ФУНКЦИИ НА ЛАГЕР ОТ ВТОРИ РОД

Петър Русев

Нека (a, b) $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ е интервал върху реалната ос и μ е неотрицателна мярка върху (a, b) такава, че

$$\int_a^b t^n \, d\mu \neq \tag{1}$$

за всяко $n = 0, 1, 2, \ldots$ Да означим с $\{P_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ ортогонална система от полиноми върху интервала (a, b) спрямо мярката μ, т. е.

$$\int_a^b P_m(t) P_n(t) \, d\mu = 0, \tag{2}$$

щом $m \neq n$ $(m, n = 0, 1, 2, \ldots)$. Както е известно, всяка ортогонална система от полиноми от разглеждания вид и в частност системата $\{P_n(z)\}$ е решение на линейно рекурентно уравнение от вида

$$a_n y_{n+1} + (z - \alpha_n) y_n + c_n y_{n-1} = 0, \tag{3}$$

т. е. в сила е равенството $(n = 1, 2, 3, \ldots)$

$$a_n P_{n+1}(z) + (z - \alpha_n) P_n(z) + c_n P_{n-1}(z) = 0. \tag{4}$$

За да построим второ решение на уравнението (3), т. е. съответната система функции от втори род $\{Q_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$, следвайки указанията от [1, стр. 431, гл. IV], да положим

$$Q_n(z) = \int_a^b \frac{P_n(t)}{z - t} \, d\mu, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{5}$$

при условие, че $z \in \mathbf{C} - (a, b)$. Да се убедим, че $\{Q_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ е решение на рекурентното уравнение (3), което по предположение удовлетворява и системата $\{P_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$. Наистина за $n = 1, 2, 3, \ldots$, като имаме пред вид (4), ще получим, че

$$a_n\, Q_{n+1}(z) - (z-\alpha_n)\, Q_n(z) + c_n\, Q_{n-1}(z)$$

$$= \int_a^b \frac{1}{z-t} \{a_n P_{n+1}(t) + (z-\alpha_n) P_n(t) + c_n P_{n-1}(t)\}\, d\mu$$

$$= \int_a^b \frac{1}{z-t} \{a_n P_{n+1}(t) + (z-t+t-\alpha_n) P_n(t)$$

$$+ c_n P_{n-1}(t)\}\, d\mu = \int_a^b \frac{1}{z-t} \{a_n P_{n+1}(t) + (t-\alpha_n) P_n(t)$$

$$+ c_n P_{n-1}(t)\}\, d\mu + \int_a^b P_n(t)\, d\mu = 0\,.$$

Един от най-често срещаните на практика случаи е, когато разглежданата система от полиноми $\{P_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ е ортогонална върху интервал (a, b) $(-\infty \leqq a < b \leqq +\infty)$ от реалната ос спрямо мярка μ, която се дефинира посредством функция $\alpha(t)$ с ограничена вариация върху интервала (a, b) и в частност, когато $\alpha(t)$ има вида

$$\alpha(t) = \int_a^t w(u)\, du\,,$$

където $w(u)$ е неотрицателна и интегрируема в смисъл на Лебег върху интервала (a, b). Както е известно, в този случай функцията $\alpha(t)$ се нарича тегло.

Полиномите на Лагер $\{L_n^{(\alpha)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ с параметър $\alpha > -1$ се дефинират като система ортогонални полиноми върху интервала $[0, +\infty)$ с тегло функцията $w(t) = t^{\alpha} e^{-t}$. По-точно $\{L_n^{(\alpha)}(t)\}_{n=0}^{\infty}$ е единствената система от полиноми, която удовлетворява условието

$$\int_0^{\infty} t^{\alpha} e^{-t} L_m^{(\alpha)}(t)\, L_n^{(\alpha)}(t)\, dt = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)}\, \delta_{mn}\,, \tag{6}$$

където δ_{mn} е символът на Кронекер при допълнителното предположение, че знакът пред z^n в $L_n^{(\alpha)}(z)$ е $(-1)^n$ [1, стр. 109, 5. 1, (1)].

Полиномите на Лагер могат да бъдат определени и с помощта на формула от типа на Родриг, и то за произволни стойности на параметъра α, отлични от $-1, -2, \ldots$, както следва [1, стр. 110, (5. 15)]

$$L_n^{(\alpha)}(z) = \frac{1}{n!} z^{-\alpha} e^{z} \frac{d^n}{dz^n} \{z^{n+\alpha} e^{-z}\}^{*}. \tag{7}$$

Тази дефиниция на полиномите на Лагер дава възможност по-директно да бъдат установявани някои техни свойства. В частност, изхождайки от (7), лесно се проверява, че системата от полиноми на Лагер $\{L_n^{(\alpha)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ е решение на рекурентното уравнение [1, стр. 110, (5. 1. 10)]

$$(n+1)\, y_{n+1} + (z-\alpha-2n-1)\, y_n + (n+\alpha)\, y_{n-1} = 0\,. \tag{8}$$

Имайки пред вид общите разглеждания в началото, да положим за $z \in \mathbf{C} - [0, +\infty)$ при условие, че $\mathrm{Re}\{\alpha\} > -1$

$$M_n^{(\alpha)}(z) = \int_0^{\infty} \frac{t^{\alpha} e^{-t} L_n^{(\alpha)}(t)}{z-t}\, dt \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)\,. \tag{9}$$

Чрез горното равенство е дефинирана система от функции $\{M_n^{(\alpha)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$, аналитични в областта $\mathbf{C} - [0, +\infty)$, и тази система е второ решение на рекурентното уравнение (8). Тези функции да наречем функции на Лагер от втори род. Ако в (9) заместим $L_n^{(\alpha)}(t)$ с равното му от (7), след интегриране по части ще получим, че

$$M_n^{(\alpha)}(z) = -\int_0^{\infty} \frac{t^{n+\alpha} e^{-t}}{(t-z)^{n+1}}\, dt \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)\,. \tag{10}$$

Последното равенство може да служи за директно определение на функциите на Лагер от втори род. За да се убедим обаче в това, трябва да покажем, че системата от функции, дефинирана с (10), е решение на рекурентното уравнение (8). Наистина за $n = 1, 2, 3, \ldots$ получаваме, че

$$(n+1)\, M_{n+1}^{(\alpha)}(z) + (z-\alpha-2n-1)\, M_n^{(\alpha)}(z) + (n+\alpha)\, M_{n-1}^{(\alpha)}(z)$$

$$= -\int_0^{\infty} \frac{t^{n-1+\alpha} e^{-t}}{(t-z)^{n+2}} \{(n+1)\, t^2 + (z-\alpha-2n-1)\, t\,(t-z)$$

$$+ (n+\alpha)(t-z)^2\}\, dt = \int_0^{\infty} z \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{t^{n+\alpha} e^{-t}}{(t-z)^{n+1}} \right\} dt = 0\,.$$

* Тук и в следващото изложение по определение $z^s = \exp\{s \operatorname{Log}_0 z\}$ при условие, че $z \in \mathbf{C} - (-\infty, 0]$.

От условието $\mathrm{Re}\{\alpha\} > -1$ можем да се освободим. Наистина, α е произволно комплексно число, отлично от $-1, -2, \ldots$, чрез равенството (10) дефинираме $M_n^{(\alpha)}(z)$ за стойности на n такива, че $\mathrm{Re}\{n+\alpha\} > -1$, след което посредством рекурентното уравнение определяме и останалите функции на Лагер от втори род с малък номер.

Целта ни в настоящата работа е да изследваме асимптотично поведение на функциите на Лагер от втори род $\{M_n^{(\alpha)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$, когато $n \to +\infty$, а z остава върху компактно подмножество на областта $\mathbf{C}-[0, +\infty)$. Ще покажем именно, че е в сила следната асимптотична формула

$$(11) \qquad M_n^{(\alpha)}(z) = -\sqrt{\pi}\, e^{-\frac{z}{2}} (-z)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} e^{-2(-z)^{\frac{1}{2}} \sqrt{n}} \{1 + \mu_n^{(\alpha)}(z)\},$$

където $\{\mu_n^{(\alpha)}(z)\}_{n=1}^{\infty}$ са аналитични функции в областта $\mathbf{C}-[0, +\infty)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n^{(\alpha)}(z) = 0$ равномерно върху всяко компактно подмножество на тази област.

При извода на асимптотичната формула (11) може да се предполага, че $\mathrm{Re}\{\alpha\} > -1$. Това следва от равенството

$$(12) \qquad M_n^{(\alpha)}(z) = -\frac{1}{n+\alpha+1}\left\{\frac{d\, M_n^{(\alpha+1)}(z)}{dz} + M_n^{(\alpha+1)}(z)\right\}.$$

Горното равенство е почти непосредствено следствие от (
Наистина

$$\frac{d\, M_n^{(\alpha+1)}(z)}{dz} = -\frac{d}{dz}\int_0^{\infty} \frac{t^{n+\alpha+1} e^{-t}}{(t-z)^{n+1}}\, dt$$

$$= -(n+1)\int_0^{\infty} \frac{t^{n+\alpha+1} e^{-t}}{(t-z)^{n+2}}\, dt = \int_0^{\infty} t^{n+\alpha+1} e^{-t}\, d\frac{1}{(t-z)^{n+1}}$$

$$= -\int_0^{\infty} \frac{(n+\alpha+1)\, t^{n+\alpha} e^{-t} - t^{n+\alpha+1} e^{-t}}{(t-z)^{n+1}}\, dt$$

$$= -(n+\alpha+1)\int_0^{\infty} \frac{t^{n+\alpha} e^{-t}}{(t-z)^{n+1}}\, dt + \int_0^{\infty} \frac{t^{n+\alpha+1} e^{-t}}{(t-z)^{n+1}}\, dt$$

$$= -(n+\alpha+1)\, M_n^{(\alpha)}(z) - M_n^{(\alpha+1)}(z).$$

И така получихме равенството

$$\frac{d M_n^{(\alpha)-1}(z)}{dz} = -(n+\alpha+1) M_n^{(\alpha)}(z) - M_n^{(\alpha+1)}(z),$$

от което веднага следва (12).

Асимптотичната формула (11) ще получим, следвайки идеята на метода на Лаплас. За целта да положим

$$\tau_n(z) = \left\{(n+\alpha)(-z) + \left(\frac{z-\alpha-1}{2}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} + \frac{z+\alpha-1}{2}, \tag{13}$$

където $z \in \mathbf{C} - [0, +\infty)$. Функцията $\tau_n(z)$ удовлетворява квадратното уравнение

$$t^2 - (z+\alpha-1)t + (n+\alpha)z = 0, \tag{14}$$

което се получава, като приравним на нула частната производна на функцията

$$\frac{t^{n+\alpha} e^{-t}}{(t-z)^{n+1}}$$

спрямо t.

Нека K е произволно компактно подмножество на областта $\mathbf{C} - [0, +\infty)$. От (13) следва, че

$$\tau_n(z) = (-z)^{\frac{1}{2}} \sqrt{n} + \frac{z+\alpha-1}{2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \tag{15}$$

$$\frac{z}{\tau_n(z)} = -\frac{(-z)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{n}} + \frac{z+\alpha-1}{2n} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \tag{16}$$

равномерно на $z \in K$.

Да означим с $l_n(z)$ лъча с начало в точката $z=0$, който минава през точката $\tau_n(z)$. Понеже $\operatorname{Re}\{\tau_n(z)\} > 0$ и $\operatorname{sgn}\operatorname{Im}\{z\} \cdot \operatorname{sgn}\operatorname{Im}\{\tau_n(z)\} \leqq 0$ за всяко $z \in K$ и всички достатъчно големи n, от теоремата на Коши следва, че

$$M_n^{(\alpha)}(z) = -\int_{l_n(z)} \frac{\zeta^{n+\alpha} e^{-\zeta}}{(\zeta-z)^{n+1}} d\zeta.$$

Като положим $\zeta = \tau_n(z) t$ $(0 \leqq t < +\infty)$, ще получим, че за всички достатъчно големи n и $z \in K$

$$M_n^{(\alpha)}(z) = -\{\tau_n(z)\}^{\alpha} F_n(z), \tag{17}$$

където

$$F_n(z) = \int_0^{\infty} \frac{t^{n+\alpha} e^{-\tau_n(z) \cdot t}}{\left(t - \frac{z}{\tau_n(z)}\right)^{n+1}} dt. \tag{18}$$

Да положим

$$F_n^{(1)}(z)=\int_0^2 \frac{t^{n-\alpha}e^{-\tau_n(z)\cdot t}}{\left(t-\dfrac{z}{\tau_n(z)}\right)^{n+1}}\,dt \tag{19}$$

и

$$F_n^{(2)}(z)=\int_2^\infty \frac{t^{n-\alpha}e^{-\tau_n(z)\cdot t}}{\left(t-\dfrac{z}{\tau_n(z)}\right)^{n+1}}\,dt. \tag{20}$$

За последния интеграл получаваме при $n\to\infty$

$$F_n^{(2)}(z)=O\left(\int_2^\infty t^{\mathrm{Re}\{\alpha\}-1}e^{-\xi_n(z)\cdot t}\,dt\right)$$

равномерно по $z\in K$, където $\xi_n(z)=\mathrm{Re}\{\tau_n(z)\}$. Това следва от неравенството

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{z}{\tau_n(z)}\right\}<0, \tag{21}$$

което, както се вижда от (16), е удовлетворено за всички достатъчно големи n и всяко $z\in K$. Да положим $t=\dfrac{u}{\xi_n(z)}$ и ще получим, че

$$F_n^{(2)}(z)=O\left(\frac{1}{[\xi_n(z)]^{\mathrm{Re}\{\alpha\}}}\int_{2\xi_n(z)}^\infty u^{\mathrm{Re}\{\alpha\}-1}e^{-u}\,du\right). \tag{22}$$

Ако k е естествено число такова, че $k>\mathrm{Re}\{\alpha\}$, след неколкократно интегриране по части ще получим, че

$$\int_{2\xi_n(z)}^\infty u^{\mathrm{Re}\{\alpha\}-1}e^{-u}\,du=e^{-2\xi_n(z)}\sum_{s=1}^{k}a_s[\xi_n(z)]^{\mathrm{Re}\{\alpha\}-s}$$

$$+\int_{2\xi_n(z)}^\infty u^{\mathrm{Re}\{\alpha\}-k}e^{-u}\,du,$$

където a_s са константи, които не зависят от z и n. Следователно

$$\int_{2\xi_n(z)}^{\infty} u^{\mathrm{Re}\{\alpha\}-1} e^{-u}\, du = e^{-2\xi_n(z)} \sum_{s=1}^{k-1} a_s [\xi_n(t)]^{\mathrm{Re}\{\alpha\}-s}$$

$$+ O\left([\xi_n(z)]^{\mathrm{Re}\{\alpha\}-k} \int_{2\xi_n(z)}^{\infty} e^{-u}\, du \right)$$

$$= O\left(\xi_n(z)]^{\mathrm{Re}\{\alpha\}-1} e^{-2\xi_n(z)} \right).$$

Тогава от (22), като вземем пред вид (15), получаваме, че

$$F_n^{(\alpha)}(z) = O\left(\frac{e^{-2(-z)^{\frac{1}{2}}\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} \right) \tag{23}$$

равномерно по $z \in K$.

В интеграла (19) да положим $t = 1 + \frac{u}{\sqrt[4]{n}}$. Ще получим, че

$$F_n^{(1)}(z) = \frac{e^{-\tau_n(z)}}{\sqrt[4]{n}\left(1 - \frac{z}{\tau_n(z)}\right)^{n+1}} E_n(z), \tag{24}$$

където

$$E_n(z) = \int_{-\sqrt[4]{n}}^{\sqrt[4]{n}} \frac{\left(1 + \frac{u}{\sqrt[4]{n}}\right)^{n+\alpha} e^{-\frac{\tau_n(z)}{\sqrt[4]{n}} u}}{\left(1 + \frac{u}{\sqrt[4]{n}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{\tau_n(z)}}\right)^{n+1}}\, du. \tag{25}$$

Ще покажем, че

$$\lim_{n\to\infty} E_n(z) = \sqrt{\pi}\,(-z)^{-\frac{1}{4}} \tag{26}$$

равномерно за $z \in K$. Да положим за целта

$$(27)\qquad \lambda_n(u,\ z)=\frac{\left(1+\frac{u}{\sqrt[4]{n}}\right)^{n+\alpha} e^{-\frac{\tau_n(z)}{\sqrt[4]{n}}u}}{\left(1+\frac{u}{\sqrt[4]{n}}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{\tau_n(z)}}\right)^{n+1}},$$

когато $u \leqq \sqrt[4]{n}$ и да считаме, че $\lambda_n(u,\ z)=0$, щом $u>\sqrt[4]{n}$. Тогав

$$(28)\qquad E_n(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda_n(u,\ z)\,du\,.$$

Ще установим преди всичко, че каквото и да е реалното числ $A>0$,

$$(29)\qquad \lim_{n\to\infty}\lambda_n(u,\ z)=e^{-(-z)^{\frac{1}{2}}u^2}$$

равномерно по $u\in[-A,\ A]$ и $z\in K$. За да покажем това, ще обърне внимание, че за всички достатъчно големи n ще имаме равномерно п $u\in[-A,\ A]$ и $z\in K$

$$(30)\qquad \log\lambda_n(u,\ z)=(n+\alpha)\log\left(1+\frac{u}{\sqrt[4]{n}}\right)-\frac{\tau_n(z)}{\sqrt[4]{n}}u$$

$$-(n+1)\log\left(1+\frac{u}{\sqrt[4]{n}}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{\tau_n(z)}}\right)$$

$$=(n+\alpha)\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}\cdot\frac{u^\nu}{\left(\sqrt[4]{n}\right)^\nu}-\frac{\tau_n(z)}{\sqrt[4]{n}}u$$

$$-(n+1)\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}\cdot\frac{u^\nu}{\left(\sqrt[4]{n}\right)^\nu}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{z}{\tau_n(z)}\right)^\nu}$$

$$-\frac{u}{\sqrt[4]{n}}\left\{n+\alpha-\tau_n(z)-\frac{n+1}{1-\frac{z}{\tau_n(z)}}\right\}$$

$$-\frac{u^2}{2\sqrt{n}}\left\{n+\alpha-\frac{n+1}{\left(1-\frac{z}{\tau_n(z)}\right)^2}\right\}$$

$$-\sum_{\nu=3}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}\cdot\frac{u^\nu}{\left(\sqrt[4]{n}\right)^\nu}\left\{n+\alpha-\frac{n+1}{\left(1-\frac{z}{\tau_n(z)}\right)^\nu}\right\}.$$

Понеже функцията $\tau_n(z)$ удовлетворява квадратното уравнение (14), коефициентът пред първата степен на u в последното степенно развитие е равен на нула. Тогава, като имаме пред вид, че

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}}\left\{n+\alpha-\frac{n+1}{\left(1-\frac{z}{\tau_n(z)}\right)^2}\right\}=(-z)^{\frac{1}{2}} \tag{31}$$

равномерно по $z\in K$ и

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{\nu=3}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{\nu}\cdot\frac{u^\nu}{\left(\sqrt[4]{n}\right)^\nu}\left\{n+\alpha-\frac{n+1}{\left(1-\frac{z}{\tau_n(z)}\right)^\nu}\right\}=0$$

равномерно за $z\in K$ и $u\in[-A, A]$, получаваме (29).

От неравенството (21) следва, че

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{\left(1-\frac{z}{\tau_n(z)}\right)^\nu}\right\}\leqq\frac{1}{\left|1-\frac{z}{\tau_n(z)}\right|^\nu}<1$$

за всички достатъчно големи n и $z\in K$. Понеже допуснахме, че $\operatorname{Re}\{\alpha\}>1$, получаваме, че

$$\operatorname{Re}\left\{n+\alpha-\frac{n+1}{\left(1-\frac{z}{\tau_n(z)}\right)^\nu}\right\}>0.$$

Но тогава, като имаме пред вид определението на функциите $\lambda_n(u, z)$, от развитието (30) и равенството (31) получаваме, че

$$\lambda_n(u, z)=O\left(e^{-\frac{(-z)^{\frac{1}{2}}u^2}{2}}\right) \tag{32}$$

равномерно за $z\in K$ и $u\in(-\infty, 0]$.

Нека $0 \leqq u \leqq \sqrt[4]{n}$ и да положим $t = \frac{u}{\sqrt[4]{n}}$ $(0 \leqq t \leqq 1)$. Тогава

$$\lambda_n(u, z) = \frac{(1+t)^{n+\alpha} e^{-\tau_n(z)\,t}}{\left(1 + t \frac{1}{1 - \frac{z}{\tau_n(z)}}\right)^{n+1}}$$

$$= \frac{(1+t)^{n+\alpha} e^{-\tau_n(z)\,.\,t}}{\left(1 + t \frac{1 - \frac{z}{\tau_n(z)} + \frac{z}{\tau_n(z)}}{1 - \frac{z}{\tau_n(z)}}\right)^{n+1}}$$

$$= \frac{(1+t)^{n+\alpha} e^{-\tau_n(z)\,.\,t}}{\left(1 + t + t \cdot \frac{\frac{z}{\tau_n(z)}}{1 - \frac{z}{\tau_n(z)}}\right)^{n+1}}$$

$$= (1+t)^{\alpha-1} \cdot \frac{e^{-\tau_n(z)\,.\,t}}{\left(1 + \frac{t}{1+t} \cdot \frac{\frac{z}{\tau_n(z)}}{1 - \frac{z}{\tau_n(z)}}\right)^{n+1}} \cdot$$

Следователно

$$\log \lambda_n(u, z) = (\alpha - 1) \log(1+t) - \tau_n(z)\,.\,t$$

$$-(n+1) \log\left(1 + \frac{t}{1+t} \cdot \frac{\frac{z}{\tau_n(z)}}{1 - \frac{z}{\tau_n(z)}}\right)$$

$$= (\alpha - 1) \log(1+t) - \tau_n(z)\,.\,t - (n+1) \frac{t}{1+t} \cdot \frac{\frac{z}{\tau_n(z)}}{1 - \frac{z}{\tau_n(z)}}$$

$$-(n+1)\sum_{\nu=2}^{\infty}(-1)^{\nu-1}\frac{}{\nu}\cdot\left\{\frac{t}{1+t}\cdot\frac{\frac{z}{\tau_n(z)}}{1-\frac{z}{\tau_n(z)}}\right\}^{\nu}.$$

От последното равенство получаваме, че

$$\lambda_n(n,\ z)=O\left(e^{-\tau_n(z)\cdot t-\frac{nt}{1+t}\cdot\frac{z}{\tau_n(z)}}\right),$$

откъдето, като имаме пред вид (15) и (16), намираме, че

$$\lambda_n(u,\ z)=O\left(e^{(-z)^{\frac{1}{2}}\sqrt{n}\left(t-\frac{t}{1+t}\right)}\right)$$

$$=O\left(e^{-(-z)^{\frac{1}{2}}\sqrt{n}\cdot\frac{t^2}{1+t}}\right)=O\left(e^{-(-z)^{\frac{1}{2}}\sqrt{n}\cdot\frac{t^2}{2}}\right).$$

Следователно, като вземем пред вид определението на $\lambda_n(u,\ z)$, ще получим, че равномерно за $z\in K$ и $u\in[0,\ +\infty)$

$$\lambda_n(u,\ z)=O\left(e^{-\frac{(-z)^{\frac{1}{2}}}{2}u^2}\right). \tag{33}$$

От (28), (29), (32) и (33) получаваме, че равномерно по $z\in K$

$$\lim_{n\to\infty}E_n(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(-z)^{\frac{1}{2}}u^2}du=2\int_0^{\infty}e^{-(-z)^{\frac{1}{2}}u^2}du. \tag{34}$$

Да означим с $l(z)$ лъча с начало точката нула, който минава през точката $(-z)^{\frac{1}{4}}$. Понеже $\arg(-z)^{\frac{1}{4}}<\frac{\pi}{4}$, когато $z\in\mathbf{C}-[0,\ +\infty)$ и в частност, ако $z\in K$, от теоремата на Коши следва, че

$$\int_{l(z)}e^{-\zeta^2}d\zeta=\int_0^{\infty}e^{-u^2}du=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Ако в интеграла от лявата страна на последното равенство положим $\zeta=(-z)^{\frac{1}{4}}u\ (0\leqq u<+\infty)$, ще получим, че

$$(-z)^{\frac{1}{4}} \int_0^\infty e^{-(-z)^{\frac{1}{2}} u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

От (34) и от последното равенство получаваме тогава (26).

Като имаме пред вид (16), намираме, че

$$(35) \qquad \left(1 - \frac{z}{\tau_n(z)}\right)^{n+1} = \exp\left\{(n+1)\log\left(1 - \frac{z}{\tau_n(z)}\right)\right\}$$

$$= \exp\left\{-(n+1)\frac{z}{\tau_n(z)} - \frac{n+1}{2}\frac{z^2}{\tau_n^2(z)} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right\}$$

$$= \exp\left\{(-z)^{\frac{1}{2}}\sqrt{n} - \frac{\alpha-1}{2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right\}$$

равномерно по $z \in K$. От (15), (24), (26) и (35) следва тогава, че

$$(36) \qquad F_n^{(1)}(z) = \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{z}{2}} (-z)^{-\frac{1}{4}} n^{-\frac{1}{4}} e^{-2(-z)^{\frac{1}{2}}\sqrt{n}} \{1 + O(1)\}$$

равномерно по $z \in K$. От последното равенство и от (23) следва,

$$(37) \qquad F_n(z) = \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{z}{2}} (-z)^{-\frac{1}{4}} n^{-\frac{1}{4}} e^{-2(-z)^{\frac{1}{2}}\sqrt{n}} \{1 + O(1)\}$$

равномерно по $z \in K$. Освен това

$$(38) \qquad \{\tau_n(z)\}^\alpha = (-z)^{\frac{\alpha}{2}} n^{\frac{\alpha}{2}} \{1 + O(1)\}$$

равномерно по $z \in K$. Тогава от (17), (37) и (38) получаваме асимптотичната формула (11).

Като приложение на асимптотичната формула (11) ще изследваме сходимостта на редове по функциите на Лагер от втори род, т. е. редове от вида

$$(39) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n M_n^{(\alpha)}(z)$$

с произволни комплексни коефициенти. Преди да формулираме съответните резултати, които са напълно аналогични на съответните свойства на степенните редове, ще отбележим, че ако $0 < \mu < +\infty$ е произволно, равенството $\mathrm{Re}\{(-z)^{\frac{1}{2}}\} = \mu$ дефинира парабола $p(\mu)$, чието декартово уравнение е $y^2 = 4\mu^2(x + \mu^2)$. От последното се вижда, че ос

на тази парабола съвпада с реалната ос, а фокусът ѝ е в началото на координатите. Да означим с $\Delta(\mu)$ вътрешността на параболата $p(\mu)$, а с $\Delta^*(\mu)$ — нейната външност, т. е. $\Delta(\mu)=\{z\in \mathbf{C}:\mathrm{Re}\{(-z)^{\frac{1}{2}}\}<\mu\}$ и $\Delta^*(\mu)=\{z\in \mathbf{C}:\mathrm{Re}\{(-z)^{\frac{1}{2}}\}>\mu\}$. Да отбележим още, че ако z_0 е произволна точка от областта $\mathbf{C}-[0, +\infty)$, през z_0 минава точно една парабола от разглеждания вид, а именно тази с уравнение $\mathrm{Re}\{(-z)\}=\mu_0$, където $\mu_0=\mathrm{Re}\{(-z)^{\frac{1}{2}}\}$.

След тези означения да изкажем въпросните твърдения, които дават пълно описание както на областта, така и на характера на сходимост на ред от вида (39).

I (Лема на Абел). Ако редът (39) е сходящ в точката $z_0\in \mathbf{C}-[0, +\infty)$, той е абсолютно равномерно сходящ върху всяко компактно подмножество на областта $\Delta^*(\mu_0)$, където $\mu_0=\mathrm{Re}\{(-z_0)^{\frac{1}{2}}\}$.

II (Формула на Коши — Адамар). Нека $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ е произволна редица от комплексни числа и

$$\mu_0=\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{\ln|b_n|}{2\sqrt{n}}.$$

Тогава

а) ако $\mu_0\leqq 0$, редът (39) е абсолютно равномерно сходящ върху всяко компактно подмножество на областта $\mathbf{C}-[0, +\infty)$;

б) ако $0<\mu_0<+\infty$, редът (39) е абсолютно равномерно сходящ върху всяко компактно подмножество на областта $\Delta^*(\mu_0)$ и е разходящ за всяко $z\in\Delta(\mu_0)-[0, +\infty)$;

в) ако $\mu_0=+\infty$, редът (39) е разходящ за всяко $z\in \mathbf{C}-[0, +\infty)$.

Доказателството на горните твърдения се опира върху равенството

$$\lim_{n\to-\infty} n^{-\frac{1}{2}}\ln|M_\alpha^{(n)}(z)|=-2\,\mathrm{Re}\{(-z)^{\frac{1}{2}}\},$$

което е удовлетворено равномерно върху всяко компактно подмножество на областта $\mathbf{C}-[0, +\infty)$ и е непосредствено следствие от асимптотичната формула (11) за функциите на Лагер от втори род.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сеге, Г.: Ортогональные многочлены. Москва, 1962.

Постъпила на 16. XI. 1973 г.

LAGUERRE'S FUNCTIONS OF THE SECOND KIND

P. Russev

(SUMMARY)

Let $\{P_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ be an orthogonal system of polynomials on the int val (a, b) $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$, i. e.

$$(1) \qquad \int_a^b w(t) P_m(t) P_n(t)\, dt = 0$$

if $m \neq n$ $(m, n = 0, 1, 2, \ldots)$, where $w(t)$ is the weight function. T functions $\{Q_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ defined as follows

$$(2) \qquad Q_n(z) = \int_a^b \frac{w(t) P_n(t)}{z-t}\, dt \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

where $z \in \mathbf{C} - (a, b)$, are the so called functions of the second kind.

In the case of Laguerre's polynomials $\{L_n^{(\alpha)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ defined for exam by the corresponding Rodrigues' formula

$$(3) \qquad L_n^{(\alpha)}(z) = \frac{1}{n!} z^{-\alpha} e^{z} \frac{d^n}{dz^n} \{z^{n-\alpha} e^{-z}\} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

the functions of the second kind are

$$(4) \qquad M_n^{(\alpha)}(z) = -\int_0^{\infty} \frac{t^{\alpha} e^{-t} L_n^{(\alpha)}(t)}{t-z}\, dt = -\int_0^{\infty} \frac{t^{n+\alpha} e^{-t}}{(t-z)^{n+1}}\, dt.$$

The aim of the paper is to study the asymptotic properties of t function $M_n^{(\alpha)}(z)$ if $n \to \infty$ and $z \in K$, where K is an arbitrary comp subset of the region $\mathbf{C} - [0, +\infty)$. The following asymptotic formula established

$$M_n^{(\alpha)}(z) = -\sqrt{\pi}\, e^{-\frac{z}{2}} (-z)^{\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}} n^{\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}} e^{-2(-z)^{\frac{1}{2}} \sqrt{n}} \{1 + \mu_n^{(\alpha)}(z)\}$$

where $\{\mu_n^{(\alpha)}(z)\}_{n=1}^{\infty}$ are analytic functions in the region $\mathbf{C} - [0, +\infty)$ a $\lim_{n\to\infty} \mu_n^{(\alpha)}(z) = 0$ uniformly on every compact set $K \subset \mathbf{C} - [0, +\infty)$.

Some applications of this asymptotic formula are given namely:

I. (Abel's lemma). If the series

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n M_n^{(\alpha)}(z) \tag{38}$$

is convergent at some point $z_0 \in \mathbf{C}-[0, +\infty)$, it is absolutely uniformly convergent on every compact subset of the region $\Delta^*(\mu_0) := \{z \in \mathbf{C}: \operatorname{Re}\{(-z)^{\frac{1}{2}}\} > \mu_0\}$ where $\mu_0 = \operatorname{Re}\{(-z_0)^{\frac{1}{2}}\}$.

II. (Cauchy — Hadamard's formula). Let $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ be an arbitrary sequence of complex numbers and let

$$\mu_0 = \lim_{n \to +\infty} \frac{\ln b_n}{2\sqrt{n}}. \tag{39}$$

It follows that:

a) if $\mu_0 \leqq 0$, then the series (38) is absolutely uniformly convergent on every compact subset of the region $\mathbf{C}-[0, +\infty)$.

b) if $0 < \mu_0 < +\infty$, then the series (38) is absolutely uniformly convergent on every compact subset of the region $\Delta^*(\mu_0)$ and diverges at every point $z \in \Delta(\mu_0)-[0, +\infty)$ where $\Delta(\mu_0) = \{z \in \mathbf{C}: \operatorname{Re}\{(-z)^{\frac{1}{2}}\} < \mu_0\}$.

c) if $\mu_0 = +\infty$, then the series (38) diverges for every $z \in \mathbf{C}-[0, +\infty)$.