ОБ ОДНОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ

Борислав Д. Боянов и Митко Цветанов

1. Введение. Рассматривается задача о верхней грани функционала

$$F(x)=\int_a^b x(t)dt \tag{*}$$

при некоторых ограничениях на подынтегральную функцию $x(t)$.

В п. 4. двойственными методами, разработанными в [5], решается задача о верхней грани функционала (*), являющаяся на самом деле задачей оптимального управления. Полученные для одного специального случая результаты используются при решении одной задачи теории приближении.

В п. 3 представлено непосредственное решение того же специального случая, используя известные результаты об оптимальности линейных методов приближения в выпуклых классах.

2. Постановка задачи. Обозначим через $W^{(r)}[a,b]$ класс всех дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ функций с кусочно непрерывной и ограниченной числом 1 r-ой производной. Пусть

$$W^{(r)}_{a,b}\equiv\{x:\ \ x\in W^{(r)}_{[a,b]},\ \ x^{(k)}(a)=x^{(k)}(b)=0,\ \ k=0,1,\ldots,\ r-1\},$$

$$W^{(r)}_{a}\equiv\{x:\ \ x\in W^{(r)}_{[a,b]},\ \ x^{(k)}(a)=0,\ \ k=0,1,\ldots,\ \ r-1\}.$$

Рассмотрим задачу: найти функцию $h(t)\in W^{(r)}_{a,b}$, для которой

$$\int_a^b h(t)dt=\sup_{x\in W^{(r)}_{a,b}}\int_a^b x(t)dt. \tag{1}$$

3. Специальный случай. Сформулируем лемму Смоляка [1] (см. также [2]), которой будем пользоваться в дальнейшем.

Пусть H — линейное метрическое пространство, F — выпуклое центральносимметричное множество в H с центром симметрии 0. Пусть $L(f)$, $L_1(f),\ldots,$ $L_N(f)$ линейные функционалы, определенные в F. Произвольный способ приближения функционала $L(f)$, использующий информацию об f в виде информации о значениях $L_k(f)$, $k=1,2,\ldots,N$, можно задать через функцию S_c N переменными следующим образом

$$L(f)\approx S(L_1(f),\ L_2(f),\ldots,\ L_N(f)).$$

Величина

$$R(L_1, L_2, \ldots, L_N) = \sup_{f \in F} L(f) - S(L_1(f), \ldots, L_N(f))$$

называют погрешностью способа S на классе F.

Лемма. Существуют числа $D_1, D_2, \ldots, D_N$ такие, что

$$\sup_{f \in F} L(f) - \sum_{i=1}^{N} D_i L_i(f) = \inf_S \sup_{f \in F} L(f) - S(L_1(f), \ldots, L_N(f)) ;$$

иначе: среди способов приближения функционала $L(f)$ с наилучшей оценкой погрешности есть линейный.

Следующее предложение непосредственно получается из доказательства леммы.

Следствие. Среди функций, на которых оптимальный для данного набора функционалов метод приближения $L(f)$ имеет наибольшую погрешность, имеется удовлетворяющая условиям

$$L_1(f) = L_2(f) = \ldots = L_N(f) = 0.$$

Основываясь на сформулированной лемме, задачу (1) можно свести к другой экстремальной задаче, уже в классе $W_a^{(r)}$:

$$\sup_{x \in W_{a,b}^{(r)}} \int_a^b x(t)dt = \inf_{\{A_k\}} \sup_{x \in W_a^{(r)}} \left\{ \int_a^b x(t)dt - \sum_{k=0}^{r-1} A_k x^{(k)}(b) \right\}. \tag{2}$$

По формуле Тейлора, при условии, что $x \in W_a^{(r)}$, легко получить следующие равенства:

$$x(t) = \frac{1}{(r-1)!} \int_a^b (t-\tau)^{r-1} x^{(r)}(\tau)\, d\tau,$$

$$x^{(k)}(b) = \frac{1}{(r-k-1)!} \int_a^b (b-t)^{r-k-1} x^{(r)}(t)\, dt, \quad k=0, 1, \ldots, r-1.$$

Подставляя эти выражения в (2), получаем

$$\sup_{x \in W_{a,b}^{(r)}} \int_a^b x(t)dt = \inf_{\{A_k\}} \sup_{x \in W_a^{(r)}} \int_a^b \left[\frac{(b-t)^r}{r!} - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{A_k}{(r-k-1)!} (b-t)^{r-k-1} \right] x^{(r)}(t)\, dt = \inf_{\{A_k\}} \frac{1}{r!} \int_a^b (b-t)^r - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{A_k r!}{(r-k-1)!} (b-t)^{r-k-1} dt = \frac{(b-a)^{r-1}}{2^{2r} r!},$$

так как верхний интеграл принимает минимальное значение, когда под знаком интеграла стоит полином Чебышева $U_r(t;(a, b])$ второго рода на отрезке $[a, b]$.

Понятно, что искомая функция $h(t)$ определяется r-кратным интегрированием функции

$$\frac{(-1)^r}{r!}\operatorname{sgn} U_r(t;[a, b])$$

с нулевыми аддитивными постоянными.

4. Решение двойственными методами. Задача (1) является задачей оптимального управления, если мы положим

$$\begin{aligned} &x(t)=x_0(t),\\ &\dot{x}_0(t)=x_1(t),\\ &\cdots\cdots\\ &\dot{x}_{r-1}(t)=u(t), \qquad u(t)\leq 1. \end{aligned}$$

Для решения этой задачи мы применим двойственные методы, состоящие в следующем: найти верхнюю грань функционала

$$J(x, u)=\int_a^b f(x(t), u(t))dt,$$

где функция f предполагается непрерывной и вогнутой по (x, u), $x^{(i)}(a)=\alpha_i$, $x^{(i)}(b)=\beta_i$ $i=0\div r-1$, $x(t)\in R^r$, $u(t)\in U\subset R^p$, $\dot{x}=Ax+Bu$; здесь $A:R^r\to R^r$ и $B:R^p\to R^r$ — линейные операторы. Двойственная к функции f получается по формуле

$$f^*(\dot{y}, y)=\inf_{x,u}[<x, \dot{y}>+<Ax+Bu, y>-f(x, u)], \tag{3}$$

где $<.,.>$ есть обыкновенное скалярное произведение в R^n. Применяя результаты [5], получаем

$$\sup\int_a^b f(x(t), u(t))\,dt=\inf[<x, y>-\int_a^b f^*(\dot{y}(t), y(t))dt]. \tag{4}$$

В рассматриваемом нами случае $f(x, u)=x_0$ и формула (3) дает

$$\begin{aligned} &f^*(\dot{y}_0, \dot{y}_1, \ldots, \dot{y}_{r-1}, y_0, y_1, \ldots, y_{r-1})\\ &=\inf_{x_0,\ldots,x_{r-1},u}[x_0\dot{y}_0+x_1\dot{y}+\ldots+x_{r-1}\dot{y}_{r-1}+x_1y_0+y_2y_1+\ldots+x_{r-1}y_{r-2}\\ &+uy_{r-1}-x_0]=\inf_{x_0,\ldots,x_{r-1},u}[x_0(y_0-1)+x_1(\dot{y}_1+y_0)+x_2(\dot{y}_2+y_1)+\ldots\\ &+x_{r-1}(\dot{y}_{r-1}+y_{r-2})+uy_{r-1}]. \end{aligned} \tag{5}$$

Очевидно

(6) $$\inf_{|u|\leq 1} u y_{r-1} = -|y_{r-1}|, \quad \text{т. е.} \quad u = -\operatorname{sgn} y_{r-1},$$

а ввиду независимости $x_0, \ldots, x_{r-1}$ и линейности слагаемых в (5), мы получаем

$$f^* = -|y_{r-1}|,$$
$$\dot{y}_0 = 1,$$
$$\dot{y}_1 + y_0 = 0,$$
$$\dot{y}_2 + y_1 = 0,$$
$$\cdots\cdots$$
$$\dot{y}_{r-1} + y_{r-2} = 0.$$

Решение этой системы следующее:

$$y_0 = t + c_0,$$
$$y_1 = -\frac{1}{2} t^2 - c_0 t + c_1,$$
$$y_2 = \frac{1}{3!} t^3 + \frac{c_0}{2!} t^2 - c_1 t + c_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_{r-1} = (-1)^{r-1} \frac{t^r}{r!} + (-1)^{r-1} \frac{c_0}{(r-1)!} t^{r-1} + (-1)^{r-2} \frac{c_1}{(r-2)!} t^{r-2}$$
$$+ \ldots - c_{r-2} t + c_{r-1}.$$

Формула (4) дает

(8) $$\sup_{x \in W[a,b]^{(r)}} \int_a^b x(t)dt = \inf_{\{y_i\}} \Big[\langle x_1\ y \rangle \Big|_a^b + \int_a^b \Big| (-1)^{r-1} \frac{t^r}{r!}$$
$$+ \ldots - c_{r-2} t + c_{r-1} \Big| dt \Big].$$

Здесь

$$\langle x, y \rangle \Big|_a^b = \Big| x_0(t) y_0(t) + x_1(t) y_1(t) + \ldots + x_{r-1}(t) y_{r-1}(t) \Big|_a^b$$

и inf справа берется по всем полиномам y_i степени $i+1$.

Рассмотрим частный случай $r = 2$, $\alpha_1 = \beta_1 = 0$. Формула (8) принимает вид

$$\sup_{x \in W^{(r)}[a,b]} \int_a^b x(t)dt = \inf \left[x_0(t) y_0(t) \Big|_a^b + \int_a^b \left| -\frac{1}{2} t^2 - \frac{c_0}{1} t + c_1 \right| dt \right]$$
$$= \inf \left\{ [\beta_0(b + c_0) - \alpha_0(\alpha + c_0)] + \int_a^b \left| -\frac{1}{2} t^2 - c_0 t + c_1 \right| dt \right\}$$
$$= \inf_{c_0, c_1} \left\{ [c_0(\beta_0 - \alpha_0) + b\beta_0 - a\alpha_0] + \int_a^b \left| -\frac{1}{2} t^2 - c_0 t + c_1 \right| dt \right\}.$$

Для подынтегральной функции $y_1 = -\frac{1}{2}t^2 - c_0 t + c_1$ возможны следующие случаи:

1а.	$y_1 \geq 0$		1б.	$y_1 \leq 0,$	$a \leq t \leq b.$
2а.	$y_1 \geq 0,$	$a \leq t \leq t',$	2б.	$y_1 \leq 0,$	$a \leq t \leq t',$
	$y_1 \leq 0,$	$t' \leq t \leq b,$		$y_1 \geq 0,$	$t' \leq t \leq b.$
	$y_1 \geq 0,$	$a \leq t \leq t',$		$y_1 \leq 0,$	$a \leq t \leq t',$
3а.	$y_1 \leq 0,$	$t' \leq t \leq t'',$	3б.	$y_1 \geq 0,$	$t' \leq t \leq t',$
	$y_1 \geq 0,$	$t'' \leq t \leq b.$		$y_1 \leq 0,$	$t'' \leq t \leq b.$

В первом случае получаем

$$\inf_{c_0, c_1}\left[c_0(\beta_0 - \alpha_0) + b\beta_0 - a\alpha_0 \pm \frac{1}{6}(b^3 - a^3) \pm \frac{1}{2}c_0(b^2 - a^2) \pm c_1(a - b)\right].$$

Оттуда, ввиду независимости c_0 и c_1, следует $a - b = 0$, что невозможно.

Во втором случае

$$\inf_{c_0, c_1}\left[c_0(\beta_0 - \alpha_0) + b\beta_0 - a\alpha_0 \pm \int_a^{t'}\left(\frac{1}{2}t^2 + c_0 t - c_1\right)dt \mp \int_{t'}^{b}\left(\frac{1}{2}t^2 + c_0 t - c_1\right)dt\right]$$

$$= \inf_{c_0, c_1}\left[c_0(\beta_0 - \alpha_0) + b\beta_0 - a\alpha_0 \pm \frac{1}{6}(t'^3 - a^3) \pm \frac{1}{2}c_0(t'^2 - a^2) \pm c_1(\alpha - t')\right.$$

$$\left. \mp \frac{1}{6}(b^3 - t'^3) \mp \frac{1}{2}c_0(b^2 - t'^2) \pm c_1(t' - b)\right].$$

Коэффициенты перед c_0 и c_1 получаются

$$c_0 \to \beta_0 - \alpha_0 \pm \frac{1}{2}(t'^2 - a^2) \mp (b^2 - t'^2),$$

$$c_1 \to \pm(a - t') \pm (t' - b) = a - b,$$

т. е. снова $a = b$.

Итак, остается случай 3:

$$\inf_{c_0, c_1}\left[c_0(\beta_0 - \alpha_0) + b\beta_0 - a\alpha_0 \pm \int_a^{t'}\left(\frac{1}{2}t^2 + c_0 t - c_1\right)dt\right.$$

$$\left. \mp \int_{t'}^{t''}\left(\frac{1}{2}t^2 + c_0 t - c_1\right)dt \pm \int_{t''}^{b}\left(\frac{1}{2}t^2 + c_0 t - c_1\right)dt\right]$$

(здесь знак „плюс“ соответствует случаю 3б, а знак „минус“ — случаю 3а). Далее

$$\inf_{c_0,\, c_1}\Big[c_0(\beta_0-\alpha_0)+b\beta_0-a\alpha_0\pm\frac{1}{6}(t'^3-a^3)\pm\frac{c_0}{2}(t'^2-a^2)$$

$$\pm c_1(a-t')\mp\frac{1}{6}(t''^3-t'^3)\mp\frac{c_0}{2}(t''^2-t'^2)\mp c_1(t'-t'')$$

$$\pm\frac{1}{6}(b^3-t''^3)\pm\frac{c_0}{2}(b^2-t''^2)\pm c_1(t''-b)$$

$$=\inf_{c_0,\, c_1}\Big\{c_0\Big[\beta_0-\alpha_0\pm\frac{1}{2}(t'^2-a^2)\mp\frac{1}{2}(t''^2-t'^2)\pm\frac{1}{2}(b^2-t''^2)\Big]$$

$$+c_1[\pm(a-t')\mp(t'-t'')\pm(t''-b)]+\Phi\},$$

где Φ не содержит c_0 и c_1.

Отсюда

$$\beta_0-\alpha_0\pm\frac{1}{2}(t'^2-a^2)\pm(t'^2-t''^2)\pm\frac{1}{2}(b^2-t''^2)=0,$$

$$\pm(a-t')\pm(t''-t')\pm(t''-b)=0.$$

В случае 3б имеем

$$t'^2-t''^2=\alpha_0-\beta_0+\frac{1}{2}(a^2-b^2),$$

$$t''-t'=\frac{b-a}{2}.$$

Решение этой системы следующее:

$$t'=\frac{4\beta_0-4\alpha_0+b^2-3a^2+2ab}{4(b-a)},$$

$$t''=\frac{4\beta_0-4\alpha_0+3b^2-a^2-2ab}{4(b-a)}.$$

Если $\alpha_0=\beta_0=0$, $a=-1$, $b=1$, то для t' и t'' получаем $t'=-\frac{1}{2}$, $t''=\frac{1}{2}$, т. е. это корни второго полинома Чебышева второго рода $u_2(t;\ [-1,1])=t^2-\frac{1}{4}$.

На самом деле случай 3а заведомо невозможен, поскольку вогнутая функция $y(t)=-\frac{1}{2}t^2-c_0t+c_1$ может принимать положительные зна-

чения только для $t \in (t', t'')$, где t' и t'' — вещественные корни уравнения $\frac{1}{2} t^2 + c_0 t - c_1 = 0$.

Итак, для y_1 получаем

$$y_1(t) \leqq 0, \qquad a \leqq t \leqq t',$$
$$y_1(t) \geqq 0, \qquad t' \leqq t \leqq t'',$$
$$y_1(t) \leqq 0, \qquad t'' \leqq t \leqq b.$$

Если в задаче (1) на x наложим ограничения

$$x^{(i)}(a) = x^{(i)}(b) = 0 \qquad i = 0 \div r-1,$$

формула (8) дает

$$\sup_{x \in W^{(r)}_{a,b}} \int_a^b x(t)dt = \inf_{\{c_k'\}_0^{r-1}} \frac{1}{r!} \int_a^b t^r - c_0' t^{r-1} + \ldots + c'_{r-2} t + c'_{r-1} \, dt \tag{9}$$

$$= \frac{1}{r!} \int_a^b u_r(t;\ [a, b]) \, dt = \frac{(b-a)^{r+1}}{r!} \frac{1}{2^{2r}}.$$

5. Мы используем полученный результат для нахождения оценки скорости приближения функции

$$\sigma(t) = \begin{cases} -1, & -1 \leqq t < 0, \\ 1, & 0 \leqq t \leqq 1, \end{cases}$$

алгебраическими многочленами относительно хаусдорфова расстояния [3]. От решения задачи (1) сразу получаем решение следующей задачи: найти функцию $H(t) \in F^{(r+1)}[a, b]$, где

$$F^{(r+1)}[a, b] = \{x \in W^{(r+1)}[a, b]: \ x^{(k)}(a) = 0, \ k = 0 \div r, \ x^{(k)}(b) = 0, \ k = 1 \div r\},$$

для которой

$$H(b) = \sup_{x \in F^{(r+1)}[a,b]} x(b). \tag{10}$$

Очевидно

$$H(t) = \int_a^t h(\tau)\, d\tau, \quad H(b) = \frac{(b-a)^{r+1}}{2^{2r} r!}.$$

Пусть $0 < \varepsilon < 1$. Определим функцию $\widetilde{H}(t)$ следующим образом:

$$\widetilde{H}(t)=\begin{cases} 1 & , \quad -1\leqq t\leqq -\varepsilon, \\ \dfrac{2^{2r}r!}{(b-a)^{r+1}}\,H(t), & -\varepsilon\leqq t\leqq \varepsilon, \\ 1 & , \quad \varepsilon\leqq t\leqq 1. \end{cases}$$

(через $H(t)$ мы обозначили решение задачи (2) при $a=-\varepsilon$, $b=\varepsilon$).

Пусть $E_n(\widetilde{H})$ наилучшее равномерное приближение функции $\widetilde{H}(t)$ в отрезке $[-1,1]$ алгебраическими многочленами степени n. По известной теореме Фавара, Ахиезера и Крейна

$$E_n(\widetilde{H})\leqq \frac{c}{(n+1)^r}\,\widetilde{H}^{(r)}(t)=\frac{c}{(n+1)^r}\,\frac{2^{2r}r!}{(2\varepsilon)^{r+1}},$$

где C — абсолютная постоянная. Пользуясь формулой Стирлинга для $r!$, получаем

$$E_n\leqq C\sqrt{2\pi}\left(\frac{2r}{\varepsilon\, e(n+1)}\right)^r\frac{\sqrt{r}}{\varepsilon}.$$

Отсюда при $r=\left[\dfrac{\varepsilon(n+1)}{2}\right]$ имеем

$$E_n\leqq C\sqrt{2\pi}\;e^{-\frac{\varepsilon(n+1)}{2}}\cdot\sqrt{\frac{n+1}{2\varepsilon}}.$$

Положим $\varepsilon=2\,\dfrac{\ln n}{n+1}$. Тогда

$$E_n\leqq C\,\frac{\sqrt{2\pi}}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{\ln n}}.$$

Пользуясь определениями работы [1] для хаусдорфова приближения $E_{nr}(\sigma(t))$ функции $\sigma(t)$ алгебраическими многочленами, получаем

$$E_{nr}(\sigma(t))\leqq 2\,\frac{\ln n}{n}$$

В (4) показано, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}\,E_{nr}(\sigma)=1.$$

Авторы выражают благодарность проф. Сендову за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Смоляк, С. А.: Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них. Канд. дисс., 1965, Москва.
2. Бахвалов, Н. С.: Об оптимальности линейных методов приближения операторов на выпуклых классах функций. Ж. выч. мат. и мат. физ., 11, № 4 (1971), 1014 — 1018.
3. Сендов, Бл. Х.: Некоторые вопросы теории приближений функций и множеств в хаусдорфовой метрике. Усп. мат. наук, 24, 5 (1969), 141 — 178.
4. Попов, В. А.: Локальные приближения функций. Мат. заметки. В печати.
5. Цветанов, М. М.: Двойственность в задачах вариационного исчисления и оптимального управления. Изв. МИ, 13, 277 — 318.

Постъпила на 20. X. 1973 г.

ON AN EXTREMAL PROBLEM

B. Boyanov and M. Cvetanov

(SUMMARY)

Let $W^{(r)}[a, b]$ be the class of all real differentiable functions with piecewise continuous r-th derivative for which $\sup\limits_{t \in [a,b]} f^{(r)}(t) \leqq 1$. Denote

$$W^{(r)}_{a,b} = \{f \in W^{(r)}_{[a,b]}: \ f^{(k)}(a) = f^{(k)}(b) = 0 \quad k = 0, 1, \ldots, r-1\}.$$

The following problem is solved in the paper: find a function $h(t) \in W^{(r)}_{a,b}$ such that

$$\int_a^b h(t)dt = \sup_{x \in W^{(r)}_{a,b}} \int_a^b x(t)\, dt.$$

The obtained solution and well known facts from theory of approximation produce the estimate

$$E_{nr}(\sigma) \leqq 2 \frac{\ln n}{n}$$

for the Hausdorff approximation $E_{nr}(\sigma)$ of the function

$$\sigma(t) = \begin{cases} -1 & -1 \leqq t < 0, \\ 1 & 0 \leqq t \leqq 1 \end{cases}$$

by algebraic polynomials of degree at most n.