СВРЪХСХОДИМОСТ НА РЕДОВЕ ПО ПОЛИНОМИТЕ НА ЛАГЕР

Петър Русев

От Вайерщрас е даден за пръв път пример за степенен ред, който е сходящ в единичния кръг и е аналитично непродължим вън от този кръг, т. е. всички точки от единичната окръжност са сингулярни за сумата му. Адамар [1] установи, че свойството, констатирано от Вайерщрас, е налице за всеки степенен ред с краен радиус на сходимост при условие, че редът притежава „празнини", т. е. по-точно има вида $\sum_{k=0}^{\infty} a_{n_k} z^{n_k}$, където $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ е редица от естествени числа, такава, че $n_{k+1} \geqq (1+\theta) n_k$ за някое положително θ. Островски [2] показа, че резултатът на Адамар може да се получи като следствие от свойствата на степенните редове с краен радиус на сходимост, които притежават изобщо празнини от Адамаров тип, т. е. такива редове $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, за които съществуват растящи редици $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ от естествени числа, за които $q_k \geqq (1+\theta) p_k$ за някое положително θ и $a_n = 0$ за $p_k < n < q_k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$. За такива редове Островски установи, че редицата от парциални суми

$$\left\{ s_{p_k}(z) = \sum_{n=0}^{p_k} a_n z^n \right\}_{k=1}^{\infty},$$

която очевидно е подредица на редицата на парциалните суми на разглеждания ред, е сходяща в околността на всяка точка от окръжността му на сходимост, която е регулярна за сумата му. Последното свойство беше наречено свръхсходимост и съответният резултат носи името теорема за свръхсходимост на Островски. Резултатът на Адамар се получава като непосредствено следствие от теоремата на Островски, като се има пред вид, че за ред от типа на Адамар, т. е. ред от вида $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} z^{n_k}$, съответната редица на Островски съвпада с редицата на парциалните му суми $(p_k = n_k,\ q_k = n_{k+1})$.

Теореми за свръхсходимост от типа на Островски са установе и за други редове, от които степенните са частен случай. Така нап в работата на Альпер [3] се разглеждат редове по система от пол номи, която в известен смисъл има правилно асимптотично поведен За редове по такава система е установен аналог на теоремата Островски за свръхсходимост. В работата [4] на Варганова и Кор бейник резултати от такъв характер са установени за достатъчно ш рока класа от функционни редове.

В настоящата работа нашата цел е да установим, че за редо по полиномите на Лагер $\{L_n^{(\alpha)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ е валиден аналог на теоремата Островски. При това ще следваме неговия метод, който се основа на теоремата на Адамар за трите окръжности [5, стр. 198].

Полиномите на Лагер могат да бъдат дефинирани с помощта формула от типа на Родриг, а именно [6, стр. 110, (5. 15)]

$$L_n^{(\alpha)}(z)=\frac{1}{n!}\,z^{-\alpha}e^{z}\frac{d^n}{dz^n}\{z^{n+\alpha}e^{-z}\}. \tag{1}$$

За полиномите на Лагер с параметър α произволно реално чис е в сила следната асимптотична формула на Перон в областта $\mathbf{C}-[0,+\infty)$ [6, стр. 206, (8. 22. 3)]

$$L_n^{(\alpha)}(z)=\frac{1}{2\sqrt{n}}\,e^{\frac{z}{2}}(-z)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}e^{2\{(-z)^{\frac{1}{2}}\sqrt{n}}\{1+\lambda_n^{(\alpha)}(z)\}, \tag{2}$$

където $\{\lambda_n^{(\alpha)}(z)\}_{n=1}^{\infty}$ са функции, аналитични в областта $\mathbf{C}-[0,+\infty)$ $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n^{(\alpha)}(z)=0$ равномерно върху всяко компактно подмножество тази област.

Асимптотичното поведение на полиномите на Лагер върху лъ $[0,+\infty)$ е изследвано най-напред от Фейер, който е получил следна формула [6, стр. 206, (8. 22. 1)]

$$L_n^{(\alpha)}(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,e^{\frac{x}{2}}x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\cos\left\{2(nx)^{\frac{1}{2}}-\frac{\alpha\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right\} \tag{3}$$

$$+O\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}\right),$$

където оценката на остатъчния член е равномерна върху всеки и тервал от вида $[\varepsilon,\omega]$ при условие, че $0<\varepsilon<\omega<+\infty$.

Към формулите, характеризиращи асимптотичното поведение полиномите на Лагер, трябва да се прибави още и следната стр. 110, (5. 1. 7)]:

$$L_n^{(\alpha)}(0) = \binom{n+\alpha}{n} = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)}. \tag{4}$$

Въз основа на равенствата (2), (3) и (4) може да се получи достатъчно пълна характеристика както на областта, така и на характера на сходимост на един ред по полиномите на Лагер

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n^{(\alpha)}(z) \tag{5}$$

с произволни комплексни коефициенти. Преди всичко да отбележим, че ако $0<\lambda<+\infty$ е произволно, равенството $\mathrm{Re}\{(-z)^{\frac{1}{2}}\}=\lambda$ дефинира парабола $p(\lambda)$, чието декартово уравнение е $y^2=4\lambda^2(x+\lambda^2)$. От последното се вижда, че оста на параболата $p(\lambda)$ е реалната ос, а фокусът ѝ е в началото на координатите. Да означим с $\Delta(\lambda)$ вътрешността на параболата $p(\lambda)$, т. е. областта, определена с неравенството $\mathrm{Re}\{(-z)^{\frac{1}{2}}\}<\lambda$. След тези предварителни бележки да формулираме съответното твърдение [6, стр. 261, (5)]:

Нека редицата от комплексни числа $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ е такава, че

$$\lambda_0 = -\lim_{n\to\infty} \frac{\ln |a_n|}{2\sqrt{n}} > 0. \tag{6}$$

Тогава редът (5) е абсолютно сходящ във вътрешността $\Delta(\lambda_0)$ на параболата $p(\lambda_0)$ и е разходящ вън от нея.

Вместо редове по полиномите на Лагер ще разглеждаме редове от вида

$$F(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n^{(\alpha)}(-\zeta^2) \tag{7}$$

с произволни комплексни коефициенти. Както не е трудно да се убедим, ако редицата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворява условието (6), областта на сходимост реда (7) се характеризира с неравенството $\mathrm{Re}\{\zeta\}<\lambda_0$, т. е. с една „вертикална“ ивица с ширина $2\lambda_0$, симетрична спрямо имагинерната ос.

Ясно е, че ако $z_0 \in p(\lambda_0)$ е регулярна, респ. сингулярна точка за реда (5), точките ζ_0 и $-\zeta_0$, където ζ_0 се определя от равенството $-\zeta_0^2=z_0$, са регулярни, респ. сингулярни точки за реда (7). Обратно, ако ζ_0 е точка от контура на областта $\mathrm{Re}\{\zeta\}<\lambda_0$, която е регулярна, респ. сингулярна точка за функцията $F(\zeta)$, точката $z_0=-\zeta_0^2$ е регулярна, респ. сингулярна точка за функцията (5).

Резултата, който се получава, ще формулираме обаче за редо по полиномите на Лагер.

Теорема. Нека редицата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворява условието (6) нека съществуват две редици $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ от естествени числа, т кива, че:

а) $q_k \geqq (1+\theta)\, p_k$ $(k=1, 2, 3, \ldots)$ за някое положително θ;

б) $q_k = O(e^{p_k^{\nu}})$ за някое $0<\nu<\frac{1}{2}$;

в) $a_n=0$ за $p_k<n<q_k$ $(k=1, 2, 3, \ldots)$.

При тези условия редицата от парциални суми

$$\left\{ \sum_{n=0}^{p_k} a_n L_n^{(\alpha)}(z) \right\}_{k=1}^{\infty}$$

е сходяща в околността на всяка точка $z_0 \in p(\lambda_0)$, която е регуляр за функцията (5)

Доказателство. Нека $-\zeta_0^2 = z_0$ и за определеност да считаме, $\mathrm{Re}\{\zeta_0\}>0$. Както беше споменато по-горе, ζ_0 е регулярна точка реда (7). Ако успеем да покажем, че редицата от парциални суми

$$\sigma_{p_k}(\zeta) = \sum_{n=0}^{p_k} a_n L_n^{(\alpha)}(-\zeta^2) \tag{8}$$

е сходяща в известна околност на точката ζ_0, с това теоремата щ бъде установена. Полагаме $\omega_0 = r_0 + i\,\eta_0$, където $\eta_0 = \mathrm{Im}\{\zeta_0\}$ и

$$\frac{\lambda_0}{2} < r_0 < \lambda_0 ,$$

и описваме с център точката ω_0 окръжности γ_1, γ_2 и γ_3 с радиус съответно $(1-u\,\delta)(\lambda_0-r_0)$, $(1+\varepsilon)(\lambda_0-r_0)$ и $(1+\delta)(\lambda_0-r_0)$, където $1<u<\sqrt{1+\theta}$, а числата $0<\varepsilon<\delta$ са засега така избрани, че окръж ността γ_3, а следователно и γ_2, да принадлежи на област, която съ държа както ивицата $0<\mathrm{Re}\{\zeta\}<\lambda_0$, така и точката ζ_0, и в която об ласт функцията (7) е регулярна и еднозначна, накратко казано. Тов последно изискване ще бъде удовлетворено, ако се има пред вид, ч съгласно предположението за точката ζ_0 функцията $F(\zeta)$ е регулярн и еднозначна в известна околност на тази точка и освен това, че з всички достатъчно малки δ е в сила неравенството $r_0-(1+\delta)(\lambda_0-r_0)>0$ понеже $r_0>\frac{\lambda_0}{2}$. За да фиксираме избора на δ, ще отбележим, че з всички достатъчно малки δ е в сила неравенството

$$(1-u\,\delta)(1+\delta)^{\sqrt{1+\theta}} > 1 . \tag{9}$$

Наистина

$$\ln\{(1-u\delta)(1+\delta)^{\sqrt{1+\theta}}\}=\ln(1-u\delta)$$

$$+\sqrt{1+\theta}\ln(1+\delta)=\sqrt{1+\theta}\left(\delta-\frac{\delta^2}{2}+\ldots\right)$$

$$+\left(-u\delta-\frac{u^2\delta^2}{2}-\ldots\right)=(\sqrt{1+\theta}-u)\delta+O(\delta^2),$$

откъдето получаваме, че

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta}\ln\left\{(1-u\delta)(1+\delta)^{\sqrt{1+\theta}}\right\}=\sqrt{1+\theta}-u>0.$$

Следователно, ако положим напр. $\mu=\frac{\sqrt{1+\theta}-u}{2}$, за всички достатъчно малки δ ще бъде в сила неравенството

$$\frac{1}{\delta}\ln\left\{(1-u\delta)(1+\delta)^{\sqrt{1+\theta}}\right\}>\mu,$$

а следователно за същите стойности на δ ще бъде изпълнено неравенството

$$(1-u\delta)(1+\delta)^{\sqrt{1+\theta}}>e^{\mu\delta}>1.$$

Нека δ е така избрано, че да е изпълнено последното неравенство и окръжността γ_3 да принадлежи на описаната по-горе област, в която функцията $F(\zeta)$ е регулярна. Да положим

(10) $$\sigma=2(\lambda_0-\eta)-2\{r_0+(1-u\delta)(\lambda_0-r_0)\},$$

(11) $$\tau=2\{r_0+(1+\delta)(\lambda_0-r_0)\}-2(\lambda_0-\eta).$$

Ако изберем η така, че

$$0<\eta<(\lambda_0-r_0)\frac{u-1}{2}\delta,$$

то, както не е трудно да се убедим, ще бъде удовлетворено неравенството

(12) $$\sigma>\tau.$$

От (6) следва, че съществува положително A такова, че за всяко $n=0, 1, 2, \ldots$ е изпълнено неравенството

$$a_n \leqq A e^{-2(\lambda_0-\eta)\sqrt{n}}. \tag{13}$$

Да положим по-нататък ($k=1, 2, 3, \ldots$)

$$\varphi_k(\zeta)=F(\zeta)-\sigma_{p_k}(\zeta),$$

$$M_{k,j}=\max_{\xi\in\gamma_j}\varphi_k(\zeta) \qquad (z=1, 2, 3).$$

Съгласно теоремата на Адамар за трите окръжности [5, стр. 198]

$$M_{k,2}^{\ln\frac{1+\delta}{1-u\delta}} \leqq M_{k,1}^{\ln\frac{1+\delta}{1+\varepsilon}} M_{k,3}^{\ln\frac{1+\varepsilon}{1-u\delta}}. \tag{14}$$

От асимптотичната формула (2), като имаме пред вид, че окръжността γ_1 се намира в полуравнината $\mathrm{Re}\{\zeta\}>0$, получаваме, че

$$\max_{\zeta\in\gamma_1} L_n^{(\alpha)}(-\zeta^2) = O\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} e^{a\sqrt{n}}\right),$$

където $a=2\{r_0+(1-u\delta)(\lambda_0-r_0)\}$. Тогава, като имаме пред вид (13), получаваме, че

$$M_{k,1}=O\left(\sum_{n=q_k}^{\infty} n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} e^{-\sigma\sqrt{n}}\right),$$

където σ се дава от (10). Възможни са следните случаи:

$$\text{I.}\quad \frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}<0.$$

В този случай получаваме

$$M_{k,1}=O\left(\sum_{n=q_k}^{\infty} e^{-\sigma\sqrt{n}}\right)=O\left(\int_{q_k-1}^{\infty} e^{-\sigma\sqrt{t}}\,dt\right)$$

$$=O\left(\int_{\sqrt{q_k-1}}^{\infty} t\,e^{-\sigma t}\,dt\right)$$

и след едно интегриране по части намираме, че

$$M_{k,1}=O\left((q_k-1)^{\frac{1}{2}} e^{-\sigma\sqrt{q_k-1}}\right)=O\left(q_k^{\frac{1}{2}} e^{-\sigma\sqrt{q_k}}\right).$$

Като вземем пред вид условията а) и б) на теоремата, получаваме, че

$$M_{k,1}=O\left(e^{\frac{1}{2}p_k^{\nu}-\sigma\sqrt{(1+\theta)p_k}}\right). \tag{15}$$

II. $\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}\geqq 0$

Понеже функцията $t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}e^{-\sigma\sqrt{t}}$ е монотонно намаляваща за всички достатъчно големи t, получаваме пак, че

$$M_{k,1}=O\left(\int_{q_k-1}^{\infty}t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}e^{-\sigma\sqrt{t}}dt\right)$$

$$=O\left(\int_{\sqrt{q_k-1}}^{\infty}t^{\alpha+\frac{1}{2}}e^{-\sigma t}dt\right)$$

и след неколкократно интегриране по части намираме, че

$$M_{k,1}=O\left((q_k-1)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}e^{-\sigma\sqrt{q_k}}\right)$$

$$=O\left(q_k^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}e^{-\sigma\sqrt{q_k}}\right)$$

и като вземем пред вид пак условията а) и б), намираме

$$M_{k,1}=O\left(e^{\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}\right)p_k^{\nu}-\sigma\sqrt{(1+\theta)p_k}}\right). \tag{16}$$

Ако положим $g=\max\left(\frac{1}{2},\ \frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}\right)$, от (15) и (16) следва, че

$$M_{k,1}=O\left(e^{gp_k^{\nu}-\sigma\sqrt{(1+\theta)p_k}}\right). \tag{17}$$

Окръжността γ_3 принадлежи на полуравнината $\mathrm{Re}\{\zeta\}>0$. Тогава от асимптотичната формула (2) следва, че

$$\max_{\xi\in\gamma_3}\left|L_n^{(\alpha)}(-\zeta^2)\right|=O\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}e^{b\sqrt{n}}\right),$$

където $b=2\{r_0+(1+\delta)(\lambda_0-r_0)\}$. Като имаме пред вид (13), ще получим, че

$$M_{k,3} \leq M + a_0 + L \cdot \sum_{n=1}^{p_k} n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} e^{\tau\sqrt{n}},$$

където $M = \max\limits_{\xi \in \gamma_3} F(\zeta)$, L е константа, която не зависи от k и τ се дава от (11). Като се разгледат пак двата случая I. и II., се получава, че

$$M_{k,3} = O\left(e^{hp_k^{\gamma}+\tau\sqrt{p_k}}\right), \tag{18}$$

където $h = \max\left(1, \frac{\alpha}{2}+\frac{3}{4}\right)$.

От (14), като вземем пред вид (17) и (18), получаваме, че

$$M_{k,2}^{\ln\frac{1+\delta}{1-u\delta}} \leq K(\delta, \varepsilon) \exp\left\{\left[g \ln\frac{1+\delta}{1+\varepsilon} + h \ln\frac{1+\varepsilon}{1-u\delta}\right] p_k^{\gamma} - \left[\sigma\sqrt{1+\theta} \ln\frac{1+\delta}{1+\varepsilon} - \tau \ln\frac{1+\varepsilon}{1-u\delta}\right]\sqrt{p_k}\right\}. \tag{19}$$

Ще покажем сега, че за всички достатъчно малки положителни ε е в сила неравенството

$$\sigma\sqrt{1+\theta} \ln\frac{1+\delta}{1+\varepsilon} - \tau \ln\frac{1+\varepsilon}{1-u\delta} > 0. \tag{20}$$

Наистина, понеже $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(1+\varepsilon)^{\sqrt{1+\theta}+1} = 1$, от избора на δ, съгласно който е удовлетворено неравенството (9), следва, че за всички достатъчно малки ще бъде изпълнено неравенството

$$(1+\varepsilon)^{\sqrt{1+\theta}+1} < (1-u\delta)(1+\delta)^{\sqrt{1+\theta}}.$$

За такива стойности на ε ще бъде в сила и следното неравенство:

$$\frac{1+\varepsilon}{1-u\delta} < \left(\frac{1+\delta}{1+\varepsilon}\right)^{\sqrt{1+\theta}}.$$

Понеже $\tau < \sigma$ (12), то ще получим, че

$$\left(\frac{1+\varepsilon}{1-u\delta}\right)^{\frac{\tau}{\sigma}} < \left(\frac{1+\delta}{1+\varepsilon}\right)^{\sqrt{1+\theta}},$$

откъдето чрез логаритмуване получаваме неравенството (20). И така, нека δ и $0<\varepsilon<\delta$ са избрани така, че да са изпълнени неравенствата (9) и (20). Тогава от (19), като вземем пред вид, че $\nu<\frac{1}{2}$, следва, че $\lim\limits_{k\to+\infty} M_{k,2}=0$ и с това теоремата е установена, понеже от последното равенство следва, че редицата (8) е сходяща даже равномерно в известна околност на точката ζ_0.

Както беше обърнато внимание в началото, от теоремата на Островски за свръхсходимост на степенните редове веднага следва резултатът на Адамар за аналитична непродължимост на такива редове при наличието на съответни празнини. Установеният резултат за свръхсходимост на редове по полиномите на Лагер дава възможност да получим като следствие съответна теорема от типа на Адамар за редове по полиномите на Лагер, която ще формулираме в заключение.

Нека $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ е редица от естествени числа, която удовлетворява следните изисквания:

а) $n_{k+1}\geq(1+\theta)n_k$ за някое положително θ;

б) $n_{k+1}=O(e^{n_k^{\nu}})$ за някое $0<\nu<\frac{1}{2}$.

Тогава, ако редицата $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворява условието

$$\lambda_0=-\lim_{k\to\infty}\frac{\ln a_{n_k}}{2\sqrt{n_k}}>0,$$

редът

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{n_k} L_{n_k}^{(\alpha)}(z)$$

дефинира функцията, която е аналитично непродължима вън от областта $\Delta(\lambda_0)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hadamard, J.: Journ. d. Math. (4), 9 (1893), 171–215.
2. Ostrowski, A.: Sitz. Ber. Preuss. Akad. Wiss., Phys.-Math. Kl. (1921), 557—565.
3. Альпер, С. А.: ДАН СССР, 59 (1948), 625—627.
4. Варганова, Ю. Ф., Коробейник, С. В.: ДАН СССР, 137, № 3 (1961), 499—501.
5. Тичмарш, Е.: Теория функций. Москва, 1951.
6. Сеге, Г.: Ортогональные многочлены. Москва, 1962.

Постъпила на 16. XI. 1973 г.

OVERCONVERGENCE OF SERIES IN LAGUERRE'S POLYNOMIALS

P. Russev

(SUMMARY)

The following result is established: let $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ be a sequence of complex numbers which satisfies the conditions:

1) $\lambda_0 = -\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{\ln|a_n|}{2\sqrt{n}} > 0$;

2) there are two sequences $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ and $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ of positive integers such that $q_k \geqq (1+\theta)p_k$ $(k=1, 2, 3, \ldots)$ $(\theta>0)$, $q_k = O(e^{p_k^{\nu}})$ for some $0<\nu<\frac{1}{2}$ and $a_n=0$ if $p_k<n<q_k$ $(k=1, 2, 3, \ldots)$.

Then it follows that the sequence of partial sums

$$\left\{\sum_{n=0}^{p_k} a_n L_n^{(\alpha)}(z)\right\}_{k=1}^{\infty}$$

of the series

$$f(z) = \sum_{n=0} a_n L_n^{(\alpha)}(z)$$

is convergent in the neighbourhood of every point $z_0 \in p(\lambda_0) := \{z \in \mathbf{C} : \mathrm{Re}\{(-z)^{\frac{1}{2}}\} = \lambda_0\}$ which is regular for the function $f(z)$.