ПОЛУЧАВАНЕ НА КРЕМОНОВО ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ОТ ТРЕТА СТЕПЕН ЧРЕЗ АКСИАЛНО ПРОЕКТИРАНЕ В P^4

Гергана Енева

В [I] точките на нормповърхнината от трета степен F_3^2 на четиримерното проективно пространство P^4 са проектирани аксиално върху една равнина Π^2 — допирателна към F_3^2 в една нейна фиксирана точка. O. Аксиалното проектиране в P^4 може да се разглежда като аналог на централното проектиране в P^3. За проекционна ос служи една фиксирана бисеканта на F_3^2 — $l = M_1 \ M_2$ (M_1, $M_2^2 \in F_3^2$). Ако M_i е произволна точка от повърхнината F_3^2, аксиална проекция на M_i от l наричаме дирята M_i^0 на равнината (M_i, l) в Π^2. Ако M_j^0 е произволна точка от Π^2, съществува в общия случай точно една точка M_j върху F_3^2, която има аксиална проекция M_j^0 [I].

Нека сега l и l' са две бисеканти на повърхнината F_3^2, пресичащи я съответно в точките M_1, M_2 и M_3, M_4. Ако M_5 е произволна точка от F_3^2, аксиалната ѝ проекция от l означаваме с M_5^0, а аксиалната ѝ проекция от l'-с M_3'. Полето от точки M_3^0 означаваме с Π^0, а полето от точки M_3'-с Π'. Между аксиалните проекции на точките от повърхнината F_3^2 се установява еднозначно обратимо съответствие T. Ние ще покажем, че то е кремоново преобразование от трета степен на полето Π^0 в полето Π'.

Нека c_0 е произволна права от полето Π^0. Правите c_0 и l в общия случай определят хиперравнина P^3, която пресича F_3^2 по пространствена крива от трета степен c_3 [2]. Проекцията на c_3 от l в Π^2 е равнинна крива от трета степен. Следователно разглежданото преобразование действително е кремоново от трета степен — T_3 [3]. Очевидно съответствието между аксиалните проекции в Π^2 от l и l' на точките от F_3^2, които лежат в една равнина, е колинеация. При това дирята на тази равнина е двойна точка на тази колинеация, свързана с общата права на Π^2 и хиперравнината, определена от правите l и l', които в общия случай са кръстосани [2].

Сега ще потърсим фундаменталните точки на T_3.

Нека C^0 е дирята на Π^2 на равнината на единствената крива от втора степен $c_2^{M_1M_2}$, която минава през точките M_1 и M_2 и лежи върху повърхнината F_3^2 [2]. Да намерим образа на точката C^0 от полето Π^0

в полето Π' при T_3. Проекцията на $c_2^{M_1M_2}$ в Π^2 от l' е пак крива от втора степен c_2'. Това е пресечната крива на Π^2 с хиперконуса с едномерен връх, образуван от съединителните равнини на l с точките от $c_2^{M_1M_2}$. Следователно на точката C^0 от полето Π^0 съответствува при преобразованието T_3 кривата от втора степен c_2' от полето Π', т. е. C^0 е двойна фундаментална точка на преобразованието в полето Π^0. Аналогично ще получим, че и дирята C' на равнината на единствената крива от втора степен $c_2^{M_3M_4}$ върху F_3^2, която минава през M_3 и M_4, е двойна точка на преобразованието в полето Π'.

Нека P^0 е дирята в Π^2 на равнината $(M_1 M_2 M_3)$. Тази равнина пресича F_3^2 само в точките M_1, M_2, M_3. Ние сме показали в [1], че аксиалната проекция на точка M_3 от бисекантата $l' = M_3 M_4$ е права — дирята на хиперравнината, определена от точка M_4 и от допирателната равнина към F_3^2 в точка M_3. Тази диря минава през пресечната точка M_3 на Π^2 с равнината (m_3, M_4), (тук m_3 е образуващата на повърхнината F_3^2 в точката M_3), понеже допирателната равнина към F_3^2 съдържа m_3. Освен това дирята на посочената хиперравнина минава през точка C^0, понеже допирателната към кривата $c_2^{M_3M_4}$ в точка M_3, която лежи в допирателната равнина към F_3^2 в тази точка, и точката M_4 определят равнината на $c_2^{M_3M_4}$. Така получихме, че на точка P^0 от Π^0 съответствува в Π' правата M_3C', т. е. P^0 е обикновена фундаментална точка на T_3 в полето Π^0. По същия начин можем да получим, че и дирята N^0 на равнината $(M_1 M_2 M_4)$ е обикновена фундаментална точка в полето Π^0.

Аналогично в полето Π' обикновени фундаментални точки ще бъдат: 1. дирята P' на равнината $(M_3 M_4 M_1)$, 2. дирята N' на равнината $(M_3 M_4 M_2)$.

Нека $\overline{M}_1$ е дирята на равнината (m_1, M_2), където m_1 е образуващата на F_3^2 в точката M_1. Равнината $(M_1 M_1 M_2)$ пресича F_3^2 в точката M_2 и по образуващата m_1, т. е. точките от m_1 имат M_1 за аксиална проекция. Тогава на точката M_1 от полето Π^0 ще съответствува при T_3 дирята на хиперравнината $(m_1, M_3 M_4)$. Следователно точката M_1 е обикновена фундаментална точка в Π^0. В хиперравнината $(m_1, M_3 M_4)$ лежат двумерната равнина $(M_1 M_3 M_4)$ и равнината на кривата от втора степен $c_2^{M_3M_4}$, тъй като тази крива пресича всички образуващи на F_3^2, следователно и m_1.

Точката M_2, в която Π'^2 пресича равнината (m_2, M_1) (тук m_2 е образуващата на F_3^2 в точката M_2 (е също обикновена фундаментална точка в полето Π^0.

Тогава обикновени фундаментални точки в полето Π' ще бъдат точките: 3. M_3 — диря на равнината (m_3, M_4), 4. M — диря на равнината (m_4, M_3), където m_3 и m_4 са образуващите на F_3^2 съответно в точките M_3 и M_4.

И така съответствието T_3 е кремоново преобразование от трета степен от вида $1^2\,4^1$. Разположението на фундаменталните елементи зависи от взаимното положение на точките M_1, M_2, M_3, M_4. Така например, ако точката M_3 лежи на кривата от втора степен $c_2^{M_1M_2}$, ще съвпадат точките P^0 и C^0; ако точките M_1 и M_3 лежат на една образуваща на F_3^2, ще съвпадат P^0 и M_1.

Таблица за фундаменталните точки на преобразованието в общия случай:

T	Фундаментални точки	Фундаментални криви: степен на кривата	Фундаментални криви: минава през точките
T_3	P^0 — обикновена (диря на равнината $(M_1\ M_2\ M_3)$)	първа	M_3, C'
	N^0 — обикновена (диря на равнината $(M_1\ M_2\ M_1)$)	първа	M_4, C'
	M_1 — обикновена (диря на равнината $(m_1,\ M_2)$)	първа	P', C'
	$\overline{M}_2$ — обикновена (диря на равнината $(m_2,\ M_1)$)	първа	N', C'
	C^0 — двойна (диря на равнината на $c_2^{M_1M_2}$ — крива от II ст. върху F_3^2 през M_1 и M_2)	втора	M_3, M_4, P', N', C,
T_3^{-1}	P' — обикновена (диря на равнината $(M_3\ M_4\ M_1)$)	първа	M_1, C^0
	N' — обикновена (диря на равнината $(M_3\ M_4\ M_2)$)	първа	M_2, C^0
	$\overline{M}_3$ — обикновена (диря на равнината $(m_3,\ M_4)$)	първа	P^0, C^0
	$\overline{M}_4$ — обикновена (диря на равнината $(m_4,\ M_3)$)	първа	N^0, C^0
	C' — двойна (диря на равнината на $c_2^{M_1M_2}$ — крива от II ст. върху F_3^2 през M_3 и M_4)	втора	M_1, $\overline{M}_2$, P^0, N^0, C^0

ЛИТЕРАТУРА

1. Енева, Г.: Взаимосвязь аксиального и изотропного отображений нормповерхности третьего порядка пространства. Год. на Соф. унив., Мат. фак., 63 (1968/69), 87—92.
2. Енева, Г., Скопец, З.: Построение плоской модели четырехмерного проективного пространства изотропным проектированием нормповерхности третьего порядка. Год. на Соф. унив., Мат. фак., 62 (1967/68), 243—258.
3. Hudson, H.: Cremona transformation. Cambridge, 1927.

Постъпила на 15. XI. 1973 г.

ERHALTUNG EINER CREMONATRANSFORMATION DRITTER ORDNUNG VERMITTELS AXIALER PROJEKTION IM RAUME P^4

G. Enewa

(ZUSAMMENFASSUNG)

In der Arbeit [1] werden die Punkte der Normfläche dritter Ordnung F_3^2 des vierdimensionalen projektiven Raumes P^4 axial — aus einer fixierten Bisekante l von F_3^2 auf eine fixierte Tangentialebene Π^2 von F_3^2 — projiziert. Mann nennt die Spur der Ebene (M_i, l) in der Ebene Π^2 axiale Projektion des Punktes M_i der Fläche F_3^2. In der vorliegenden Arbeit wird bewiesen, dass die Verwandschaft zwischen den axialen Projektionen in Π^2 der Punkte von F_3^2 aus zwei Bisekanten $l = M_1M_2$ und $l' = M_3M_4$ (Die Punkte M_1, M_2, M_3, M_4 liegen auf F_3^2) eine Cremonatransformation dritter Ordnung T_3 vom Typus $1^2\ 4^1$ ist. Es werden ihre Fundamentalpunkte gefunden. Für T_3 sind

1) die Spur der Ebene $(M_1\ M_2\ M_3)$,

2) die Spur der Ebene $(M_1\ M_2\ M_4)$,

3) die Spur der Ebene (m_1, M_2), die aus der Erzeugenden m_1 von F_3^2 im Punkte M_1 und aus dem Punkte M_2 gebildet ist,

4) die Spur der Ebene (m_2, M_1), die aus der Erzeugenden m_2 von F_3^2 im Punkte M_2 und aus dem Punkte M_1 gebildet ist, einfache Fundamentalpunkte.

Die Spur der Ebene der einzigen Kurve zweiter Ordnung, die auf F_3^2 liegt und durch die Punkte M_1 und M_2 geht, ist der doppelte Fundamentalpunkt der Transformation T_3.