СХОДИМОСТ НА РЕДОВЕ ПО ПОЛИНОМИТЕ НА ЛАГЕР

Петър Русев

§ 1. Определение и основни свойства на полиномите на Лагер. Нека s е произволно комплексно число и $z \in \mathbf{C}-(-\infty, 0]$ (където $\mathbf{C}$ е комплексната равнина и $(-\infty, 0]:=\{x: -\infty < x \leqq 0\}$). По определение $z^s := \exp\{s \operatorname{Log}_0 z\}$. Ако α е комплексно число, отлично от -1, $-2, \ldots$, и $z \in \mathbf{C}-(-\infty, 0]$, да положим [1, стр. 110, (5. 1. 5)]

$$L_n^{(\alpha)}(z) = \frac{1}{n!} z^{-\alpha} e^z \frac{d^n}{dz^n}\{z^{n+\alpha} e^{-z}\} \tag{1. 1}$$

$(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Така дефинираните функции са очевидно аналитични в областта $\mathbf{C}-(-\infty, 0]$. Всъщност, както е добре известно, $L_n^{(\alpha)}(z)$ е полином на z от n-та степен и полиномите $\{L_n^{(\alpha)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ се наричат именно полиноми на Лагер с параметър α. За да се убедим, че равенството (1. 1) наистина дефинира една система от полиноми, ще проверим най-напред, че $L_n^{(\alpha)}(z)$ е решение на рекурентното уравнение

$$(n+1)\, y_{n+1} + (z-\alpha-2n-1)\, y_n + (n+\alpha)\, y_{n-1} = 0. \tag{1.2}$$

Наистина, ако γ е окръжност с център точката z и такава, че изцяло лежи в областта $\mathbf{C}-(-\infty, 0]$, то съгласно интегралните формули за производните ще имаме

$$(n+1)\, L_{n+1}^{(\alpha)}(z) + (z-\alpha-2n-1)\, L_n^{(\alpha)}(z) + (n+\alpha)\, L_{n-1}^{(\alpha)}(z)$$

$$= \frac{n+1}{(n+1)!} z^{-\alpha} e^z \frac{(n+1)!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\zeta^{n+1-\alpha} e^{-\xi}}{(\zeta-z)^{n+2}}\, d\zeta$$

$$+ (z-\alpha-2n-1) \frac{1}{n!} z^{-\alpha} e^z \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\zeta^{n-\alpha} e^{-\xi}}{(\zeta-z)^{n+1}}\, d\zeta$$

$$+ (n+\alpha) \frac{1}{(n-1)!} z^{-\alpha} e^z \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\zeta^{n-1-\alpha} e^{-\xi}}{(\zeta-z)^n}\, d\xi$$

$$= \frac{z^{-\alpha} e^{z}}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\zeta^{n-1+\alpha} e^{-\zeta}}{(\zeta - z)^{n+2}} \{(n+1)\zeta^2 + (z - \alpha - 2n - 1)\zeta(\zeta - z)$$

$$+ (n+\alpha)(\zeta - z)^2\} d\zeta = \frac{z^{-\alpha} e^{z}}{2\pi i} \int_{\gamma} z \frac{\zeta^{n-1-\alpha} e^{-\zeta}}{(\zeta - z)^{n-2}} \{\zeta^2 - (z + \alpha - 1)\zeta$$

$$+ (n+\alpha) z\} d\zeta = -\frac{z^{-\alpha} e^{z}}{2\pi i} \int_{\gamma} z \frac{\partial}{\partial \zeta} \left\{ \frac{\zeta^{n-\alpha} e^{-\zeta}}{(\zeta - z)^{n-1}} \right\} d\zeta = 0 .$$

Чрез непосредствено пресмятане намираме, че $L_0^{(\alpha)}(z) = 1$, $L_1^{(\alpha)}($ $= -z + \alpha + 1$ и от рекурентното уравнение (1.2) следва чрез индукци че $L_n^{(\alpha)}(z)$ е полином на z от n-та степен. Друго и по-директно док зателство на последния факт може да бъде получено, като се намер явен вид на $L_n^{(\alpha)}(z)$ посредством формулата на Лайбниц за диференц ране на произведение от две функции. Получава се, че

$$L_n^{(\alpha)}(z) = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{\nu} \binom{n+\alpha}{n-\nu} \frac{z^{\nu}}{\nu!}, \tag{1.3}$$

откъдето веднага следва, че $L_n^{(\alpha)}(z)$ е полином на z от n-та степе Нещо повече, равенството (1.3) дава възможност да се дефинира полиномите на Лагер и когато параметърът α е цяло отрицателно числ Наистина, ако $\alpha = -k$ и $1 \leqq k \leqq n$, от (1.3) след несложни преобр зувания се получава, че

$$L_n^{(-k)}(z) = (-z)^k \frac{(n-k)!}{n!} L_{n-k}^{(k)}(z). \tag{1.4}$$

Нека a, b и $c \neq 0, -1, -2, \ldots$ са произволни комплексни числ и

$$F(a, b, c; z) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\ldots(a+\nu-1)\, b(b+1)\ldots(b+\nu-1)}{c(c+1)\ldots(c+\nu-1)} \cdot \frac{z^{\nu}}{\nu!} \tag{1.5}$$

е хипергеометричната функция с параметри a, b, c [2, стр. 69, (2)] Ако заместим в (1.5) z със $\frac{z}{b}$ и положим по определение

$$\Phi(a, c; z) := \lim_{b \to \infty} F\left(a, b, c; \frac{z}{b}\right)$$

* В следващото изложение за всички необходими специални функции ще бъд използувани означенията и определенията, възприети в цитирания справочник.

функцията

$$(1.6)\qquad \Phi(a,\ c;\ z)=1+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{a(a+1)\ldots(a+\nu-1)}{c(c+1)\ldots(c+\nu-1)}\cdot\frac{z^{\nu}}{\nu!}$$

се нарича изродена (или още конфлуентна) хипергеометрична функция с параметри a, c [2, стр. 237]. Полиномите на Лагер се представят чрез тези функции, а именно [3, стр. 255, (36)]

$$(1.7)\qquad L_n^{(\alpha)}(z)=\binom{n+\alpha}{n}\Phi(-n,\ \alpha+1\ ;\ z)$$

$$=\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(\alpha+1)}\Phi(-n,\ \alpha+1,\ z).$$

В работата си [3] О. Перон е изследвал асимптотичното поведение на изродените хипергеометрични функции като функции на z и на параметрите a, c. В частност, когато $a=-n$, $c=\alpha+1$ и α е произволно реално число, отлично от -1, $-2,\ldots$, се получава следната асимптотична формула за полиномите на Лагер в областта $\mathbf{C}-[0,+\infty)$:

$$(1.8)\qquad L_n^{(\alpha)}(z)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\,e^{\frac{z}{2}}(-z)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\,n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\,e^{2(-z)^{\frac{1}{2}}\sqrt{n}}\,\{1+\lambda_n^{(\alpha)}(z)\},$$

където $\{\lambda_n^{(\alpha)}(z)\}_{n=1}^{\infty}$ са аналитични функции в областта $\mathbf{C}-[0,+\infty)$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n^{(\alpha)}(z)=0$ равномерно върху всяко компактно подмножество на тази област.

Асимптотичното поведение на полиномите на Лагер върху лъча $(0,+\infty)$ е изследвано най-напред от Л. Фейер, който е получил следната формула [1, стр. 206, (8. 22. 1)]:

$$L_n^{(\alpha)}(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,e^{\frac{x}{2}}x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\,n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\cos\left[2(nx)^{\frac{1}{2}}-\frac{\alpha\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right]+k_n^{(\alpha)}(x),$$

където $k_n^{(\alpha)}(x)=O(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}})$ равномерно върху всеки интервал $[\varepsilon,\ \omega]$ $(0<\varepsilon<\omega<+\infty)$. Горната формула може да се запише още във вида

$$(1.9)\qquad L_n^{(\alpha)}(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,e^{\frac{x}{2}}x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\,n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\left\{\cos\left[2(nx)^{\frac{1}{2}}-\frac{\alpha\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right]\right.$$

$$\left.+\mu_n^{(\alpha)}(x)\right\},$$

където $\lim_{n\to\infty} \mu_n^{(\alpha)}(x) = 0$ равномерно върху всеки интервал $[\varepsilon, \omega]$ $(0 < \omega < +\infty)$.

Към формулите, характеризиращи асимптотичното поведение н полиномите на Лагер, трябва да се прибави още и следната:

$$L_n^{(\alpha)}(0) = \binom{n+\alpha}{n}; \tag{1.10}$$

тя се получава непосредствено от (1.3). Формулите (1.9) и (1.10 ако се интересуваме само от „порядъка" на $L_n^{(\alpha)}(x)$ като функция н n, могат да се заменят със следното равенство [1, стр. 186, (7. 6. 11)

$$L_n^{(\alpha)}(x) = O(n^a), a = \max\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}, \alpha\right), \tag{1.11}$$

равномерно върху всеки интервал $[0, \omega]$. При това параметърът α мож да бъде произволно реално число.

За полиномите на Лагер в областта $\mathbf{C} - (-\infty, 0]$ е валидно сле ното интегрално представяне [4, стр. 190, (21)]:

$$L_n^{(\alpha)}(z) = \frac{e^z z^{-\frac{\alpha}{2}}}{n!} \int_0^\infty e^{-t} t^{n+\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(2\sqrt{tz})\, dt, \tag{1.12}$$

където

$$J_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{\alpha+2k}}{k!\, \Gamma(k+\alpha+1)} \tag{1.13}$$

е функцията на Бесел от първи род с параметър α [4, стр. 12, (2) Равенството (1.12) е валидно, когато $\mathrm{Re}\{\alpha\} > -1$, но може д се установи, че то остава в сила и при по-общото предположение, ч $\mathrm{Re}\{n-\alpha\} > -1$.

§ 2. Област на сходимост на един ред по полиномите на Ла гер. В настоящата работа разглеждаме редове по полиномите на Лаге

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n^{(\alpha)}(z) \tag{2.1}$$

с произволни комплексни коефициенти. По-точно, ще третираме из ключително такива редове от вида (2.1), за които множеството им н сходимост съдържа поне една точка вън от лъча $[0, +\infty)$. За такив редове се оказват валидни твърдения, които са аналози на добре по знати свойства на степенните редове. Преди обаче да формулирам

съответните резултати, ще цитираме в превод казаното в [1, стр. 261] относно редове от вида (2. 1):

„(5) Контурът на областта на сходимост на ред по полиномите на Лагер

$$a_0 L_0^{(\alpha)}(z) + a_1 L_1^{(\alpha)}(z) + \ldots + a_n L_n^{(\alpha)}(z) + \ldots$$

се характеризира с условието $\mathrm{Re}\{(-z)^{\frac{1}{2}}\} = \mathrm{const}$. Следователно този контур е парабола с фокус в началото на координатите. Редът е сходящ вътре в тази парабола и е разходящ вън от нея. В сила е формула, аналогична на формулата на Коши — Адамар. Доказателството се основава на съотношението (8. 23. 3)".

Съотношението (8. 23. 3) от [1, стр. 211] има вида

$$\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{1}{2}} \ln L_n^{(\alpha)}(z) = 2\,\mathrm{Re}\{(-z)^{\frac{1}{2}}\}, \tag{2.2}$$

където $z \in \mathbf{C} - [0, +\infty)$, и, както е указано, е непосредствено следствие от асимптотичната формула за полиномите на Лагер в областта $\mathbf{C} - [0, +\infty)$.

В приложеното към [1] допълнение с автор Я. Л. Геронимус се коментират една работа на Е. Хил [5] и една работа на О. Фолк [6], в които се третират проблеми от аналогичен характер, но за редове по по-общи системи от полиноми или аналитични функции, включващи като частни случаи класическите системи ортогонални полиноми. Съгласно коментара на Геронимус [1, стр. 458, 9. 2], в работата на Хил са установени свойствата на областта C_α на абсолютна сходимост на ред от вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(z)$, където $\{P_n(z)\}$ е някаква система от полиноми, не обезателно ортогонална, аналогични на лемата на Абел от теорията на степенните редове. В частност в работата е показано, че в случая на полиноми на Лагер областта C_α е ограничена от „параболата $\mathrm{Im}\sqrt{z} = \mathrm{const}$".

В работата на Фолк се разглежда въпросът за развитие на аналитични функции по система от функции $\{y_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$, като $y_n(z)$ е решение на диференциално уравнение от вида

$$p_0(z)\,y'' + p_1(z)\,y' + [p_2(z) + \lambda_n^2]\,y = 0. \tag{2.3}$$

За определяне областта на сходимост на един такъв ред се полага

$$t = \int_{z_0}^{z} \frac{d\zeta}{\sqrt{p_0(\zeta)}}, \tag{2.4}$$

като предварително в равнината (z) са направени подходящи разреа съединяващи нулите на функцията $p_0(z)$. След това се разглежда об ратната функция $z=\Phi(t)$ на (2. 4), която е изобщо многозначна, н има реален период, накратко казано. Правите линии $\operatorname{Im}\{t\}=\text{const}$ с трансформират чрез функцията $\Phi(t)$ в затворени криви линии C равнината (z), които именно ограждат търсените области на сходи мост на редовете от вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n y_n(z).$$

В частност, ако $p_0(z)=z$, както е в случая, когато (2.3) е диферен циалното уравнение за n-тия полином на Лагер, имаме $t=2\sqrt{z}$; раз резът в равнината (z) е реалната неотрицателна полуос и правите ли нии $\operatorname{Im}\{t\}=\text{const}$ се преобразуват в параболите $\operatorname{Im}\sqrt{z}=\text{const}$.

След тези бележки ще приведем подробни доказателства на спо менатите вече неколкократно свойства на редовете (2.1), отнасящи се до областите им на сходимост. Ще приведем и съответната формул на Коши — Адамар. Както ще видим обаче, за установяването н въпросните свойства съотношението (2.2) не е напълно достатъчно Необходимо е да бъдат привлечени асимптотичните формули за по линомите на Лагер върху лъча $[0, +\infty)$ и по-специално формулат (1.11).

Преди всичко, ако $0<\lambda<+\infty$ е произволно, равенството $\operatorname{Re}\{(-z)^{\frac{1}{2}}\}=\lambda$ дефинира парабола $p(\lambda)$, чисто декартово уравнение $y^2=4\lambda^2(x+\lambda^2)$. От последното се вижда, че оста на параболата $p(\lambda)$ съвпада с реалната ос, а фокусът ѝ е в началото. По-нататък с $\Delta(\lambda)$ ще означаваме вътрешността на параболата $p(\lambda)$, т. е. $\Delta(\lambda)=\{z\in C$ $\operatorname{Re}\{(-z)^{\frac{1}{2}}\}<\lambda\}$. Да отбележим, че ако z_0 е произволна точка от об ластта $C-[0, +\infty)$, през z_0 минава точно една парабола от разглеж дания вид, а именно тази с уравнение $\operatorname{Re}\{(-z)^{\frac{1}{2}}\}=\lambda_0$, където

$$\lambda_0=\operatorname{Re}\{(-z_0)^{\frac{1}{2}}\}.$$

Теорема I (Абел). Ако редът

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n^{(\alpha)}(z) \tag{2.1}$$

е сходящ в някоя точка $z_0 \in \mathbf{C}-[0, +\infty)$, той е абсолютно равномерно сходящ*:

а) върху всяко компактно подмножество на областта $\Delta(\lambda_0)-[0, +\infty)$, където $\Delta(\lambda_0)$ е вътрешността на параболата $p(\lambda_0)$, минаваща през точката z_0;

б) върху всяко компактно подмножество на лъча $[0, +\infty)$.

Доказателство. Нека $M(0<M<+\infty)$ е така избрано, че

$$a_n L_n^{(\alpha)}(z_0) \leqq M$$

за всяко $n=0, 1, 2, \ldots$. От асимптотичната формула (1.8) следва, че съществува естествено число n_0 такова, че

$$L_n^{(\alpha)}(z_0) \neq 0$$

за $n \geqq n_0$.

а) нека K е компактно и принадлежи на областта $\Delta(\lambda_0)-[0, +\infty)$. Понеже K е компактно, съществува λ такова, че $0<\lambda<\lambda_0$ и K се съдържа във вътрешността на параболата $p(\lambda)$. В такъв случай за всяко $z \in K$ ще бъде в сила неравенството $\mathrm{Re}\{(-z)^{\frac{1}{2}}\}<\lambda$. Тогава от равенството

$$a_n L_n^{(\alpha)}(z) = a_n L_n^{(\alpha)}(z_0) \cdot \frac{L_n^{(\alpha)}(z)}{L_n^{(\alpha)}(z_0)} \qquad (n \geqq n_0),$$

като вземем пред вид асимптотичната формула (1.8), намираме, че равномерно по $z \in K$ и $n \geqq n_0$

$$a_n L_n^{(\alpha)}(z) = O\left(\frac{e^{2(-z)^{\frac{1}{2}}\sqrt{n}}}{e^{2(-z_0)^{\frac{1}{2}}\sqrt{n}}}\right) = O\left(e^{-2(\lambda_0-\lambda)\sqrt{n}}\right). \tag{2.5}$$

Но тъй като $\lambda<\lambda_0$, редът

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} e^{-2(\lambda_0-\lambda)\sqrt{n}}$$

е сходящ и от (2.5) следва, че редът (2.1) е нормално, а следователно абсолютно равномерно сходящ върху K.

* Редът $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ от комплексни функции наричаме абсолютно равномерно сходящ в множеството $E \subset \mathbf{C}$, ако редът $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ е равномерно сходящ в E.

б) нека K е компактно подмножество на лъча $[0, +\infty)$. Тогав съществува краен затворен интервал $[0, \omega]$ такъв, че $K \subset [0, \omega]$. Кат вземем пред вид (1.11), получаваме по аналогичен начин, че

$$a_n L_n^{(\alpha)}(x) = O(n^a e^{-2\lambda_0 \sqrt{n}})$$

равномерно по $x \in [0, \omega]$ и $n \geqq n_0$ и абсолютната равномерна сходи мост на реда $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n L_n^{(\alpha)}(x)$ върху интервала $[0, \omega]$, а следователно върху множеството K, следва от сходимостта на реда

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} n^a e^{-2\lambda_0 \sqrt{n}} .$$

Теорема II (Коши — Адамар). Нека $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ е произволна ре дица от комплексни числа и да положим*

$$\lambda_0 = -\lim_{n\to\infty} \frac{\ln a_n}{2\sqrt{n}} . \tag{2.6}$$

Тогава

а) ако $\lambda_0 \leqq 0$, редът (2.1) е разходящ за всяко $z \in \mathbf{C} - [0, +\infty$

б) ако $0 < \lambda_0 < +\infty$, редът (2.1) е абсолютно равномерно схо дящ върху всяко компактно подмножество на областта $\Delta(\lambda_0) - [0, +\infty$ и върху всяко компактно подмножество на лъча $[0, +\infty)$ и е разхо дящ вън от параболата $p(\lambda_0)$;

в) ако $\lambda_0 = +\infty$, редът (2.1) е абсолютно равномерно сходящ върху всяко компактно подмножество на областта $\mathbf{C} - [0, +\infty)$ и вър ху всяко компактно подмножество на лъча $[0, +\infty)$.

Доказателство. а) Нека $z \in \mathbf{C} - [0, +\infty)$ е произволно и δ е так избрано, че $0 < \delta < \mathrm{Re}\{(-z)^{\frac{1}{2}}\}$. Съществува растяща редица $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ о естествени числа такава, че

$$a_{n_k} > e^{-2\delta\sqrt{n_k}} .$$

От асимптотичната формула (1.8) следва, че съществува константа L която не зависи от n, и такава, че

$$L_n^{(\alpha)}(z) \geqq L n^{\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}} e^{2\,\mathrm{Re}\{(-z)^{\frac{1}{2}}\}\sqrt{n}}$$

за всички достатъчно големи n. Следователно за всички достатъчн големи k ще бъде изпълнено неравенството

* по определение $\ln 0 = -\infty$.

$$a_{n_k} L_{n_k}^{(\alpha)}(z) \geqq L n_k^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} e^{2\,\mathrm{Re}\{(-z)^{\frac{1}{2}}\}\sqrt{n_k}-2\delta\sqrt{n_k}},$$

от което следва, че редът (2.1) е разходящ в точката z.

б. За да установим тази част от твърдението в разглеждания случай, отнасяща се до сходимостта на реда (2. 1), достатъчно е да покажем, като имаме пред вид предишната теорема I, че редът (2.1) е сходящ във всяка точка $z \in \Delta(\lambda_0)-[0, +\infty)$. Ако z е една такава точка, да изберем δ така, че $0<\delta<\lambda_0-\mathrm{Re}\{(-z)^{\frac{1}{2}}\}$. Тогава от (2. 2) и (2.6) получаваме, че

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln|a_n L_n^{(\alpha)}(z)|}{2\sqrt{n}} = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \left\{\frac{\ln|a_n|}{2\sqrt{n}} + \frac{\ln|L_n^{(\alpha)}(z)|}{2\sqrt{n}}\right\}$$

$$= \overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{\ln|a_n|}{2\sqrt{n}} + \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln|L_n^{(\alpha)}(z)|}{2\sqrt{n}} = -\lambda_0+\mathrm{Re}\{(-z)^{\frac{1}{2}}\}<-\delta.$$

Следователно

$$a_n L_n^{(\alpha)}(z) = O(e^{-2\delta\sqrt{n}})$$

и редът (2.1) е даже абсолютно сходящ в точката z.

Нека точката z лежи вън от параболата $p(\lambda_0)$, т. е.

$$\mathrm{Re}\{(-z)^{\frac{1}{2}}\}>\lambda_0.$$

В такъв случай, ако $0<\sigma<\mathrm{Re}\{(-z)^{\frac{1}{2}}\}-\lambda_0$, съществува растяща редица от естествени числа $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ такава, че

$$|a_{n_k} L_{n_k}^{(\alpha)}(z)| \geqq e^{2\sigma\sqrt{n_k}}$$

и следователно редът (2.1) не е сходящ в точката z.

в. Като имаме пред вид пак теорема I, достатъчно е да покажем, че в този случай редът (2.1) е сходящ за всяко $z \in \mathbf{C}-[0, +\infty)$. Каквото и да е $\tau>0$, за всички достатъчно големи n ще бъде изпълнено неравенството

$$|a_n| \leqq e^{-2\tau\sqrt{n}}.$$

Да изберем τ така, че $\tau>\mathrm{Re}\{(-z)^{\frac{1}{2}}\}$. Тогава, като имаме пред вид асимптотичната формула (1.8), намираме, че

$$a_n L_n^{(\alpha)}(z) = O\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} e^{-2\pi\sqrt{n}+2\mathrm{Re}\left\{(-z)^{\frac{1}{2}}\right\}\sqrt{n}}\right),$$

откъдето следва, че редът (2.1) е сходящ в точката $z \in \mathbf{C}-[0, +\infty$

Между твърденията на теорема I, респ. теорема II, и съответнит твърдения за степенните редове съществува аналогия, но тази ана логия не е пълна. Наистина един степенен ред, както това следва о съответната лема на Абел за такива редове, е абсолютно равномерн сходящ върху всяко компактно подмножество на кръга му на сходи мост. Ясно е, че основавайки се само на асимптотичните формул (1.8) и (1.9), респ. (1.11), не бихме могли да установим аналогичн твърдение за редовете по полиномите на Лагер и причината е разли ното асимптотично поведение на тези полиноми в областта $\mathbf{C}-[0, +\infty$ и върху лъча $[0, +\infty)$, накратко казано. Следователно засега не ясен характерът на сходимост на ред по полиномите на Лагер върх произволно компактно подмножество на областта му на сходимос Отговор на този въпрос е даден в § 5, но преди това в § 4 е уста новено едно неравенство за полиномите на Лагер, което се оказва съ ществено при разглеждането на проблема за равномерната сходимос на редове по полиномите на Лагер. В § 3 се съобщават накратк най-необходимите сведения за функциите на параболичния цилиндъ които се използват в § 4. Тези сведения са изцяло заимствувани от [4

§ 3. Функции на параболичния цилиндър. Нека x_1, x_2, x_3 с декартовите координати в $\mathbf{R}^3$ и да положим

$$x_1 = \xi\eta, \quad x_2 = \frac{\xi^2-\eta^2}{2}, \quad x_3 = \zeta.$$

Тогава ξ, η, ζ се наричат параболични цилиндрични координати. Наз ванието идва от факта, че координатните повърхнини $\xi = \mathrm{const}$ $\eta = \mathrm{const}$ са параболични цилиндри.

Уравнение на Лаплас от вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} + f(x_3)\, u = 0$$

в параболични цилиндрични координати има вида

$$(\xi^2+\eta^2)^{-1}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + f(\zeta) u = 0.$$

Последното уравнение има частни решения от вида $U(\xi)\, V(\eta)\, W(\zeta)$ където функциите U, V и W удовлетворяват съответно диференциал ните уравнения

$$\frac{d^2 U}{d\xi^2} + (\sigma\xi^2 + \lambda)\, U = 0,$$

$$\frac{d^2 V}{d\eta^2}+(\sigma\eta^2-\lambda)\,V=0,$$

$$\frac{d^2 W}{d\zeta^2}+[f(\zeta)-\sigma]\,W=0,$$

в които σ и λ са произволни константи. Посредством проста смяна на независимата променлива уравненията за функциите U и V могат да бъдат преобразувани във вида

$$\frac{d^2 y}{dz^2}+\left(\nu+\frac{1}{2}-\frac{z^2}{4}\right)y=0, \tag{3.1}$$

където ν е параметър. Решенията на последното уравнение се наричат именно функции на параболичния цилиндър или още функции на Вебер — Ермит. Функциите на параболичния цилиндър могат да бъдат изразени посредством изродените хипергеометрични функции. По този начин се установява [4, стр. 122, (4)], че функцията

$$D_\nu(z)=2^{\frac{\nu}{2}}e^{-\frac{z^2}{4}}\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)}\Phi\left(-\frac{\nu}{2},\ \frac{1}{2};\ \frac{z^2}{2}\right)\right. \tag{3.2}$$

$$\left.+\frac{z}{\sqrt{2}}\,\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)}\,\Phi\left(\frac{1-\nu}{2},\ \frac{3}{2};\ \frac{z^2}{2}\right)\right\}$$

е решение на уравнение (3.1). Функциите на параболичния цилиндър и в частност функциите $D_\nu(z)$ са цели функции на z.

За функциите $D_\nu(z)$ е валидно следното интегрално представяне [4, стр. 125, (3)] при условие, че $\mathrm{Re}\{\nu\}<0$:

$$D_\nu(z)=\frac{e^{-\frac{z^2}{4}}}{\Gamma(-\nu)}\int_0^\infty e^{-zt-\frac{t^2}{2}}\,t^{-\nu-1}\,dt. \tag{3.3}$$

Асимптотичното поведение на $D_\nu(z)$ при $|\nu|\to+\infty$ и произволно z, удовлетворяващо неравенството $|z|<\sqrt{|\nu|}$, е напълно изследвано [4, стр. 129] в работата на Швид [7]. Един частен случай е разгледан от Чери [8], а именно когато $|z|$ е ограничен, $|\nu|\to+\infty$, но

$$|\arg(-\nu)|\leqq\frac{\pi}{2}.$$

Съответната асимптотична формула има вида [5, стр. 129, (5)]

$$(3.4)\qquad D_\nu(z)=\frac{1}{\sqrt{2}}\exp\left\{\frac{\nu}{2}\operatorname{Log}_0(-\nu)-\frac{\nu}{2}-(-\nu)^{\frac{1}{2}}z\right\}\left\{1+O\left(\frac{1}{\sqrt{\nu}}\right)\right\}.$$

§ 4. Едно неравенство за полиномите на Лагер. В този па граф ще бъде установено едно неравенство за полиномите на Лаг което може да се счита като известно допълнение към асимптот ната формула (1.8). Полиномът $L_n^{(\alpha)}(z)$ може да се разглежда ка функция на трите променливи z, n и α и асимптотичните формули рактеризират поведението му като функция на n при $n\to+\infty$ условие че другите две променливи z и α са фиксирани или най-мн z се изменя в ограничено множество. Следователно представлява терес да се изследва поведението на $L_n^{(\alpha)}(z)$, когато примерно пром ливите z и n се изменят независимо едно от друго или са подчине на някаква връзка, докато параметърът α е фиксиран. Такива изсл вания са направени и са получени съответни асимптотични форму при определени зависимости между променливите z и n. Следваща по-обща задача е, когато и параметърът α може да се изменя. Пр блемът за асимптотичното поведение на $L_n^{(\alpha)}(z)$ като функция на z и α е частен случай от аналогичния проблем за асимптотичните св ства на изродената хипергеометрична функция $\Phi(a, c; z)$ като функ на z, a и c. Този последен проблем обаче не е решен в цялата общност [2, стр. 265, 6.13].

След тези предварителни бележки ще формулираме твърдение което искаме да установим.

Теорема III. Нека $0<\lambda<+\infty$ и $\rho>\max(1, 2\lambda^2)$ са произвол Тогава, каквото и да е реалното число $\alpha\neq-1, -2, \ldots,$

$$(4.1)\qquad L_n^{(\alpha)}(z)=O\left(e^{z}z^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}e^{-2\lambda\sqrt{n}}\right)$$

равномерно по n и z, принадлежащо на областта

$$\Delta^*(\lambda, \rho)=\{z:\operatorname{Re}\{(-z)^{\frac{1}{2}}\}\leq\lambda,\quad z\leq\rho\}.$$

Доказателство. Очевидно $\Delta^*(\lambda, \rho)=\overline{\Delta(\lambda)}-K_\rho$, където $\Delta(\lambda)$ е в трешността на параболата с уравнение $\operatorname{Re}\{(-z)^{\frac{1}{2}}\}=\lambda$ и $K_\rho=\{z:(z)<$ Ако $z=\operatorname{Re}^{i\theta}$ е точка от $\Delta^*(\lambda, \rho)$, то, както не е трудно да се ус нови, $-\alpha\leq\theta\leq\alpha$, където $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ и $\cos\alpha=1-\frac{2\lambda^2}{R}$. Да обърнем вн мание, че съгласно условието на теоремата $R\geq\rho>2\lambda^2$.

Да положим

$$Q_n^{(\alpha)}(z) = e^{-z} z^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}} n^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}} e^{2\lambda\sqrt{n}} L_n^{(\alpha)}(z). \tag{4.2}$$

Твърдението на теоремата ще бъде установено, ако успеем да покажем, че редицата с общ член (4.2) е равномерно ограничена върху затворената област $\Delta^*(\lambda, \rho)$.

Като имаме пред вид интегралното представяне (1.12) на полиномите на Лагер, за функциите (4.2) намираме, че

$$Q_n^{(\alpha)}(z) = \frac{1}{n!} z^{\frac{1}{4}} n^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}} e^{2\lambda\sqrt{n}} \int_0^\infty e^{-t} t^{n+\frac{\alpha}{2}} J_\alpha\{2(tz)^{\frac{1}{2}}\}\, dt.$$

Горното представяне е валидно за стойности на n такива, че $n+\alpha > 1$. Ние ще предполагаме, че n е такова, че $n+\alpha>1$.

Нека $z = Re^{i\theta} \in \Delta^*(\lambda, \rho)$ и да положим

$$Q_{n,1}^{(\alpha)}(z) = \frac{1}{n!} z^{\frac{1}{4}} n^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}} e^{2\lambda\sqrt{n}} \int_0^{\frac{1}{R}} e^{-t} t^{n+\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(2\sqrt{tz})\, dt, \tag{4.3}$$

$$Q_{n,2}^{(\alpha)}(z) = \frac{1}{n!} z^{\frac{1}{4}} n^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}} e^{-2\lambda\sqrt{n}} \int_{\frac{1}{R}}^\infty e^{-t} t^{n+\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(2\sqrt{tz})\, dt, \tag{4.4}$$

следователно

$$Q_n^{(\alpha)}(z) = Q_{n,1}^{(\alpha)}(z) + Q_{n,2}^{(\alpha)}(z). \tag{4.5}$$

Като имаме пред вид (1.13), за функциите $Q_{n,1}^{(\alpha)}(z)$ $(n+\alpha>1)$ получаваме

$$Q_{n,1}^{(\alpha)}(z) \leq \frac{1}{n!} R^{\frac{1}{4}} n^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}} e^{-2\lambda\sqrt{n}} \int_0^{\frac{1}{R}} e^{-t} t^{n+\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(2\sqrt{tz})\, dt$$

$$\leq \frac{1}{n!} R^{\frac{1}{4}} n^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}} e^{-2\lambda\sqrt{n}} \int_0^{\frac{1}{R}} e^{-t} t^{n+\frac{\alpha}{2}} \sum_{k=0}^\infty \frac{t^{k+\frac{\alpha}{2}} R^{k+\frac{\alpha}{2}}}{k!\,\Gamma(k+\alpha+1)}\, dt$$

$$= \frac{1}{n!} R^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}} n^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}} e^{-2\lambda\sqrt{n}} \int_0^{\frac{1}{R}} e^{-t} t^{n-\alpha} \sum_{k=0}^\infty \frac{(tR)^k}{k!\,\Gamma(k+\alpha+1)}\, dt$$

$$\leqq \frac{C_\alpha}{n!} R^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}} n^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} e^{-2\lambda\sqrt{n}} \int_0^{\frac{1}{R}} e^{-t} t^{n+\alpha} dt,$$

където

$$C_\alpha := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\,\Gamma(k+\alpha+1)}.$$

Функцията $e^{-t} t^{n+\alpha}$ е монотонно растяща в интервала $\left[0, \frac{1}{R}\right]$, п неже $R>1$ и $n+\alpha>1$. Следователно

$$\int_0^{\frac{1}{R}} e^{-t} t^{n+\alpha} dt < \frac{e^{-\frac{1}{R}}}{R^{n+\alpha+1}} < \frac{1}{R^{n+\alpha+1}}.$$

Тогава за функциите (4.3) намираме, че

$$|Q_{n,1}^{(\alpha)}(z)| \leqq \frac{C_\alpha n^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}} e^{-2\lambda\sqrt{n}}}{n!\,R^{n+\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{4}}} < \frac{C_\alpha n^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}} e^{-2\lambda\sqrt{n}}}{n!},$$

понеже $R>1$ и от $n+\alpha>1$ лесно следва, че $n+\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{4}>0$. От горно неравенство следва, че редицата $\{Q_{n,1}^{(\alpha)}(z)\}$ $(n+\alpha>1)$ е равномерно раничена върху областта $\Delta^*(\lambda, \rho)$.

За да покажем, че редицата (4.4) $(n+\alpha>1)$ е също равномер ограничена в областта $\Delta^*(\lambda, \rho)$, ще се възползуваме от асимптотична формула за функциите на Бесел от първи род в областта $\mathbf{C}-(-\infty,$ която има следния вид [4, стр. 98, (3)]

$$J_\alpha(\omega) = \left(\frac{2}{\pi\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\left(\omega - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\{1+\xi(\omega)\} \tag{4.6}$$

$$+\left(\frac{2}{\pi\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\left(\omega - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\left\{\frac{b}{\omega}+\eta(\omega)\right\}, \quad (\arg\omega)<\pi,$$

където b е константа, отлична от нула, а $\xi(\omega)$ и $\eta(\omega)$ са комплек функции, аналитични в областта $\mathbf{C}-(-\infty, 0]$ и такива, че при $\omega\to$

$\xi(\omega)=O(\omega^{-2})$ и $\eta(\omega)=O(\omega^{-3})$ равномерно във всеки сектор от вида $\arg\omega\leq\pi-\delta\,(0<\delta<\pi)$. В частност функциите $\xi(\omega)$ и $\eta(\omega)$ са ограничени в областта, дефинирана с неравенствата $\omega\geq 1$ и $\arg\omega\leq\frac{\pi}{4}$.

Нека $z=Re^{i\theta}$ принадлежи на $\Delta^*(\lambda,\rho)$ и $\frac{1}{R}\leq t<+\infty$. Понеже

$$|\sqrt{tz}|=\sqrt{tR}\geq 1$$

и $\arg\sqrt{tz}=\frac{\theta}{2}\leq\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{4}$, като вземем пред вид неравенствата

$$\cos\left(2\sqrt{tz}-\frac{\alpha\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\leq e^{2\sqrt{tR}\sin\frac{\theta}{2}},$$

$$\sin\left(2\sqrt{tz}-\frac{\alpha\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\leq e^{2\sqrt{tR}\sin\frac{\theta}{2}},$$

от асимптотичната формула (4.6) получаваме, че

$$J_\alpha(2\sqrt{tz})=O(R^{-\frac{1}{4}}t^{-\frac{1}{4}}e^{2\sqrt{tR}\sin\frac{\theta}{2}})$$

равномерно по $z=Re^{i\theta}\in\Delta^*(\lambda,\rho)$ и $\frac{1}{R}\leq t<+\infty$. Но

$$\sin\frac{\theta}{2}\leq\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1-\left(1-\frac{2\lambda^2}{R}\right)}{2}}=\frac{\lambda}{\sqrt{R}},$$

следователно

$$J_\alpha(2\sqrt{tz})=O(R^{-\frac{1}{4}}t^{-\frac{1}{4}}e^{2\lambda\sqrt{t}})$$

при същите условия за z и t. Тогава за функциите (4.4) намираме, че

$$Q^{(\alpha)}_{n,2}(z)=O\left(\frac{1}{n!}n^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}e^{2\lambda\sqrt{n}}\int_0^\infty e^{-t-2\lambda\sqrt{t}}t^{n+\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}dt\right)$$

равномерно по n и $z\in\Delta^*(\lambda,\rho)$. След смяна на променливата в последния интеграл $\left(t=\frac{u^2}{2}\right)$ получаваме, че

$$Q_{n,2}^{(\alpha)}(z) = O\left(\frac{n^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}} e^{-2\lambda\sqrt{n}}}{2^n n!} \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}+\lambda\sqrt{2}\,t} t^{2n-\alpha+\frac{1}{2}} dt\right).$$

Като имаме пред вид обаче интегралното представяне (3.3) на ф циите на параболичния цилиндър, получаваме

(4.7)
$$Q_{n,2}^{(\alpha)}(z)$$
$$= O\left(\frac{n^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}} e^{-2\lambda\sqrt{n}}\,\Gamma\left(2n+\alpha+\frac{3}{2}\right)}{2^n n!} D_{-\left(2n+\alpha+\frac{3}{2}\right)}(-\lambda\sqrt{2})\right).$$

По-нататък ще се възползуваме от асимптотичната формула (3.4). нея следва, че

$$D_{-\left(2n+\alpha+\frac{3}{2}\right)}(-\lambda\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\exp\left\{-\left(n+\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{4}\right)\mathrm{Log}_0\left(2n+\alpha+\frac{3}{2}\right)\right.$$
$$\left.+n+\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{4}+\lambda\sqrt{2}\left(2n+\alpha+\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}\left\{1+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right\}$$

и след някои преобразувания намираме, че

(4.8)
$$D_{-\left(2n+\alpha+\frac{3}{2}\right)}(-\lambda\sqrt{2}) = O\left(\frac{e^{n+2\lambda\sqrt{n}}}{2^n n^{n+\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{4}}}\right).$$

От формулата на Стирлинг следва, че

(4.9)
$$\Gamma\left(2n+\alpha+\frac{3}{2}\right) = O\left(2^{2n} n^{2n+\alpha+1} e^{-2n}\right).$$

Тогава, като заместим (4.8) и (4.9) в (4.7) и използваме още наж формулата на Стирлинг, получаваме окончателно

$$Q_{n,2}^{(\alpha)}(z) = O\left(\frac{n^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}} e^{-2\lambda\sqrt{n}}\, 2^{2n} n^{2n+\alpha+1} e^{-2n} e^{n+2\lambda\sqrt{n}}}{2^n n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} 2^n n^{n+\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{4}}}\right) = O(1).$$

И така редиците $\{Q_{n,1}^{(\alpha)}(z)\}$ и $\{Q_{n,2}^{(\alpha)}(z)\}$ са равномерно ограничени в областта $\Delta^*(\lambda, \rho)$ и от (4. 5) следва, че и редицата $\{Q_n^{(\alpha)}(z)\}$ е равномерно ограничена в същата област, с което теорема III е установена.

§ 5. Равномерна сходимост на редовете по полиномите на Лагер. В края на § 2 беше обърнато внимание, че асимптотичните формули за полиномите на Лагер не дават възможност да се изследва напълно равномерната сходимост на един ред по тези полиноми. Както ще видим обаче, неравенството за полиномите на Лагер, което беше установено в предишния параграф, позволява да се реши напълно въпросът за характера на сходимост на ред по полиномите на Лагер във вътрешността на съответната парабола на сходимост. Преди да формулираме съответния резултат, ще установим следното помощно твърдение:

Лема. Нека $\{f_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ са функции, дефинирани и непрекъснати върху ограничената и затворена област G и аналитични в областта G. Тогава, ако редът $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ е абсолютно равномерно сходящ върху контура Γ на G, той е абсолютно равномерно сходящ върху G.

Доказателство. Да положим за $z \in G$

$$\sigma_{n,\nu}(z) = \sum_{k=0}^{\nu} f_{n+k}(z) \qquad (n, \nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ако $\varepsilon > 0$ е произволно, съгласно предположенията на лемата съществува $N = N(\varepsilon)$ такова, че $\sigma_{n,\nu}(z) < \varepsilon$ за $n > N$, $z \in \Gamma$ и $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ Функцията $\sigma_{n,\nu}(z)$ като сума от функции, субхармонични в областта G, е също субхармонична в тази област. Освен това $\sigma_{n,\nu}(z)$ е непрекъсната върху компактното множество G и следователно $\sup_{z \in G} \sigma_{n,\nu}(z) < +\infty$ и се достига в някоя точка $z_0 \in G$. Ако $z_0 \in G$, съгласно принципа за максимума на субхармоничните функции $\sigma_{n,\nu}(z)$ е константа в G и поради непрекъснатостта е константа и в $\overline{G}$. Ако означим тази константа със C, то очевидно $C < \varepsilon$, т. е. $\sigma_{n,\nu}(z) < \varepsilon$ за всяко $z \in G$ в този случай. Ако $z_0 \in \Gamma$, от неравенството $\sigma_{n,\nu}(z_0) < \varepsilon$ следва, че $\sigma_{n,\nu}(z) < \varepsilon$ за всяко $z \in G$. И така $\sigma_{n,\nu}(z) < \varepsilon$ за $n > N$, $z \in G$ и $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ Следователно редът $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ е абсолютно равномерно сходящ върху затворената област G.

Забележка. Условието областта G в горната лема да бъде ограничена е съществено. Наистина нека G е определена с неравенството $\mathrm{Re}\{z\} > 0$ и $f_n(z) = \frac{e^{nz}}{(n+1)^2}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Тогава очевидно

редът $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ е абсолютно равномерно сходящ върху контура G (т. е. имагинерната ос), но е даже разходящ за всяко $z \in G$.

Теорема IV. Нека $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ е редица от комплексни числа и е дефинирано с

$$\lambda_0 = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln a_n}{2\sqrt{n}}. \tag{2.6}$$

Тогава:

а) ако $0<\lambda_0<+\infty$, редът

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n^{(\alpha)}(z) \tag{2.1}$$

е абсолютно равномерно сходящ върху всяко компактно подмножество K на областта $\Delta(\lambda_0)$;

б) ако $\lambda_0=+\infty$, редът (2. 1) е абсолютно равномерно сходящ върху всяко компактно множество $K\subset \mathbf{C}$.

Доказателство. а. Понеже $K\subset\Delta(\lambda_0)$ е компактно, можем да изберем λ и $\rho>\max(1, 2\lambda^2)$ така, че $0<\lambda<\lambda_0$ и K да се съдържа в затворената област $\bar{\Delta}(\lambda, \rho)=\bar{\Delta}(\lambda)\cap K_\rho$, където $K_\rho=\{z\in \mathbf{C}: |z|<\rho\}$. Контурът на $\bar{\Delta}(\lambda, \rho)$ е обединение на дъгата $\Gamma(\lambda, \rho)=p(\lambda)\cap\Delta(\lambda, \rho)$ от параболата $p(\lambda)$ и дъгата $\gamma(\lambda, \rho)=\partial K_\rho\cap\bar{\Delta}(\lambda)$ от окръжността ∂K_ρ, т. е. контура на K_ρ. За да установим, че редът (2.1) е абсолютно равномерно сходящ върху K, достатъчно е да покажем, като имаме пред вид лемата, че той е абсолютно равномерно сходящ върху контура на $\Delta(\lambda, \rho)$ или все едно върху всяка от дъгите $\Gamma(\lambda, \rho)$ и $\gamma(\lambda, \rho)$. Но съгласно теорема II редът (2.1) е абсолютно равномерно сходящ върху всяко компактно подмножество на областта $\Delta(\lambda_0)\cup[0, +\infty)$ в частност върху дъгата $\Gamma(\lambda, \rho)$. Остава да разгледаме поведението на реда (2.1) върху дъгата $\gamma(\lambda, \rho)$. Съгласно теорема III съществува константа M, която не зависи от n и z и такава, че

$$|L_n^{(\alpha)}(z)| \leq M n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} e^{2\lambda\sqrt{n}}$$

за всички достатъчно големи n и всяко $z\in\gamma(\lambda, \rho)$. От асимптотичната формула (1.8) следва, че съществува константа L, независеща от n и z и такава, че

$$|L_n^{(\alpha)}(z)| \geq L n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} e^{2\lambda\sqrt{n}}$$

за всички достатъчно големи n и всяко $z\in\Gamma(\lambda, \rho)$. От горните две неравенства заключаваме, че за всички достатъчно големи n е в сила неравенството

$$\max_{z \in \gamma(\lambda, \rho)} L_n^{(\alpha)}(z) \leqq \frac{M}{L} \min_{z \in \Gamma(\lambda, \rho)} L_n^{(\alpha)}(z) \ . \tag{4.10}$$

От абсолютната равномерна сходимост на реда (2. 1) върху $\Gamma(\lambda, \rho)$ следва обаче, че редът

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \ \mu_n ,$$

където

$$\mu_n = \min_{z \in \Gamma(\lambda, \rho)} L_n^{(\alpha)}(z) \ ,$$

е сходящ. Тогава от неравенството (4.10) следва абсолютната равномерна сходимост на реда (2.1) върху дъгата $\gamma(\lambda, \rho)$.

б. Доказателството е напълно аналогично.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сеге. Г.: Ортогональные многочлены. Москва, 1962.
2. Бейтман, Г., Эрдейи, А.: Высшие трансцендентные функции (гипергеометрическая функция, функции Лежандра). Москва, 1965.
3. Perron, O.: Journ. r. a. Math., **151** (1921), 63—78.
4. Бейтман, Г., Эрдейи, А.: Высшие трансцендентные функции (функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены). Москва, 1966.
5. Hille, E.: Amer. Math. Monthly, **45** (1938), 220—226.
6. Volk, O.: Math. Ann., **86** (1922), 296—316.
7. Schwid, N.: Trans. Amer. Math. Soc., **37** (1935), 339—362.
8. Chery, T. M.: Proc. Edinburgh Math. Soc. (2), **8** (1949), 50—65.

Постъпила на 16. XI. 1970 г.

CONVERGENCE OF SERIES IN LAGUERRE'S POLYNOMIALS

P. Russev

(SUMMARY)

Let $\alpha \neq -1, -2, \ldots$ be an arbitrary real number and $\{L_n^{(\alpha)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ be the system of Laguerre's polynomials with parameter α. The main results of the paper are:

Theorem III. If $0 < \lambda < +\infty$, $\rho > \max(1, 2\lambda^2)$ and $\alpha \neq -1, -2, \ldots$, then

$$L_n^{(\alpha)}(z) = O\left(e^z z^{\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}} n^{\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}} e^{2\lambda \sqrt{n}}\right) \tag{4.1}$$

uniformly for $n = 1, 2, 3, \ldots$ and

$$z \in \Delta^*(\lambda, \rho) := \{z \in \mathbf{C} : \mathrm{Re}\{(-z)^{\frac{1}{2}}\} \leqq \lambda, \quad z \geqq \rho\}.$$

Theorem IV. Let $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ be an arbitrary sequence of complex numbers and let λ_0 be defined by

$$\lambda_0 = -\lim_{n\to\infty} \frac{\ln a_n}{2\sqrt{n}}. \tag{2.6}$$

It follows that:

a) if $0 < \lambda_0 < +\infty$, then the series

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n^{(\alpha)}(z) \tag{2.1}$$

is absolutely uniformly convergent on every compact set $K \subset \Delta(\lambda_0)$: $\{z \in \mathbf{C} : \mathrm{Re}\{(-z)^{\frac{1}{2}}\} < \lambda_0\}$.

b) if $\lambda_0 = +\infty$, then the series (2. 1) is absolutely uniformly convergent on every compact set $K \subset \mathbf{C}$.

The proof of the theorem IV is based on the inequality (4.1) and it is impossible to prove this theorem using only the asypmtotic formulae for Laguerre's polynomials in the region $\mathbf{C} - [0, +\infty)$ and on the interval $[0, +\infty)$.