hat{u}\|_{H_0^1(\Omega)} = 0,$$

с което теорема 3.1 е доказана.

Следствие 3.1. Едно достатъчно условие за гладкост на решението на вариационното неравенство е функцията ψ от (3.5) да удовлетворява условията

$$\psi_{\partial E} = M \quad \text{и} \quad \psi_{\partial F} = N,$$

а множествата E и F да са измерими.

Доказателство. Прилагаме достатъчността от теорема 3.1, като ролята на $\hat{\psi}$ се играе от самата функция ψ, а $E' = E$ и $F' = F$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Agmon, S., Douglis, A., Nirenberg, L.: Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions, I. Comm. Pure Appl. Math., **12** (1959), 623—727.

2. Lewy, H., Stampacchia, G.: On the regularity of the solution of a variational inequality. Comm. Pure Appl. Math., **22** (1969), 153—188.
3. Lions, J. L., Stampacchia, G.: Variational inequalities. Comm. Pure Appl. Math., **20** (1967), 493—519.
4. Littman, W., Stampacchia, G., Weinberger, H. F.: Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, XVII (1963), 43—77.
5. Schwartz, L.: Théorie des distributions. Paris, 1966.
6. Люстерник, Л. А., Соболев, В. И.: Элементы функционального анализа. Москва, 1965, 2. изд.
7. Смирнов, В. И.: Курс высшей математики, V т. Москва, 1959.
8. Brézis, H.: Inéquations variationnelles. J. Math. Pures Appl., **51** (1972), 1—168.

Постъпила на 20. X. 1973 г.

RÉGULARITÉ DE LA SOLUTION D'UNE INÉQUATION VARIATIONNELLE ELLIPTIQUE À DEUX CONTRAINTES

I. Iordanov

(RÉSUMÉ)

Soit $\Omega \subset R^n$ un domaine borné. Pour $u, v \in H_0^1(\Omega)$ la relation $u \geqq v$ sur G au sens de $H_0^1(\Omega)$ $(\bar{G} \subset \Omega)$ signifie qu'il existe des suites $\{u_n\}$ et $\{v_n\}$ de fonctions de $C_0^1(\Omega)$, convergentes dans $H_0^1(\Omega)$ vers u et v resp., lesquelles satisfont $u_n \geqq v_n$ sur G. Soit $\psi \in H_0^1(\Omega)$ et $E = \bar{E} \subset \Omega$, $F = \bar{F} \subset \Omega$, $E \cap F = \emptyset$. L'ensemble.

$K = \{v \; v \in H_0^1(\Omega), \; v \geqq \psi$ sur E et $v \leqq \psi$ sur F au sens de $H_0^1(\Omega)\}$ est convexe et fermé dans $H_0^1(\Omega)$. La forme bilinéaire

$$a(u, v) = \int_\Omega \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i} v_{x_j} dx, \; u, v \in H_0^1(\Omega),$$

où les fonctions $a_{ij}(x)$ sont bornées et mésurables dans Ω, et telles que $\sum a_{ij} \xi_i \xi_j \geqq \nu \, \xi^2$, $\nu > 0$, pour tout $\xi \in R^n$ et pour presque tout $x \in \Omega$, est coercive sur $H_0^1(\Omega)$, c'est-à-dire:

$$a(u, u) \geqq \nu \, u_{H_0^1(\Omega)} \text{ pour tout } u \in H_0^1(\Omega).$$

Il existe [3] $u \in K$ unique solution de l'inéquation variationnelle: $a(u, v-u) \geqq 0$ pour tout $v \in K$. Par les méthodes de [2], à condition que les frontières $\partial\Omega$, ∂E et ∂F sont régulières [4], on déduit que $u \in C(\Omega)$.

La différentiabilité de la solution u ne dépend pas directement de la régularité de la fonction ψ, des frontières ∂E, ∂F, $\partial\Omega$ et des coefficients $a_{ij}(x)$, parce que on peut construire (§ 3) un exemple quand malgré qu'ils sont indéfiniment différentiables, la solution u est seulement continue.

Dans l'article on démontre, que si $\psi \in H^{2,p}(\Omega)$, $p>n$, $\psi_{\partial E}=\min\limits_{E\cup F}\psi$, $\psi_{\partial F}=\max\limits_{E\cup F}\psi$, et si $\partial\Omega$ et $a_{ij}(x)$ sont suffisamment régulières, alors la solution $u \in C^{1,1-\frac{n}{p}}(\Omega)$.

On peut démontrer de même façon et la régularité de la solution du problème traité par Lewy et Stampacchia [2] sous l'hypothèse

$$\psi \in H^{2,p}(\Omega),\ p>n,\ \text{et}\ \psi_{\partial E}\leqq 0.$$