БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ИЗГИБАНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ ПРИ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ

Иванка Иванова-Каратопраклиева

1. Пусть регулярная поверхность S ограничена линией L. Если на L не накладывать никаких ограничений, то поверхность S в общем нежесткая. Поэтому в теории бесконечно малых (б. м.) изгибаний естественно возникает вопрос: будет ли поверхность S жесткой после наложения некоторых краевых условий на линии L. В настоящей заметке исследуются б. м. изгибания (первого порядка) односвязных, кусочно выпуклых, но в целом невыпуклых поверхностей вращения, ограниченных параллелью L, при следующих краевых условиях; а) вариация средней кривизны H поверхности вдоль L равна нулю: б) вариация нормальной кривизны ν (кривизны $\varkappa$) кривой L равна нулю; в) вариация угла $\theta=(n, l)$ вдоль L равна нулю; г) вариация кручения τ кривой L равна нулю; д) вариация геодезического кручения $\varkappa$ кривой L равна нулю.

Первую задачу для регулярных выпуклых поверхностей рассматривали И. Н. Векуа [1] и Г. Хельвиг [2]. В работе [1] И. Н. Векуа доказывает, что поверхность S с положительной гауссовой кривизной, принадлежащая классу $D_{k-3,p}$, $p>2$, $k\geqq 0$, вдоль края L^1 которой расположены лишь конечное число омбилических точек, жестка по отношению к б. м. изгибаниям, сохраняющим среднюю кривизну поверхности вдоль L и главные направления хотя бы в одной точке края. В работе [2] Г. Хельвиг доказывает, что если поверхность S с положительной гауссовой кривизной принадлежит классу C^3, не имеет омбилических точек и ее линии кривизны образуют изотермическую сеть, то каждое б. м. изгибание поверхности S, сохраняющее среднюю кривизну (линии кривизны) вдоль края L, сохраняет среднюю кривизну (линии кривизны) на всей поверхности.

Задачи б), в) и д) для выпуклых поверхностей исследовали Н. В. Ефимов [12], И. Н. Векуа [1], К. Гротемейер [3], Е. Рембс [4], [5]. Все рассматриваемые поверхности жесткие.

2. Пусть S_1 и S_2 выпуклые соосные поверхности вращения. Рассмотрим внутренне-склеенную поверхность $\Sigma=S_1+S_2$. Обозначим через $c=c_1+c_2$ меридиан поверхности Σ, где

[1] Граница L состоит из $m\geqq 1$ гладких кривых класса C^1_μ, $0<\mu\leqq 1$.

$$c_1: r_1 = r_1(u) \in C[0, u_1] \cap C^2(0, u_1],$$

$$r_1(0) = 0, \ r_1(u) > 0 \text{ в } (0, u_1], \ r_1''(u) \leqq 0, \ \lim_{u \to 0} r_1'(u) = -\infty;$$

$$c_2: r_2 = r_2(u) \in C^2[u_2, u_1], \ 0 < u_2 < u_1, \ r_2(u) < r_1(u) \text{ в } [u_2, u_1), \ r_1(u_1) = r_2(u_1),$$

$$r_2(u) > 0 \text{ в } (u_2, u_1], \ r_2(u_2) = 0, \ r_2''(u) \leqq 0,$$

(равенства $r_i''(u) = 0$, $i = 1, 2$, возможны только в отдельных точках). Пусть поверхность S_1 аналитическая в окрестности полюса $u = 0$ и полюс не является параболической точкой поверхности S_1.

Следуя методу С. Э. Кон-Фоссена [6], отнесем радиус-вектор $x(u, v)$ произвольной точки поверхности Σ к подвижному трехграннику $\left\{0, e, a(v), \frac{da}{dv}\right\}$, где e — единичный вектор, направленный по оси вращения, а $a(v)$ — единичный вектор, перпендикулярный к оси вращения и повернутый на угол v от некоторого начального положения. Тогда

$$x(u, v) = u \cdot e + r(u) \cdot a(v), \tag{1}$$

где $r = r(u)$ — уравнения меридиана c поверхности Σ.

Пусть

$$z(u, v) = \alpha(u, v) \cdot e + \beta(u, v) \cdot a(v) + \gamma(u, v) \cdot a'(v) \tag{2}$$

— поле б. м. изгибания поверхности Σ класса C^2 на регулярных кусках S_i, $i = 1, 2$, и класса C на всей поверхности Σ. Поле $z(u, v)$ на регулярных кусках поверхности Σ, удовлетворяет следующей системе:

$$\begin{gathered} \alpha_u + r'\beta_u = 0, \\ \beta + \gamma_v = 0, \\ \alpha_v + r'(\beta_v - \gamma) + r\gamma_u = 0. \end{gathered} \tag{3}$$

Представив $\alpha(u, v)$, $\beta(u, v)$, $\gamma(u, v)$ рядами Фурье

$$\begin{gathered} \alpha(u, v) = \sum_{k=0}^{\infty} [\varphi_{k1}(u) \cos kv + \varphi_{k2}(u) \sin kv], \\ \beta(u, v) = \sum_{k=0}^{\infty} [\chi_{k1}(u) \cos kv + \chi_{k2}(u) \sin kv], \\ \gamma(u, u) = \sum_{k=0}^{\infty} [\psi_{k1}(u) \cos kv + \psi_{k2}(u) \sin kv], \end{gathered} \tag{4}$$

из (3) получим систему

$$
(5)\qquad
\begin{gathered}
\varphi'_{k1}+r'\chi'_{k1}=0, \qquad \varphi'_{k2}+r'\chi'_{k2}=0,\\
\chi_{k1}+k\psi_{k2}=0, \qquad \chi_{k2}-k\psi_{k1}=0,\\
k\varphi_{k2}+r'(k\chi_{k2}-\psi_{k1})+r\psi'_{k1}=0, \quad -k\varphi_{k1}+r'(-k\chi_{k1}-\psi_{k2})+r\psi'_{k2}=0,\\
0\leq k<\infty.
\end{gathered}
$$

Отсюда для $\chi_{kl}(u)$ имеем уравнение

$$
(6)\qquad r(u)\chi''_{kl}(u)+(k^2-1)r''(u)\chi_{kl}(u)=0, \quad l=1,\ 2.
$$

Известно, что каждому нетривиальному решению уравнения (6) при $k\geq 2$ соответствует нетривиальное поле изгибания

$$
z_k(u,\ v)=\alpha_k(u,\ v)\,.\,e+\beta_k(u,\ v)\,.\,a(v)+\gamma_k(u,\ v)\,.\,a'(v).
$$

Так как поле $z_k(u,\ v)$ принадлежит классу C^2 на регулярных кусках S_i, $i=1,\ 2$, и классу C на всей поверхности Σ, то $\chi_{kl,1}(u)$ и $\chi_{kl,2}(u)$, соответствующие полям $z_{k,1}(u,\ v)$ для S_1 и $z_{k,2}(u,\ v)$ для S_2, удовлетворяют уравнениям

$$
(7)\qquad
\begin{gathered}
r_1(u)\chi''_{kl,1}(u)+(k^2-1)r''_1(u)\chi_{kl,1}(u)=0,\\
r_2(u)\chi''_{kl,2}(u)+(k^2-1)r''_2(u)\chi_{kl,2}(u)=0, \quad k\geq 2, \quad l=1,\ 2,
\end{gathered}
$$

и условиям сопряжения

$$
(8)\qquad
\begin{gathered}
\chi_{kl,1}(u_1)=\chi_{kl,2}(u_1),\\
r_1(u_1)\chi'_{kl,1}(u_1)+(k^2-1)r_1'(u_1)\chi_{kl,1}(u_1)\\
=r_2(u_1)\chi'_{kl,2}(u_1)+(k^2-1)r_2'(u_1)\chi_{kl,2}(u_1), \quad k\geq 2, \quad l=1,\ 2,
\end{gathered}
$$

на линии склеивания. Ввиду однородности уравнений (7) и условия (8) можем принять $\chi_{kl,1}(u_1)=\chi_{kl,2}(u_1)=1$.

Пусть L внутренняя параллель поверхности S_2. Обозначим через Σ_L ту часть поверхности Σ, которая ограничена кривой L и не содержит полюс поверхности S_2. Имеют место следующие теоремы:

Теорема 1. Если L не является параллелью омбилических точек поверхности S_2, то Σ_L жестка по отношению к б. м. изгибаниям, сохраняющим среднюю кривизну H вдоль L.

Теорема 2. Поверхность Σ_L жестка по отношению к б. м. изгибаниям, сохраняющим нормальную кривизну ν (кривизну $\varkappa$) параллели L.

Теорема 3. Если параллель L не является геодезической линией поверхности S_2, то поверхность Σ_L жестка по отношению к б. м. изгибаниям, сохраняющим угол θ вдоль L.

Теорема 4. Поверхность Σ_L тогда и только тогда допускает б. м. изгибание, сохраняющее кручения параллели L, когда допускает б. м. изгибание скольжения вдоль плоскости L.

Теорема 5. Пусть либо $\dfrac{r_2''(u)}{u-u_2}\in C[u_2,\ u_1]$, либо c_2 аналитическая в окрестности $u=u_2$. а. Если $r_1'(u_1)=r_2'(u_1)$, то для каждого $k\geq 2$ существует параллель $L_k\in S_2$ такая, что поверхность Σ_{L_k} нежестка по

отношению к б. м. изгибаниям, сохраняющим геодезическое кручен параллели L_k.

б. Если $r_1'(u_1) \neq r_2'(u_1)$, то может существовать лишь не более че конечное число параллелей $L_k \in S_2$ такие, что поверхность Σ_{L_k} являет нежесткой по отношению к б. м. изгибаниям, сохраняющим геодезич ское кручение параллели L_k.

3. Для вариации величин $\varkappa$, τ, ν, α, θ произвольной кривой L р гулярной поверхности $S: x = x(u, v)$ имеем [1]:

$$\delta\varkappa = \delta\nu \cos\theta, \tag{9}$$

$$\delta\tau = \delta\alpha + \frac{d}{ds}\left(\frac{\sin\theta}{\varkappa}\,\delta\nu\right), \tag{10}$$

$$\delta\nu = \delta L\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\delta M\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \delta N\left(\frac{dv}{ds}\right)^2, \tag{11}$$

$$\delta\alpha = -\delta L\frac{du}{ds}\frac{du}{d\sigma} - \delta M\frac{du}{d\sigma}\frac{dv}{ds} - \delta M\frac{dv}{d\sigma}\frac{du}{ds} - \delta N\frac{dv}{d\sigma}\frac{dv}{ds}, \tag{12}$$

$$\delta\theta = -\frac{\delta\nu}{\varkappa}\sin\theta, \tag{13}$$

где $\frac{du}{ds}$, $\frac{dv}{ds}\left(\frac{du}{d\sigma}, \frac{dv}{d\sigma}\right)$ контравариантные координаты единичного кас тельного вектора t кривой L (единичного вектора p тангенциальн нормали кривой L), т. е. $t = u_s . x_u + v_s . x_v$, $(p = u_\sigma . x_u + v_\sigma . x_v)$, а уг $\theta = \eta(n, l)_e$, притом $\eta = 1$, если пара векторов n, l — правая и $\eta = -$ если — левая. (Триэдры $Ptnb$ и $Ptpl$ имеют одинаковую ориентац [1]. Здесь n — орт главной нормали, a. b — орт бинормали кривой L, l — о нормали поверхности S [13].)

Замечание 1. Из (9) видно, что если вдоль кривой L $\cos\theta \neq$ то $\delta\varkappa_L = 0$ тогда и только тогда, когда $\delta\nu_L = 0$.

Замечание 2. Из (13) следует, что если L геодезическая и вдо ное $\varkappa \neq 0$, то всегда $\delta\theta = 0$.

Пусть L параллель ($u = \text{const}$) поверхности $\Sigma = S_1 + S_2$. Тогда

$$\frac{du}{ds} = 0,\quad \frac{dv}{ds} = \frac{1}{r};\quad \frac{du}{d\sigma} = \frac{1}{\sqrt{1+r'^2}},\quad \frac{dv}{d\sigma} = 0,\quad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+r'^2}}. \tag{14}$$

Отсюда получаем:

$$\delta\varkappa = \cos\theta\,\frac{\delta N}{G}, \tag{15}$$

$$\delta\tau = -\frac{\delta M}{\sqrt{EG}} - \frac{d}{ds}\left(\frac{\sin\theta}{\varkappa}\,\frac{\delta N}{G}\right), \tag{16}$$

(17) $$\delta\gamma = -\frac{\delta N}{G},$$

(18) $$\delta\alpha = -\frac{\delta M}{\sqrt{EG}},$$

(19) $$\delta\theta = -\frac{\sin\theta}{\varkappa}\frac{\delta N}{G},$$

где $E = 1 + r'^2$, $G = r^2$. Для вариации средней кривизны H имеем

(20) $$\delta H = \frac{1}{2EG}(G\delta L + E\delta N).$$

Замечание 3. Из (18) видно, что вдоль параллели L $\delta\alpha = 0$ тогда и только тогда, когда $\delta M = 0$. Отсюда следует, что требование $\delta\alpha|_L = 0$ эквивалентно требованию сохранения линий кривизны поверхности Σ вдоль параллели L.

Найдем вариации коэффициентов второй квадратичной формы поверхности Σ. Рассмотрим семейство поверхностей Σ^ε — б. м. изгибания поверхности Σ. Тогда из (1) и (2) следует

$$\Sigma^\varepsilon : x(u, v, \varepsilon) = (u + \varepsilon\alpha) \cdot e + (r + \varepsilon\beta) \cdot a + \varepsilon\gamma \cdot a',$$

где ε — произвольный числовой параметр. Обозначим через L^ε, M^ε, N^ε коэффициенты второй квадратичной формы регулярных кусков поверхности Σ^ε. Для вариации δL, δM, δN, т. е. для коэффициентов перед ε в L^ε, M^ε, N^ε, учитывая (3), получаем:

(21) $$\delta L = -\sqrt{1 + r'^2}\beta_{uu},$$

(22) $$\delta M = \frac{\sqrt{1 + r'^2}}{r}[r(\gamma_u - \beta_{uv}) + r'(\beta_v - \gamma)],$$

(23) $$\delta N = -\sqrt{1 + r'^2}(\beta + \beta_{vv}),$$

откуда

(24) $$\delta\varkappa = -\frac{1}{r^2}(\beta - \beta_{vv}),$$

(25) $$\delta\tau = \frac{1}{r^2}\left\{r(\beta_{uv} - \gamma_u) - r'(2\beta_v - \gamma + \beta_{vvv})\right\},$$

(26) $$\delta\nu = -\frac{\sqrt{1 + r'^2}}{r^2}(\beta + \beta_{vv}),$$

(27) $$\delta\alpha = -\frac{1}{r^2}[r(\gamma_u - \beta_{uv}) - r'(\beta_v - \gamma)],$$

$$\delta\theta = \frac{r'}{r}(\beta + \beta_{vv}), \tag{28}$$

$$\delta H = -\frac{1}{2r^2\sqrt{1+r'^2}}[r^2\beta_{uu} + (1+r'^2)(\beta - \beta_{vv})]. \tag{29}$$

В силу (4) формулы (24) — (29) принимают вид:

$$\delta\varkappa = -\frac{1}{r^2}\sum_{k=0}^{\infty}(1-k^2)[\chi_{k1}\cos kv + \chi_{k2}\sin kv], \tag{24'}$$

$$\delta\tau = \frac{1}{r^2}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}[r(k\chi'_{k2} - \psi'_{k2}) - r'(2k\chi_{k2} - \psi_{k1} - k^3\chi_{k2})]\cos kv\right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{\infty}[r(-\psi'_{k2} - k\chi'_{k1}) - r'(-2k\chi_{k1} - \psi_{k2} + k^3\chi_{k1})]\sin kv\right\}, \tag{25'}$$

$$\delta\gamma = -\frac{\sqrt{1+r'^2}}{r^2}\sum_{k=0}^{\infty}(1-k^2)[\chi_{k1}\cos kv + \chi_{k2}\sin kv], \tag{26'}$$

$$\delta\alpha = \frac{1}{r^2}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}[r(\psi'_{k1} - k\chi'_{k2}) + r'(k\chi_{k2} - \psi_{k1})]\cos kv\right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{\infty}[r(\psi'_{k2} + k\chi'_{k1}) + r'(-k\chi_{k1} - \psi_{k2})]\sin kv\right\}, \tag{27'}$$

$$\delta\theta = \frac{r'}{r}\sum_{k=0}^{\infty}(1-k^2)[\chi_{k1}\cos kv + \chi_{k2}\sin kv], \tag{28'}$$

$$\delta H = -\frac{1}{2r^2\sqrt{1+r'^2}}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}[r^2\chi''_{k1} + (1+r'^2)(1-k^2)\chi_{k1}]\cos kv\right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{\infty}[r^2\chi''_{k2} + (1+r'^2)(1-k^2)\chi_{k2}]\sin kv\right\}. \tag{29'}$$

4. Пусть $\chi_{kl,1}(u)$ регулярное решение уравнения (7_1) $(\chi_{kl,1}(0) = \chi'_{kl,1}(0) = 0$ — см. [7], стр. 334, а $\chi_{kl,2}(u)$ решение уравнения (7_2), удовлетворяющее начальным условиям (8) и $\chi_{kl,1}(u_1) = \chi_{kl,2}(u_1) = 1$. Пусть L — внутренняя параллель поверхности S_2, т. е. несовпадающая с параллелью $u = u_1$.

Доказательство теоремы 1. Равенство $\delta H = 0$ вдоль параллели L ($u = \text{const}$) выполнено тогда и только тогда для поля z_k, $k \geqq 2$, когда

$$r_2^2\chi''_{kl,2}+(1+r_2'^2)(1-k^2)\chi_{kl,2}|_L=0,\ l=1,2. \tag{30}$$

Условие (30) при помощи (7_2) принимает вид

$$(1-k^2)(1+r_2'^2+r_2r_2'')\chi_{kl,2}|_L=0,\ l=1,2. \tag{30'}$$

Поскольку $k\geqq 2$ и L не является параллелью омбилических точек поверхности Σ, то $(1-k^2)(1+r_2'^2+r_2r_2'')|_L\neq 0$. Следовательно, $\delta H_L=0$ тогда и только тогда, когда $\chi_{kl,2}|_L=0$. Но при наших предположениях для поверхности Σ в работе [8] показано, что $\chi_{kl,2}(u)>0$, $u\in[u_2, u_1]$. Отсюда следует утверждение теоремы.

Доказательство т. 2 аналогично, а т. 3 следует из (13) и т. 2.

Замечание 4. Если L принадлежит поверхности S_1, то поскольку $\chi_{kl,1}(u)>0$, $0<u\leqq u_1$, утверждения в теоремах 1, 2, 3 имеют место для той части S_{1L} поверхности S_1, которая содержит полюс $u=0$. Эти утверждения для S_{1L} содержатся в результатах И. Н. Векуа [1] и Е. Рембса [4].

Замечание 5. В работе [9] показано, что если S_1 кусочно регулярная, принадлежащая классу C^2 на каждом куске регулярности (равенство $r''(u)=0$ допускается даже на интервалах), то опять $\chi_{kl,1}(u)>0$ в $(0, u_1]$. В силу этого, если L принадлежит поверхности S_1, то утверждения теоремы 1, 2, 3 имеют место и для выпуклой кусочно регулярной поверхности вращения S_1.

Замечание 6. В работе [8] И. Х. Сабитов доказывает, при некоторых предположениях для удельного наклона, что для поверхности $\Sigma=S_1+\ldots+S_n$ (см. [8], рис. 1) решения $\chi_{k,m}(u)$, $m=1,\ldots,n$, уравнений, аналогичных уравнениям [7], положительные. В силу этого, если поверхность S_1 удовлетворяет условиям пункта 2., то теоремы 1, 2, 3 имеют место и для поверхности Σ_L, где $\Sigma=S_1+\ldots+S_n$, $n>2$.

Доказательство теоремы 4. Из равенства (25) следует, что $\delta\tau_L=0$ тогда и только тогда для z_k, $k\geqq 2$, когда вдоль L выполнено

$$\begin{gathered} r_2'(k\chi'_{k2,2}-\psi'_{k1,2})-r_2'(2k\chi_{k2,2}-\psi_{k1,2}+k^3\chi_{k2,2})=0,\\ r_2(-\psi'_{k2,2}-k\chi'_{k1,2})-r_2'(-2k\chi_{k1,2}-\psi_{k2,2}+k^3\chi_{k1,2})=0. \end{gathered} \tag{31}$$

При помощи (5) условия (31) принимают вид

$$\left.\frac{\chi'_{kl,2}}{(k^2-1)\chi_{kl,2}}+\frac{r_2'}{r_2}\right|_L=0,\ l=1,\ 2. \tag{31'}$$

Левая часть равенства (31') в работе [10] обозначена $f_{k,2}(u)$. Там показано, что условие $f_{k,2\,L}=0$ является необходимым и достаточным, чтобы поверхность Σ_L допускала б. м. изгибания скольжения. Этим теорема доказана.

Из работы [10] и теоремы 4 получаем:

Следствие 1. а. Пусть $r_1'(u)\neq r_2'(u_1)$. Тогда для существования внутренних параллелей $L\in S_2$ таких, что поверхность Σ_L допускает б. м.

изгибания, сохраняющие кручения кривой L, необходимо и достаточн чтобы $r_1'(u_1)<0$. Все эти параллели образуют счетное множество $\{L_i$ и сгущаются к максимальной параллели поверхности S_2.

б. Если $r_1'(u_1)=r_2'(u_1)$, то утверждение в пункте а) остается силе, если

$$r_2''(u)r_1(u)-r_1''(u)r_2(u)\leq 0,\ u\in(u_2,\ u_1].$$

Следствие 2. Если $r_1'(u_1)=0$, то поверхность Σ_L жестка п отношению к б. м. изгибаниям, сохраняющим кручение кривой L.

Следствие 3. Если $r_1'(u_1)<0$ и $L=L_k$, то поверхность Σ жестка по отношению к б. м. изгибаниям, сохраняющим кручени кривой L.

Замечание 7. Если параллель L принадлежит поверхности S то теорема 4 имеет место для той части S_{1L} поверхности S_1, к торая содержит полюс $u=0$. Тогда результаты Е. Рембса [11] о су ществовании параллелей на замкнутой выпуклой поверхности вр щения, вдоль которых часть поверхности с большей интегральн кривизной допускает нетривиальное изгибание скольжения, можн сформулировать как результат о существовании параллелей, вдоль кот рых кручение сохраняется.

Замечание 8. В силу замечания 2 работы [10] имеет мест теорема, аналогичная теореме 4, и для поверхности Σ_L, где $\Sigma=S_1+\ldots+S$ $n>2$.

Доказательство теоремы 5. Из (27) видно, что вдоль паралле L $\delta\alpha=0$ тогда и только тогда для поля $z_k(u,v)$, $k\geq 2$, когда

$$\begin{aligned} &r_2(\psi'_{k1,2}-k\chi_{k2,2})+r_2'(k\chi_{k2,2}-\psi_{k1,2})_L=0,\\ &r_2(\psi'_{k2,2}+k\chi'_{k1,2})+r_2'(-k\chi_{k1,2}-\psi_{k2,2})_L=0. \end{aligned} \tag{32}$$

При помощи равенства (5) условие (32) принимает вид

$$r_2\chi'_{kl,2}-r_2'\chi_{kl,2}{}_L=0,\ k\geq 2,\ l=1,2. \tag{32'}$$

Вводим обозначения

$$\theta_{kl,i}(u)=r_i\chi'_{kl,i}-r_i'\chi_{kl,i},\ k\geq 2,\ l=1,2,\ i=1,2.$$

Так как $\theta'_{kl,i}(u)=-k^2\chi_{kl,i}r_i''\geq 0$ (равенство возможно только в отдел ных точках), то функция $\theta_{kl,i}(u)$ возрастающая. Поскольку в окрес ности полюса $u=0$ поверхность S_1 аналитическая и полюс не являетс параболической точки, то в окрестности полюса $r_1(u)=\sqrt{u}\,l(u)$, $l(0)\neq$ и регулярный интеграл уравнения (7_1) имеет вид

$$\chi_{kl,1}=u^{\frac{k-1}{2}}P_{kl,1}(u),\ P_{kl,1}(0)\neq 0.$$

Тогда имеем

$$\theta_{kl,1}(0)=0,\ \theta_{kl,1}(u)>0 \text{ в } (0,\ u_1]. \tag{33}$$

Кроме этого нам известно, что $\chi_{kl,2}(u)>0$ в $[u_2, u_1]$ [8] и что функция $\chi_{kl,2}(u)$, поскольку является решением уравнения (7_2) и $r_2''\leqq 0$, обращена выпуклостью вниз.

а. Пусть $r_1'(u_1)=r_2'(u_1)$. Тогда

$$\theta_{kl,1}(u_1)=\theta_{kl,2}(u_1)>0,\ k\geqq 2,\ l=1,2, \tag{34}$$

и

$$\chi'_{kl,2}(u_1)=\chi'_{kl,1}(u_1)>0,\ k\geqq 2,\ l=1,2. \tag{35}$$

1. Пусть $r_1'(u_1)\geqq 0$. Так как выполнено равенство (35), то решение $\chi k_{l,2}(u)$, $u\in[u_2, u_1]$, уравнения (7_2) при начальных условиях (8) может иметь минимум, а может и не иметь. Если $\chi_{kl,2}(u)$ не имеет минимума (это возможно только при $r_2''(u):(u-u_2)\in C[u_2, u_1]$), то

$$\theta_{kl,2}(u_2)=-\chi_{kl,2}(u_2)r_2'(u_2)<0. \tag{36}$$

Тогда из (34), (36) и из того, что функция $\theta_{kl,2}(u)$, $u\in[u_2, u_1]$, возрастающая, следует, что существует точка $u_k^*\in(u_2\, u_1)$ такая, что $\theta_{kl,2}(u_k^*)=0$. Если функция $\chi_{kl,2}(u)$ имеет минимум в некоторой точке $\bar{u}_k\in(u_2, u_1)$, то

$$\theta_{kl,2}(\bar{u}_k)=-r_2'\chi_{kl,2}<0. \tag{37}$$

Тогда из (34) и (37) следует, что опять существует точка $u_k^*\in(\bar{u}_k, u_1)$ такая, что $\theta_{kl,2}(u_k^*)=0$.

2. Пусть $r_1'(u_1)<0$. Обозначим через u^* точку, где $r_2'(u^*)=0$. Если $\chi_{kl,2}(u)$ не имеет минимума, то из (36) и

$$\theta_{kl,2}(u^*)=r_2\chi'_{kl,2}>0 \tag{38}$$

следует, что функция $\theta_{kl,2}(u)$ имеет нуль $u_k^*\in(u_2, u^*)$. Пусть $\chi_{kl,2}(u)$ имеет минимум в $\bar{u}_k$. Возможны следующие три случая: а) $\bar{u}_k<u^*$; б) $u^*<\bar{u}_k$ и в) $\bar{u}_k=u^*$. Сравнивая знаки функции $\theta_{kl,2}(u)$ в $\bar{u}_k$ и u^*, получаем, что функция $\theta_{kl,2}(u)$ опять имеет нуль u_k^*, притом в случае а) $u_k^*\in(\bar{u}_k, u^*)$, в случае б) $u_k^*\in(u^*, \bar{u}_k)$ и в случае в) $u_k^*=u^*$.

б. Пусть $r_1'(u_1)\neq r_2'(u_1)$. Так как $r_1'(u_1)<r_2'(u_1)$, то $r_1'(u_1)-r_2'(u_1)<0$ Из (8) получаем

$$\theta_{kl,2}(u_1)=\chi_{kl,1}\, r_1(k^2-1)\left[\frac{\chi'_{kl,1}}{(k^2-1)\chi_{kl,1}}-\frac{r_2'}{r_1(k^2-1)}+\frac{r_1'-r_2'}{r_1}\right]. \tag{39}$$

Кроме этого имеем

$$\lim_{k\to\infty}\frac{r_2'(u_1)}{r_1(u_1)(k^2-1)}=0. \tag{40}$$

При наших предположениях для поверхности S_1 и поля $z(u, v)$ в [11] (см. также [7]) показано

$$(41)\quad \lim_{k\to\infty}\frac{\chi'_{kl,1}(u)}{(k^2-1)\chi_{kl,1}(u)}=0,\quad \frac{\chi'_{k_1 l,1}(u)}{(k_1^2-1)\chi_{k_1 l,1}(u)}>\frac{\chi'_{k_2 l,1}(u)}{(k_2^2-1)\chi_{k_2 l,1}(u)}\quad \text{при } k_1<k$$

для каждого $u\in(0, u_1]$. Из (39) — (41) следует существование числ N такого, что для $k>N$ имеем $\theta_{kl,2}(u_1)<0$. Так как $\theta_{kl,2}(u)$ во растающая, то для $k>N$ $\theta_{kl,2}(u)<0$ в $[u_2, u_1]$. Следовательно, для $k>$ функция $\theta_{kl,2}(u)$ не имеет нуля.

Рассмотрим функции $\theta_{kl,2}(u)$, $k\leq N$. Из (8) получаем

$$(42)\qquad \chi'_{kl,2}(u_1)=(k^2-1)\chi_{kl,1}\left(\frac{\chi'_{kl,1}}{(k^2-1)\chi_{kl,1}}+\frac{r_1'-r_2'}{r_1}\right).$$

Ввиду (41) из (42) следует, что существует число N_1 такое, что

$$\chi'_{kl,2}(u_1)\geq 0 \text{ для } k\leq N_1 \text{ и } \chi'_{kl,2}(u_1)<0 \text{ для } k>N_1.$$

1. Пусть $r_2'(u_1)\geq 0$. Тогда $N_1\geq N$. Применяя доказательство а. получаем, что $\theta_{kl,2}(u)$, $k\leq N$, имеет нуль, если $\theta_{kl,2}(u_1)>0$ и $\chi'_{kl,2}(u_1)>0$

2. Пусть $r_2'(u_1)<0$. Тогда $N_1\leq N$. Если $N_1<N-1$, то $\theta_{kl,2}(u$ $N_1<k<N$, имеют нули в (u^*, u_1), так как $\theta_{kl,2}(u^*)=r_2\chi'_{kl,2}<0$. Для фун ций $\theta_{kl,2}(u)$, $k\leq N_1$, применяя доказательство а. 2., получаем, что они тож имеют нули. Функция $\theta_{Nl,2}(u)$ имеет нуль, если $\theta_{Nl,2}(u_1)>0$.

Таким образом, в случае б. только функции $\theta_{kl,2}(u)$, $k<N$, могу иметь нули в (u_2, u_1). С другой стороны, так как поле z_k, соответствующе решению χ_{kl} уравнений (7), нетривиальное при $k\geq 2$, то получаем если $N\geq 2$, то только для k, $2\leq k<N$, может существовать параллель L такая, что поверхность Σ_{L_k} допускает нетривиальное б. м. изгибани сохраняющее геодезическое кручение вдоль параллели L_k. Теоре доказана.

Следствие 4. Если параллель $L=L_k$, то поверхность Σ_L жестк по отношению к б. м. изгибаниям, сохраняющим геодезическое круч ние вдоль L.

Замечание 9. Пусть $\Sigma=S_1+\ldots+S_n$, $n>2$, где S_1 удовлетв ряет условиям п. 2 и касание допустимо лишь для $r_1(u)$ и $r_2(u)$. Есл область определения некоторого меридиана $r_{m-1}(u)$ выходит за пр делы области определения вышележащего меридиана $r_m(u)$, то пре положим, что выполнены условия, указанные в [8] для удельно наклона выступающего конца и его полного прообраза. При эти предположениях в [7] (см. лемму 2 и замечание 2) показано, что

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\chi'_{kl,m}(u)}{(k^2-1)\chi_{kl,m}(u)}=0,\quad k\geq 2,\ l=1,2,\ m=2,\ldots,n,$$

для каждого $u\in[u_m, u_{m-1})$, если m четно, и для каждого $u\in(u_{m-1}, u_m$ если m нечетно. В силу этого для поверхности $\Sigma=S_1+\ldots+S_n$, $n>$ может существовать лишь не более чем конечное число параллел $L_k\in S_n$ таких, что та часть Σ_{L_k} поверхности Σ, которая ограничен

параллелью L_k и не содержит полюса $u=u_n$ поверхности S_n, является нежесткой по отношению к б. м. изгибаниям, сохраняющим геодезическое кручение вдоль L_k.

5. В этом пункте приведем пример нежесткой поверхности по отношению к б. м. изгибаниям, сохраняющим геодезическое кручение вдоль параллели L. Из примера видно, что в случае б) теоремы 5 б. м. изгибания действительно возможны.

Пусть поверхность Σ получается вращением кривой $c=c_1+c_2$, где

$$c_1: r_1=\sqrt{2ua_1-u^2},\quad 0\leq u\leq u_1,$$

$$c_2: r_2=\sqrt{R_2^2-(u-a_2)^2},\quad a_2-R_2=u_2\leq u\leq u_1, \tag{43}$$

$$a_2>R_2,\quad u_1<2a_1,\quad r_1(u_1)=r_2(u_1).$$

Тогда

$$\chi_{kl,1}(u)=\frac{\alpha_{kl,1}}{a_1}\,u^{\frac{k+1}{2}}(2a_1-u)^{\frac{1-k}{2}} \tag{44}$$

— регулярное решение уравнения (7_1), а

$$\chi_{kl,2}(u)=\frac{\beta_{kl,2}}{R_2}(R_2+u-a_2)^{\frac{k-1}{2}}(R_2-u+a_2)^{\frac{1-k}{2}} \tag{45}$$

$$+\frac{\gamma_{kl,2}}{R_2}(R_2+u-a_2)^{\frac{1-k}{2}}(R_2-u+a_2)^{\frac{1+k}{2}}$$

общий интеграл уравнения (7_2). Из (43) и (44) получаем:

$$\frac{\chi'_{kl,1}}{(k^2-1)\chi_{kl,1}}+\frac{r_1'-r_2'}{r_1}\Bigg|_{u=u_1}=\frac{k^2(a_1-a_2)+ka_1+a_2-u_1}{(k^2-1)(2a_1u_1-u_1^2)}, \tag{46}$$

$$\frac{\chi'_{kl,1}}{(k^2-1)\chi_{kl,1}}+\frac{r_1'-r_2'}{r_1}-\frac{r_2^1}{(k^2-1)r_1}\Bigg|_{u=u_1}=\frac{k^2(a_1-a_2)+ka_1}{(k^2-1)(2a_1u_1-u_1^2)}. \tag{47}$$

1. Пусть $u_1\leq a_2$. Тогда $r_2'(u_1)\geq 0$ и $N=\left[\dfrac{R_1}{a_2-a_1}\right]$ (если $\dfrac{R_1}{a_2-a_1}$ не целое число, то $\theta_{Nl,2}(u)$ тоже имеет нуль в (u_2,u_1)). Выбираем $a_1=4$, $a_2=5$, $R_2=4$. Тогда $u_1=4{,}5$. Из (47) получаем $N=4$. Следовательно, существуют параллели L_2 и L_3 такие, что $\theta_{2l,2}|_{L_2}=0$ и $\theta_{3l,2}|_{L_3}=0$. Отсюда следует, что поверхности Σ_{L_2} и Σ_{L_3} допускают нетривиальные б. м. изгибания ($z_2(u,v)$ для Σ_{L_2} и $z_3(u,v)$ для Σ_{L_3}), сохраняющие геодезическое кручение соответственно вдоль L_2 и L_3.

2. Пусть $u_1>a_2$. Тогда $r_2'(u_1)<0$. Выбираем $a_1=4$, $a_2=5$, $R_2=3{,}5$, откуда получаем $u_1=\dfrac{12{,}75}{2}$. Из (46) и (47) вычисляем $N_1=3$, $N=4$.

Следовательно, существуют параллели L_2 и L_3 такие, что соответству ющие поверхности Σ_{L_2} и Σ_{L_3} допускают нетривиальные б. м. изгибани ($z_2(u, v)$ для Σ_{L_2} и $z_3(u, v)$ для Σ_{L_3}), которые сохраняют геодезическо кручение соответственно вдоль L_2 и L_3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Векуа, И. Н.: Обобщенные аналитические функции. Москва, 1959.
2. Hellwig, G.: Über die Verbiegbarkeiit von Flächenstücken mit positiver Gaussche Krümmung. Arch. d. Math., vol. VI (1955), 243—249.
3. Grotemeyer, K.-P.: Zur infinitesimalen und endlichen Verbiegung von Halbe flächen. Arch. d. Math., vol. IV (1953), 52—60.
4. Rembs, E.: Randvorgaben bei infinitesimaler Verbiegung einfach zusammenhän gender konvexer Flächen. Monatshefte für Math., 60, 1 (1956), 57—65.
5. Rembs, E.: Bemerkung zu... Monatshefte für Math., 60, 3 (1956), 212—213.
6. Кон-Фоссен, С. Э.: Нежесткие замкнутые поверхности. Усп. матем. наук, № 1 (1954), 63—81.
7. Иванова-Каратопраклиева, Ив.: О нежесткости некоторых составн поверхностей вращения. Матем. заметки, 10, № 3 (1971), 333—344.
8. Сабитов, И. Х.: О жесткости некоторых поверхностей вращения. Матем. сб 60, № 3 (1963), 506—519.
9. Боярский, Б. В.: О жесткости некоторых составных поверхностей. Усп. мате наук, 14, № 6 (1969), 141—146.
10. Иванова-Каратопраклиева, Ив.: О бесконечно малых изгибаниях скол жения некоторых составных поверхностей вращения. Матем. заметки, 10, № (1971), 549—554.
11. Rembs, E.: Über Gleitverbiegungen. Math. Ann., 111 (1935), 587—595.
12. Ефимов, Н. В.: Исследование бесконечно малых изгибаний некоторых класс поверхностей. Матем. сб., т. 20 (62), 1, 1947, 27—53.
13. Петканчин, Б.: Диференциална геометрия. София, 1964.

Постъпила на 12. XI. 1973 г.

INFINITESIMALE VERBIEGUNGEN DER ROTATIONSFLÄCHEN BE EINIGEN RANDBEDINGUNGEN

I. Iwanowa-Karatoprakliewa

(ZUSAMMENFASSUNG)

In der vorliegenden Arbeit betrachtet man die infinitesimalen Verbi gungen (erster Ordnung) einer einfach zusammenhängenden stückweis konvexen, aber im Grossen nicht konvexen Rotationsfläche, die vom Bre tenkreis L begrenzt ist, bei den folgenden Randvorgaben: a) die Variatio δH der mittleren Krümmung H der Fläche längs des Randbreitenkreis L verschwindet; b) die Variation $\delta\nu$ ($\delta\varkappa$) der Normalkrümmung ν (Krü mung $\varkappa$) der Randkurve L verschwindet; c) die Variation $\delta\theta$ des Winke

θ verschwindet, wo θ der Winkel zwischen der Flächennormalen l und der Hauptnormalen der Randkurve L ist; d) die Variation $\delta\tau$ der Windung τ der Randkurve L verschwindet; e) die Variation $\delta\alpha$ der geodätischen Windung α der Randkurve L verschwindet.

Es seien S_1 und S_2 konvexe Rotationsflächen, die eine gemeinsame Achse haben und der Klasse C^2 angehören. Betrachten wir die längs des Breitenkreises $u = u_1$ innerlich zusammengeklebte Fläche $\Sigma = S_1 + S_2$. Es sei $u = 0$ der Pol der Fläche S_1 und $u = u_2$ der Pol der Fläche S_2. Es sei L ein innerer Breitenkreis der Fläche S_2. Bezeichnen wir mit Σ_L das jenige Stück der Fläche Σ, das vom Breitenkreis L begrenzt ist und den Pol der Fläche S_2 nicht erhält. Es sei die Fläche S_1 analytisch in einer Umgebung des Pols $u = 0$ und der Pol sei kein parabolischer Punkt für S_1. Dann gilt:

Satz 1. Wenn L nicht aus Nabelpunkten der Fläche S_2 besteht, dann ist die Fläche Σ_L starr gegenüber allen infinitesimalen Verbiegungen, die H längs L stationär lassen.

Satz 2. Die Fläche Σ_L ist starr gegenüber allen infinitesimalen Verbiegungen, die die Normalkrümmung ν (Krümmung $\varkappa$) des Breitenkreises L stationär lassen.

Satz 3. Wenn L keine geodätische Linie der Fläche S_2 ist, dann ist die Fläche Σ_L starr gegenüber allen infinitesimalen Verbiegungen, die den Winkel θ längs L stationär lassen.

Satz 4. Die Fläche Σ_L lässt eine infinitesimale Verbiegung zu, die die Windung des Breitenkreises L stationär lässt, dann und nur dann, wenn sie eine Gleitverbiegung zulässt.

Satz 5. a) Wenn $r_1'(u_1) = r_2'(u_1)$ $[r_1 = r_1(u)$ $(r_2 = r_2(u))$ ist die Gleichung der Meridiankurve c_1 $(c_2)]$, dann existiert zu jedem $k \geq 2$ ein Breitenkreis $L_k \in S_2$, so dass die Fläche Σ_{L_k} nicht starr ist gegenüber den infinitesimalen Verbiegungen, die die geodätische Windung des Breitenkreises stationär lassen.

b) Wenn $r_1'(u_1) \neq r_2'(u_1)$, dann können nur endlich viele Breitenkreise $L_k \in S_2$ so existieren, dass die Fläche Σ_{L_k} gegenüber den infinitesimalen Verbiegungen, die die geodätische Windung längs L stationär lassen, nicht starr ist.