ФОРМУЛИ НА КРОФТОН ЗА ХИПЕРПОВЪРХНИНА В E_n

Адриян В. Борисов

В предлаганата работа намираме две формули от Крофтонов тип за хиперповърхнина и съвкупностите K^1_{2n-3} и K^{n-2}_{2n-3} от тангенти и $(n-2)$-мерни тангенциални равнини в n-мерното евклидово пространство E_n. При $n=4$ тези формули бяха получени от нас в [1]. И в тази работа прилагаме метода на външните диференциални форми на Картан. Използуваме сумиране по Айнщайн, като индексите се менят по следната схема:

$$\alpha, \beta, \gamma : 1, 2, \ldots, n-1,$$
$$\lambda : 2, 3, \ldots, n-2,$$
$$i, j, k : 1, 2, \ldots, n,$$
$$s, t : 2, 3, \ldots, n-1,$$
$$u, v : 1, 2, \ldots, n-2,$$
$$w : 2, 3, \ldots, n.$$

Когато имаме отклонение от тази уговорка, ще поставяме знак за сумиране.

§ 1

Нека в n-мерното евклидово пространство E_n е дадена хиперповърхнина S_{n-1}. С всяка нейна точка F свързваме ортогонален репер $F f_1 f_2 \ldots f_n$ с деривационни уравнения

$$dF = \psi^i f_i, \quad df_i = \psi_i^k f_k, \tag{1}$$

където ψ_i^k са диференциални форми на Пфаф, удовлетворяващи структурните уравнения

$$D\psi^i = \psi^j \wedge \psi_j^i, \quad D\psi_i^j = \psi_i^k \wedge \psi_k^j \tag{2}$$

и равенствата

$$\psi_i^i = 0, \quad \psi_i^k = -\psi_k^i. \tag{2'}$$

Допирателната равнина τ_{n-1} в точката F на S_{n-1} определяме с векторите $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$. Тогава

(3) $$\psi^n = 0.$$

Ако приемем диференциалните форми ψ^α за базисни, можем да изразим всички останали форми ψ_i^k чрез тях:

(4) $$\psi_i^k = \lambda_{ij}^k \psi^j.$$

Уравнението (3) определя холономна хиперповърхнина S_{n-1}, за която хиперравнината τ_{n-1} е допирателна в точката F, тогава и само тогава, когато е напълно интегруемо. От

$$D\psi^n \wedge \psi^n = 0,$$

като вземем пред вид структурните уравнения (2) и равенствата (4), получаваме условията за пълна интегруемост на (3):

(5) $$\lambda_{\alpha\beta}^n - \lambda_{\beta\alpha}^n = 0, \quad \alpha \neq \beta.$$

Специализираме репера на хиперповърхнината, като избираме координатните вектори f_α по главните ѝ направления [2]. Това води до

(6) $$\lambda_{\alpha\beta}^n + \lambda_{\beta\alpha}^n = 0, \quad \alpha \neq \beta.$$

От (5) и (6) получаваме, че за разглежданата холономна хиперповърхнина S_{n-1} е изпълнено

(7) $$\lambda_{\alpha\beta}^n = 0, \quad \alpha \neq \beta.$$

Главните кривини γ_α на S_{n-1} съгласно [2] са определени с равенствата:

(8) $$\gamma_\alpha = -\lambda_{\alpha\alpha}^n.$$

Образуваме външната диференциална форма

(9) $$dS_{n-1} = \bigwedge_\alpha \psi^\alpha$$

от степен $n-1$. С непосредствена проверка се убеждаваме, че е изпълнено

$$D(dS_{n-1}) = 0,$$

което съгласно [3] ни позволява да твърдим, че холономните хиперповърхнини в E_n са измерими съвкупности и инвариантните им плътности се дават с (9).

§ 2

Във всяка точка F на холономната хиперповърхнина S_{n-1} имаме допирателната хиперравнина $\tau_{n-1} = [F; f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}]$. Разглеждаме съвкупността K_{2n-3}^1 от всички тангенти на S_{n-1}. Тази съвкупност зависи от $2n-3$ параметъра. С всяка тангента τ_1 от K_{2n-3}^1 свързваме

семейство ортогонални репери $Ae_1e_2\ldots e_n$, определено по следния начин:

(10) $$1)\quad \tau_1=[A;\ e_1],$$

(10) $$2)\quad A=F,\ e_n=f_n.$$

За него имаме аналогично

(11) $$dA=\omega^i e_i,\quad dl_i=\omega_i^k e_k,$$

като диференциалните форми ω_i^j удовлетворяват структурните уравнения

(12) $$D\omega^i=\omega^j\wedge\omega_j^i,\quad D\omega_i^j=\omega_i^k\wedge\omega_k^j$$

и равенствата

$$\omega_i^i=0,\quad \omega_i^j=-\omega_j^i.$$

От (10_2) и от (3) получаваме

(13) $$\omega^n=0.$$

Образуваме диференциалната $(2n-3)$ — форма

(14) $$dK_{2n-3}^1=\bigwedge_s\omega^s\wedge\bigwedge_w\omega_1^w,$$

за която лесно се показва, че

$$D(dK_{2n-3}^1)=0.$$

Така доказахме следната

Теорема 1. В E_n съвкупността K_{2n-3}^1 от тангенти τ_1 в допирателните хиперравнини τ_{n-1} към холономната хиперповърхнина S_{n-1} е измерима съвкупност и инвариантната ѝ плътност се дава с (14).

По-нататък си поставяме задачата да намерим друго представяне за (14), като използуваме получената формула (9) за инвариантната плътност на S_{n-1}. В τ_{n-1} имаме два ортогонални репера $F\,f_1\,f_2,\ldots,f_{n-1}$ и $A\,e_1\,e_2\ldots e_{n-1}$ с общо начало $A=F$. Нека формулите за преминаване от втория към първия репер са:

(15) $$e_\alpha=a_\alpha^\beta f_\beta,$$

като (a_α^β) е ортогонална матрица. Ако диференцираме равенствата

(16) $$A=F,\quad e_1=a_1^\beta f_\beta,$$

използуваме (15) и сравним коефициентите пред f_α, получаваме системата

(17) $$a_j^\alpha\omega^j=\psi^\alpha,$$

(18) $$a_s^\alpha\omega_1^s=da_1^\alpha+a_1^\beta\psi_\beta^\alpha,$$

(19) $$\omega_1^n=a_1^\alpha\psi_\alpha^n.$$

От горната система, като вземем пред вид ортогоналността матрицата (a^β_α), намираме

(20) $$\omega^s = \sum_\alpha a^\alpha_s \psi^\alpha,$$

(21) $$\omega^t_1 = \sum_\alpha (da^\alpha_1 + a^\beta_1 \psi^\alpha_\beta)\, a^\alpha_t,$$

(22) $$\omega^n_1 = a^\alpha_1 \psi^n_\alpha.$$

Означаваме

(23) $$dK_{2n-3}^{\ 1} = \varphi \wedge \psi,$$

където

(24) $$\varphi = \omega^n_1 \wedge \bigwedge_s \omega^s, \qquad \psi = \bigwedge_s \omega^s_1.$$

От (22), (4) и (8) получаваме

$$\omega^n_1 = -\sum_\alpha a^\alpha_1 \nu_\alpha \psi^\alpha.$$

Тогава

$$\varphi = -\begin{vmatrix} a^1_1 \nu_1 & a^2_1 \nu_2 & \dots & a^{n-1}_1 \nu_{n-1} \\ a^1_2 & a^2_2 & \dots & a^{n-1}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^1_{n-1} & a^2_{n-1} & \dots & a^{n-1}_{n-1} \end{vmatrix} \bigwedge_\alpha \psi^\alpha.$$

Понеже матрицата (a^β_α) е ортогонална, то

(25) $$\varphi = -(a^\alpha_1)^2 \nu_\alpha \,.\, dS_{n-1}.$$

Сега да пресметнем ψ. От

$$e^2_1 = \sum_\alpha (a^\alpha_1)^2 = 1,$$

като диференцираме, получаваме

(26) $$\sum_\alpha a^\alpha_1 da^\alpha_1 = 0.$$

От (26) следва

(27) $$da^{n-1}_1 = -\frac{1}{a^{n-1}_1} \sum_u a^u_1 da^u_1.$$

Записваме (21) във вида

(28) $$\omega^t_1 = \sum_\alpha a^\alpha_t da^\alpha_1 + \sigma^t(\psi^\alpha_\beta),$$

където с $\sigma^t(\psi^\alpha_\beta)$ сме означили сумата $\sum_\alpha a^\alpha_t . a^\beta_1 \psi^\alpha_\beta$. Заместваме (27) в (28). Получаваме

$$\omega^t_1 = \sum_u \left(a^u_t - a^u_1 \frac{a^{n-1}_t}{a^{n-1}_1} \right) da^u_1 + \sigma^t(\psi^\alpha_\beta). \tag{29}$$

Умножаваме външно диференциалните форми (29):

$$\psi = \det \left(a^u_t - a^u_1 \frac{a^{n-1}_t}{a^{n-1}_1} \right) \bigwedge_u da^u_1 + F(\psi^\alpha_\beta). \tag{30}$$

С $F(\psi^\alpha_\beta)$ сме означили сумата от получените мономи, които съдържат ψ^α_β. Но

$$\det \left(a^u_t - a^u_1 \frac{a^{n-1}_t}{a^{n-1}_1} \right) = \frac{1}{a^{n-1}_1}$$

и следователно

$$\psi = \frac{1}{a^{n-1}_1} \bigwedge_u da^u_1 + F(\psi^\alpha_\beta). \tag{31}$$

Заместваме (31) и (25) в (23). Получаваме

$$dK^1_{2n-3} = \frac{1}{a^{n-1}_1} (a^\alpha_1)^2 \nu_\alpha . \bigwedge_u da^u_1 \wedge dS_{n-1} + \Phi, \tag{32}$$

където

$$\Phi = -(a^\alpha_1)^2 \nu_\alpha . F(\psi^\alpha_\beta) \wedge dS_{n-1}.$$

В (32) знакът минус е пренебрегнат, тъй като плътностите се вземат по абсолютна стойност. Диференциалните форми ψ^α_β съгласно (4) и (10) се изразяват чрез ψ^α. Следователно $\Phi = 0$. Така получаваме окончателно:

$$dK^1_{2n-3} = \frac{1}{a^{n-1}_1} (a^\alpha_1)^2 \nu_\alpha . \bigwedge_u da^u_1 \wedge dS_{n-1}. \tag{33}$$

Нека θ_1 е ъгълът между векторите e_1 и f_1. Тогава

$$a^1_1 = \cos \theta_1.$$

Ако e_1' е ортогоналната проекция на e_1 върху равнината $[F; f_2, f_3, \ldots, f_{n-1}]$ и θ_2 е ъгълът между e_1' и f_2, тогава

$$a^2_1 = \sin \theta_1 \cos \theta_2.$$

Аналогично, ако e_1'' е ортогоналната проекция на e_1' върху равнината $[F; f_3, f_4, \ldots, f_{n-1}]$ и θ_3 е ъгълът между e_1'' и f_3, получаваме

$$a_1^3 = \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3.$$

Като извършим този процес $n-4$ пъти, получаваме

$$(34)\qquad \begin{aligned} a_1^1 &= \cos\theta_1, \\ a_1^2 &= \sin\theta_1 \cos\theta_2, \\ a_1^3 &= \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_1^{n-2} &= \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 \ldots \sin\theta_{n-3} \cos\theta_{n-2}, \\ a_1^{n-1} &= \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 \ldots \sin\theta_{n-3} \sin\theta_{n-2}, \end{aligned}$$

като

$$0 < \theta_1 < \pi, \qquad 0 < \theta_2 < \pi.$$

От (34) намираме da_1^u и пресмятаме

$$(36)\qquad \bigwedge_u da_1^u = (-1)^{n-2} (\sin\theta_1)^{n-2} (\sin\theta_2)^{n-3} \ldots \sin\theta_{n-2} \cdot \bigwedge_u d\theta_u.$$

Заместваме (34) и (36) в (33). След преработване получаваме търсеното ново представяне за dK_{2n-3}^1:

$$(37)\qquad dK_{2n-3}^1 = \left\{ \sum_u \left[\begin{matrix} \cos^2\theta_u \\ \sin^2\theta_u \end{matrix} \cdot \prod_{l=1}^{n} (\sin\theta_l)^{n-l} \cdot \prod_{m=u+1}^{n-2} (\sin\theta_m)^{n-m-2} \nu_u \right] + \prod_r (\sin\theta_r)^{n-r} \nu_{n-1} \right\} \bigwedge_u d\theta_u \wedge dS_{n-1}.$$

Нека $N(\tau_1)$ е броят на допирните точки на τ_1 с S_{n-1}. Като имаме пред вид (35), интегрираме (37) и получаваме търсената формула от Крофтонов тип в случая, когато дясната страна на (37) не се анулира

$$(38)\qquad \int_{(L_1)} N(\tau_1) dK_{2n-3}^1 = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{2\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \cdot \int_{(S_{n-1})} \sum_u \nu_\alpha \, dS_{n-1}.$$

Интегрирането в лявата страна на (38) се извършва върху съвкупността L_1 от всички прави в пространството, защото ако една права p не се допира до S_{n-1}, то $N(p) = 0$. При $n = 4$ получаваме известната вече от [1] формула на Крофтон:

$$\int_{(L_1)} N(\tau_1) dK_s^1 = \frac{2\pi}{3} \int_{(S_3)} \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 \, dS_3.$$

§ 3

Сега по аналогичен начин на този от § 2 ще намерим формула от Крофтонов тип за съвкупността K_{2n-3}^{n-2} от $(n-2)$-мерните допирателни равнини τ_{n-2} към S_{n-1}. С произволна равнина τ_{n-2} свързваме семейство ортогонални репери $B\, g_1 g_2 \ldots g_n$, за което предполагаме, че са изпълнени равенствата

$$(39)\qquad \begin{aligned} &1')\quad \tau_{n-2} = [B;\, g_1, g_2, \ldots, g_{n-2}],\\ &2')\quad B = F,\quad g_n = f_n. \end{aligned}$$

Деривационните уравнения са

$$(40)\qquad dB = \varphi^i g_i,\quad dg_i = \varphi_i^k g_k.$$

Диференциалните форми $\varphi_i{}^j$ удовлетворяват структурните уравнения на пространството E_n

$$(41)\qquad D\varphi^i = \varphi^l \wedge \varphi_l{}^i,\quad D\varphi_i{}^j = \varphi_i^k \wedge \varphi_k^j$$

и равенствата

$$\varphi_i{}^i = 0,\quad \varphi_i{}^j = -\varphi_j{}^i.$$

От (39) и (3) следва

$$(42)\qquad \varphi^n = 0.$$

Образуваме външната диференциална $(2n-3)$-форма

$$(43)\qquad dK_{2n-3}^{n-2} = \bigwedge_u \varphi_u^{n-1} \wedge \bigwedge_v \varphi_v^n \wedge \varphi^{n-1}.$$

Като се има пред вид (42), непосредствено се проверява, че

$$D(dK_{2n-3}^{n-2}) = 0.$$

С това доказахме следната

Теорема 2. В E_n съвкупността K_{2n-3}^{n-2} от $(n-2)$-мерните допирателни равнини τ_{n-2} в допирателните хиперравнини τ_{n-1} към холономната хиперповърхнина S_{n-1} е измерима съвкупност и инвариантната ѝ плътност се дава с (43).

Нека

$$(44)\qquad g_\alpha = \lambda_\alpha^\beta f_\beta,$$

като (λ_α^β) е ортогонална матрица. Да диференцираме равенствата

$$(45)\qquad B = F,\quad g_u = \lambda_u^\alpha f_\alpha.$$

Ако използуваме (44) и сравним коефициентите пред f_α, получаваме системата

$$\lambda_\beta^\alpha \varphi^\beta = \psi^\alpha,$$

(46) $$\lambda^{\alpha}_{\beta}\varphi^{\beta}_{u} = d\lambda^{\alpha}_{u} + \lambda^{\alpha}_{u}\psi^{\alpha}_{\alpha},$$

$$\varphi^{n}_{u} = \lambda^{\alpha}_{u}\psi^{n}_{\alpha},$$

от която намираме

$$\varphi^{n-1} = \sum_{\alpha}\lambda^{\alpha}_{n-1}\psi^{u},$$

(47) $$\varphi^{n-1}_{u} = \sum_{\alpha}(d\lambda^{\alpha}_{u} + \lambda^{\beta}_{u}\psi^{\alpha}_{\beta})\lambda^{\alpha}_{n-1},$$

$$\varphi^{n}_{u} = \lambda^{\alpha}_{u}\psi^{n}_{\alpha}.$$

Понеже матрицата $(\lambda^{\beta}_{\alpha})$ е ортогонална, то

(48) $$\sum_{\alpha}\lambda^{\alpha}_{n-1}\lambda^{\alpha}_{u} = 0, \quad \sum_{\alpha}(\lambda^{\alpha}_{n-1})^{2} = 1.$$

Диференцирането на горните равенства дава

(49′) $$\sum_{\alpha}\lambda^{\alpha}_{n-1}d\lambda^{\alpha}_{u} = -\sum_{\alpha}\lambda^{\alpha}_{u}d\lambda^{\alpha}_{n-1},$$

(49″) $$\sum_{\alpha}\lambda^{\alpha}_{n-1}d\lambda^{\alpha}_{n-1} = 0.$$

От (49″) следва

(50) $$d\lambda^{n-1}_{n-1} = -\frac{1}{\lambda^{n-1}_{n-1}}\sum_{u}\lambda^{u}_{n-1}d\lambda^{u}_{n-1}.$$

Записваме (47_2) във вида

(51) $$\varphi^{n-1}_{u} = \sum_{\alpha}\lambda^{\alpha}_{n-1}d\lambda^{\alpha}_{u} + \sigma_{u}(\psi^{\alpha}_{\beta}),$$

където

$$\sigma_{u}(\psi^{\alpha}_{\beta}) = \sum_{\alpha}\lambda^{\alpha}_{n-1}(\lambda^{\beta}_{u}\psi^{\alpha}_{\beta}).$$

Заместваме (49′) в (51). Получаваме

(52) $$\varphi^{n-1}_{u} = -\sum_{\alpha}\lambda^{\alpha}_{u}d\lambda^{\alpha}_{n-1} + \sigma_{u}(\psi^{\alpha}_{\beta}).$$

От (50) и (52) намираме

(53) $$\varphi^{n-1}_{u} = -\sum_{v}\left(\lambda^{v}_{u} - \lambda^{v}_{n-1}\frac{\lambda^{n-1}_{u}}{\lambda^{n-1}_{n-1}}\right)d\lambda^{v}_{n-1} + \sigma_{u}(\psi^{\alpha}_{\beta}).$$

Сега ще намерим ново представяне на плътността dK^{n-2}_{2n-3}. За удобство при пресмятанията означаваме

$$dK^{n-2}_{2n-3} = \omega \wedge \theta,$$

където

$$\omega = \bigwedge_u \varphi^{n-1}_u,$$

$$\theta = \bigwedge_u \varphi^n_u \wedge \varphi^{n-1}.$$

От (53) получаваме

$$\omega = (-1)^{n-2} \det\left(\lambda^v_u - \lambda^v_{n-1} \frac{\lambda^{n-1}_u}{\lambda^{n-1}_{n-1}}\right) \bigwedge_u d\lambda^u_{n-1} + F(\psi^\alpha_\beta). \tag{54}$$

С $F(\psi^\alpha_\beta)$ сме означили сумата от получените при външното умножение мономи, съдържащи ψ^α_β. Понеже (λ^β_α) е ортогонална матрица, следва, че

$$\det\left(\lambda^v_u - \lambda^v_{n-1} \frac{\lambda^{n-1}_u}{\lambda^{n-1}_{n-1}}\right) = \frac{-1}{\lambda^{n-1}_{n-1}}.$$

Така получихме

$$\omega = (-1)^{n-2} \frac{1}{\lambda^{n-1}_{n-1}} \bigwedge_u d\lambda^u_{n-1} + F(\psi^\alpha_\beta). \tag{55}$$

Да пресметнем и θ. От (47_3), (4) и (8) намираме

$$\varphi^n_u = -\sum_\alpha \lambda^\alpha_u \nu_\alpha \psi^u.$$

Следователно

$$\theta = (-1)^{n-2} \begin{vmatrix} \lambda^1_1 \nu_1 & \lambda^2_1 \nu_2 & \dots & \lambda^{n-1}_1 \nu_{n-1} \\ \lambda^1_2 \nu_1 & \lambda^2_2 \nu_2 & \dots & \lambda^{n-1}_2 \nu^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda^1_{n-2} \nu_1 & \lambda^2_{n-2} \nu_2 & \dots & \lambda^{n-1}_{n-2} \nu_{n-1} \\ \lambda^1_{n-1} & \lambda^2_{n-1} & \dots & \lambda^{n-1}_{n-1} \end{vmatrix} . dS_{n-1}$$

или

$$\theta = (-1)^{n-2} \sum_\alpha \left[(\lambda^\alpha_{n-1})^2 . \prod_{\beta \neq \alpha} \nu_\beta \right] . dS_{n-1}. \tag{56}$$

Заместваме (55) и (56) в (54). Като вземем пред вид, че

$$F(\psi^{\alpha}_{\beta}) \wedge dS_{n-1} = 0,$$

получаваме

$$dK^{n-2}_{2n-3} = \frac{1}{\lambda^{n-1}_{n-1}} \sum_{\alpha} \left[(\lambda^{\alpha}_{n-1})^2 \prod_{\beta \neq \alpha} \nu_{\beta} \right] \bigwedge_{u} d\lambda^{u}_{n-1} \wedge dS_{n-1}. \tag{57}$$

И тук, както в § 2, като използуваме параметричното представяне на единичната сфера в τ_{n-1}, намираме следното координатно представяне на вектора g_{n-1}:

$$\begin{aligned}
\lambda^{1}_{n-1} &= \cos\theta_1, \\
\lambda^{2}_{n-1} &= \sin\theta_1 \cos\theta_2, \\
\lambda^{3}_{n-1} &= \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\lambda^{n-2}_{n-1} &= \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 \ldots \sin\theta_{n-3} \cos\theta_{n-2}, \\
\lambda^{n-1}_{n-1} &= \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 \ldots \sin\theta_{n-3} \sin\theta_{n-2}.
\end{aligned} \tag{58}$$

Използуваните ъгли θ_u се менят в интервалите

$$0 < \theta_1 < \pi, \quad 0 < \theta_{\lambda} < \pi \tag{59}$$

Така от (57) и (58) след преработване на получените изрази получаваме търсеното ново представяне на dK^{n-2}_{2n-3}:

$$\begin{aligned}
dK^{n-2}_{2n-3} = \Bigg\{ \sum_{u} \Bigg[\frac{\cos^2\theta_u}{\sin^2\theta_u} \prod_{l=1}^{u} (\sin\theta_l)^{n-l} \prod_{m=u+1}^{n-2} (\sin\theta_m)^{n-m-2} \prod_{\alpha \neq u} \nu_{\alpha} \Bigg] + \\
+ \prod_{\nu} (\sin\theta_{\nu})^{n-\nu} \nu_{\nu} \Bigg\} \cdot \bigwedge_{u} d\theta_u \wedge dS_{n-1}.
\end{aligned} \tag{60}$$

Да означим с $N(\tau_{n-2})$ броя на допирните точки на τ_{n-2} с S_{n-1}. Интегрираме (60) в границите (59) за случая, когато дясната страна на (37) не се анулира. Получаваме формулата от Крофтонов тип:

$$\int_{(L_{n-2})} N(\tau_{n-2})\, dK^{n-2}_{2n-3} = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{2\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \cdot \int_{(S_{n-1})} \sum_{\alpha} \left(\prod_{\beta \neq \alpha} \nu_{\beta} \right) dS_{n-1}. \tag{61}$$

С L_{n-2} сме означили съвкупността от всички $(n-2)$-мерни равнини в E_n. Ще отбележим, че ако една $(n-2)$-мерна равнина ε не се допира до S_{n-1}, то $N(\varepsilon) = 0$.

При $n=4$ получаваме вече известната от [1] формула на Крофтон:

$$\int\limits_{(L_2)} N(\tau_2)dK_5^2 = \frac{2\pi}{3}\int\limits_{(S_3)} \nu_2\nu_3+\nu_1\nu_3+\nu_1\nu_2\ dS_3.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Борисов, А.: Формули на Крофтон за хиперкомплекси от тангенти и двумерни допирателни равнини към хиперповърхнина в E_4. Год. на Соф. унив., Фак. по мат. и мех., **66** (1971/1972) (под печат).
2. Роговой, М. Р.: К метрической теории неголономной гиперповерхности в n-мерном пространстве. Укр. геом. сб., **5—6** (1968), 126—138.
3. Сантало, Л. А.: Введение в интегральную геометрию. Москва, 1956.

Постъпила на 1. XI. 1973 г.

CROFTONSCHE FORMELN FÜR EINE HYPERFLÄCHE IN E_n

A. W. Borissow

(ZUSAMMENFASSUNG)

In der vorliegenden Arbeit werden zwei Formeln vom Croftonschen Typ für die Mengen K^1_{2n-3} und K^{n-2}_{2n-3} aus Tangenten τ_1 und $(n-2)$-dimensionalen Tangentialebenen τ_{n-2} einer Hyperfläche S_{n-1} in E_n gefunden. Man benutzt die Cartansche Methode der äusseren Diferentialformen.

Es seien $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{n-1}$ die Hauptkrümmungen von S_{n-1}, dK^1_{2n-3} und dK^{n-2}_{2n-3} die Dichten der Mengen K^1_{2n-3} und K^{n-2}_{2n-3}. Wenn $N(\tau_1)$, $N(\tau_{n-2})$ die Anzahlen der Berührungspunkte von τ_1, τ_{n-2} mit S_{n-1} sind, gelten die folgenden Formeln:

$$\int\limits_{(L_1)} N(\tau_1)dK^1_{2n-3} = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{2\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\int\limits_{(S_{n-1})} \sum_{\alpha} \nu_\alpha\ dS_{n-1},$$

$$\int\limits_{(L_{n-2})} N(\tau_{n-2})dK^{n-2}_{2n-3} = \frac{\pi^{\frac{n-1}{n}}}{2\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\int\limits_{(S_{n-1})} \sum_{\alpha} \left(\prod_{\beta\neq 1} \nu_\beta\right)\ dS_{n-1}.$$

Mit L_1 und L_{n-2} werden die Mengen von allen Geraden und $(n-2)$-dimensionalen Ebenen in E_n bezeichnet.