ОЦЕНКА ЗА ε-ЕНТРОПИЯТА НА ПРОСТРАНСТВОТО ОТ ФУНКЦИИ АНАЛИТИЧНИ В ЕДИНИЧНИЯ КРЪГ

Борислав Д. Боянов

Да означим със $F(A)$ класа от всички аналитични, реални в интервала $[-1,1]$ функции, за които съществуват аналитични продължения ограничени по модул в единичния кръг $G=\{z,\ |z|<1\}$ с константата A. Ще изчислим ε-ентропията на класа $F(A)$ относно хаусдорфовото разстояние, определено съгласно [1], и ще получим оценки отгоре за ε-ентропията на някои компактни подпространства на $F(A)$ относно равномерното разстояние.

Да означим с $H_\varepsilon^h(F(A)$ ε-ентропията на $F(A)$, когато за разстояние между две функции f и g от $F(A)$ приемаме хаусдорфовото растояние в интервала $[-1,1]$. В сила е следната

Теорема 1. ε-ентропията $H_\varepsilon^h(F(A))$ удовлетворява неравенствата

$$\frac{8}{27}\frac{(\ln 2)^2}{\pi^2} \leqq \varliminf_{\varepsilon\to 0}\frac{H_\varepsilon^h(F(A))}{\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^3} \leqq \frac{2(\ln 2)^2}{\pi^2}.$$

Доказателство. Ще използваме известните оценки за ε-ентропията на класа $F_{R,A}^{-1,1}$ се вземе от всички аналитични, реални в интервала $[-1,1]$ функции, за които съществуват аналитични продължения ограничени по модул с константа A в елипсата E_R с фокуси в -1 и 1 и сума от полуосите R. В [2] е доказано, че ако за норма в $F_{R,A}^{-1,1}$ $\max|f(x)|$, то

$$H_\varepsilon(F_{R,A}^{-1,1}) = \frac{1}{2\log R}\left\{\left(\log\frac{A}{\varepsilon}\right)^2 + O\left(\log\log\frac{1}{\varepsilon}\right)\right\} \tag{1}$$

Да означим с $H_\varepsilon^h(F_\Delta)$ ε-ентропията на класа $F(A)$, когато разстоянието между две функции от класа се взема в интервала $[-1+\Delta,\ 1-\Delta]$ и с $H_\varepsilon^h(F_\Delta)$, когато разстоянието се взема в $[-1,\ -1+\Delta]\cup[1-\Delta,\ 1]$. Имаме следното неравенство:

$$H_\varepsilon^h(F(A)) \leqq H_\varepsilon^h(F_\Delta) + H_\varepsilon^h(F_\Delta).$$

Но $H_\varepsilon^h(F_\Delta)$ можем да оценим отгоре с $\frac{\Delta}{\varepsilon}\log\left\{\frac{1}{2}\frac{A}{\varepsilon}\left(\frac{A}{\varepsilon}+1\right)\right\}$. Действително, $H_\varepsilon^h(F_\Delta)$ е по-малко от ε-ентропията на класа от всички непрекъснати и ограничени с A в интервала $[1-\Delta,\ 1]$ функции. Остава да приложим получената в [1] оценка за ентропията на този клас. За да

оценим $H_\varepsilon^h(F_\Delta)$, постъпваме по следния начин. Изобразяваме чрез функцията $w(z)$ конформно вътрешността на единичния кръг G във вътрешността на елипсата E_R, така, че точките от реалната ос да отидат в точки от реалната ос, а $-1+\Delta$ и $1-\Delta$ в -1, 1 съответно. Функцията $w(z)$ е следната

$$w(z)=\sin\left[\frac{\pi}{2K}\varphi\left(\frac{2z}{k(1+z)^2}\right)\right],$$

където $\varphi(\xi)=\int\limits_0^\xi \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$, K е пълният елиптичен интеграл от първи род за модула k. Модулът k се определя от равенството $1-\frac{1-\sqrt{1-k^2}}{k}=\Delta$. Сумата от полуосите на елипсата E_R е свързана с Δ съотношението

$$\ln R(\Delta)=\frac{\pi}{2}\frac{K'}{K}.$$

По теорема 2 от [3] $\ln R(\Delta)=\frac{\pi^2}{4}\frac{\theta_1(\Delta)}{\ln\frac{1}{\Delta}}$, където $\lim\limits_{\Delta\to 0}\theta_1(A)=1$. Понеже $H_\varepsilon^h(F_\Delta)\leqq H_\varepsilon(F_{R,A}^{-1,1})$, то от (1), избирайки $\Delta=\varepsilon$ получаваме

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{H_\varepsilon^h(F(A))}{\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^3}\leqq\frac{2(\ln 2)^2}{\pi^2}.$$

Нека $\varepsilon_1>0$ и функциите $\{g_i(w)\}^N$, съставляват ε_1 — различимо множество в $F_{R,A}^{-1,1}$ относно равномерното разстояние в $[-1,1]$. Тогава функциите $\{g_i(w(z))\}^N$, ще бъдат $\frac{\varepsilon_1\Delta}{1+\Delta}$ — различими относно хаусдорфовото разстояние в $[-1+\Delta,\ 1-\Delta]$. Това следва от дефиницията на хаусдорфово разстояние и от обстоятелството, че производната на една аналитична в кръга G функция и ограничена там с A е ограничена по модул в $[-1+\Delta,\ 1-\Delta]$ с $\frac{A}{\Delta}$. Избирайки $\varepsilon=\frac{\varepsilon_1\cdot\Delta}{1+\Delta}$; получаваме $H_{\varepsilon_1}(F_{R,A}^{-1,1})\leqq H_\varepsilon^h(F_\Delta)$. От (1) при $\Delta=\varepsilon^{\frac{1}{\varepsilon}}$ изчисляваме

$$\frac{8}{27}\frac{(\ln 2)^2}{\pi^2}\leqq\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{H_\varepsilon^h(F(A))}{\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^3}.$$

Теоремата е доказана.

Като непосредствено следствие от тази теорема получаваме следния резултат, доказан директно в [3].

Следствие 1. Ако $F(A, B)$ е класът от всички функции $f \in F(A)$, такива, че $\max\limits_{|x| \leq 1} f'(x) \leq B$, то ε-ентропията $H_\varepsilon(F(A, B))$ относно равномерното разстояние удовлетворява неравенствата

$$\frac{8}{27} \frac{(\ln 2)^2}{\pi^2} \leq \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{H_\varepsilon(F(A, B))}{\left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^3} \leq \frac{2(\ln 2)^2}{\pi^2}.$$

Доказателството се основава единствено на известното [1] съотношение $r(f, g) \leq \varphi(f, g) + \omega f(r(f, g))$, където $r(f, g)$ е хаусдорфовото разстояние между f и g, а $\varphi(f, g)$ е равномерното разстояние.

Да означим с $F(A, \omega(\delta))$ класа от всички функции $f \in F(A)$, които имат модул на непрекъснатост $\omega f(\delta) \leq \omega(\delta)$ в интервала $[-1,1]$. За норма в пространството $F(A, \omega(\delta))$ вземаме $\max\limits_{|x| \leq 1} |f(x)|$.

Теорема 2. В сила е следното неравенство:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{H_\varepsilon(F(A, \omega(\delta))}{\left(\log \frac{1}{\omega^{-1}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}\right)^3} \leq \frac{2(\ln 2)^2}{\pi^2}.$$

Доказателство. Да разгледаме класа $F_\lambda(A)$ от всички функции $f(\lambda z)$, където $f \in F(A, \omega(\delta))$. Очевидно функциите $g(z) = f(\lambda z)$ са аналитични в кръга с радиус $\frac{1}{\lambda}$. Освен това

$$|f(z) - f(\lambda z)| \leq \omega(|\lambda z - z|) \leq \omega(1 - \lambda) \tag{2}$$

при $|z| \leq 1$ и $\lambda \leq 1$. Функцията

$$w_1(z) = \sin\left[\frac{\pi}{2K} \varphi\left(\frac{2\lambda}{k(1 + \lambda^2 z^2)}\right)\right]$$

изобразява конформно вътрешността на кръга с радиус $\frac{1}{\lambda}$ и център в началото във вътрешността на елипсата E_R, така че точките $(-1 + \Delta)/\lambda$ и $(1 - \Delta)/\lambda$ отиват в -1 и 1 съответно. Тук $\Delta = 1 - \frac{1 - \sqrt{1 - k^2}}{k}$. Да изберем k така, че да бъдат изпълнени равенствата $(-1 + \Delta)/\lambda = -1$ и $(1 - \Delta)/\lambda = 1$. Вижда се, че k се определя от уравнението $\Delta = 1 - \lambda$, което се свежда до

$$\frac{1-\sqrt{1-k^2}}{k}=\lambda.$$

От (1) е ясно, че за всяко $\varepsilon_1>0$ има система от функции $\{g_i(w_1)\}_1^N$, които приближават функциите от $F_{R,A}^{-1,1}$ с точност ε_1 и

$$\log N=\frac{1}{2\log R}\left\{\log^2\frac{A}{\varepsilon_1}+O\left(\log\frac{1}{\varepsilon_1}\log\log\frac{1}{\varepsilon_1}\right)\right\}. \tag{3}$$

Тогава функциите $\{g_i(w_1(z))\}_1^N$ ще приближават със същата точност всяка функция f от класа $F_\lambda(A)$ в интервала $[-1,1]$. Оттук и от (2) следва, че ако $g(z)\in F(A,\omega(\delta))$, то ще се намери функция $g^*(2)$ от системата $\{g_i(w_1(z)\}_1^N$ такава, че $g(x)\quad g^*(x)\leqq\omega(1-\lambda)+\varepsilon_i$ за всяко $x\in[-1,1]$. Избираме $\varepsilon_1=\varepsilon/2$ и $1\quad\lambda=\omega^{-1}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$. Тъй като

$$\log R(\lambda)=\frac{\pi^2}{4}\frac{\theta_1(1-\lambda)}{\log\frac{1}{1-\lambda}}(\ln 2)^2,$$

то от (3) следва верността на теоремата.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сендов, Бл.: Некоторые вопросы теории приближений функций и множеств в хаусдорфовой метрике. Усп. мат. наук, **24**, вып. 5, (149), (1969), 141 — 178.
2. Витушкин, А. Г.: Оценка сложности задачи табулирования. Москва, 1959.
3. Боянов, Б. Д.: Оптимальная скорость интегрирования и ε-энтропии одного класса аналитических функций. Мат. Заметки, **14**, вып 1 (1973), **3** — 10.

Постъпила на 20. X. 1973 г.

ESTIMATES FOR THE ε-ENTROPY OF THE SPACE OF FUNCTIONS ANALYTIC IN THE UNIT CIRCLE

B. D. Boyanov

(SUMMARY)

Let $F(A)$ be the class of all real analytic functions in $[-1,1]$ that have bounded by A analytic continuation in the unit circle $G=\{z:\ z<1\}$. Let $H_\varepsilon^h(F(A))$ be the ε-entropy of $F(A)$ with respect to the Hausdorff distance between the functions in $[-1,1]$. It is proved that

$$\frac{8}{27}\frac{(\ln 2)^2}{\pi^2}\leqq\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{H_\varepsilon^h(F(A))}{\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^3}\leqq\frac{2(\ln 2)^2}{\pi^2}.$$

Estimates are found also for the ε-entropy of the class $F(A,\omega)=\{f:\ f\in F(A),\ \omega(f;\delta)\leqq\omega(\delta)\}$ with respect to the uniform distance.