# ТЕОРЕМА НА БИЛЕР — ЕРМИТ ЗА ЕДНА КЛАСА ЦЕЛИ ФУНКЦИИ

**Петър Русев**

**1.** Нека

$$F(z)=c_0+c_1z+\ldots+c_nz^n+\ldots$$

е цяла функция и да положим по определение

$$\bar{F}(z)=\bar{c}_0+\bar{c}_1z+\ldots+\bar{c}_nz^n+\ldots$$

Изображението $F\to\bar{F}$ с автоморфизъм на пръстена на целите функции и този автоморфизъм е непрекъснат по отношение на равномерната сходимост върху всяко компактно множество.

Да положим по-нататък

$$RF(z)=\frac{1}{2}\{F(z)+\bar{F}(z)\},$$

$$IF(z)=\frac{1}{2i}\{F(z)-\bar{F}(z)\}.$$

От горните равенства следва непосредствено, че $F(z)=RF(z)+i\,IF(z)$.

Да допуснем, че $F(z)$ е полином с комплексни коефициенти. Съгласно класическата теорема на Билер — Ермит, за да принадлежат нулите на $F(z)$ на полуравнината $\operatorname{Im}\{z\}>0$ (или на полуравнината $\operatorname{Im}\{z\}<0$), е необходимо и достатъчно полиномите $RF(z)$ и $IF(z)$ да имат само реални и взаимно разделящи се нули. Както е известно обаче за произволни цели функции горното твърдение изобщо не е вярно.

**2.** За една цяла функция $\omega(z)$ казваме, че принадлежи на класа $HB$ [1, стр. 397], ако удовлетворява следните изисквания:

а) $\omega(z)$ няма нули в затворената долна полуравнина $\operatorname{Im}\{z\}\leqq 0$;

б) $\dfrac{\omega(z)}{\bar{\omega}(z)}<1$, щом $\operatorname{Im}\{z\}>0$.

От Н. Н. Мейман [1], стр. 402] е установен критерий за принадлежност на една цяла функция към класа $HB$. Този критерий, който обобщава класическата теорема на Билер — Ермит, ще формулираме под формата на следната

Теорема 1 (Н. Н. Мейман). Нека $P(z)=R\omega(z)$, $Q(z)=I\omega(z)$ и

$$P(z)=Ae^{u(z)}(z-a_0)\prod_{k=-\infty}^{+\infty}{}'\left(1-\frac{z}{a_k}\right)e^{P_k\left(\frac{z}{a_k}\right)} \quad (u(0)=0),$$

$$Q(z)=Be^{v(z)}(z-b_0)\prod_{k=-\infty}^{+\infty}\left(1-\frac{z}{b_k}\right)e^{P_k\left(\frac{z}{b_k}\right)} \quad (v(0)=0).$$

За да принадлежи $\omega(z)$ към класа $HB$, е необходимо и достатъчно да бъдат удовлетворени следните условия:

а) нулите на $P(z)$ и $Q(z)$ да са реални и да се разделят взаимно;

б) $$u(z)-v(z)+\prod_{k=-\infty}^{+\infty}\left\{P_k\left(\frac{z}{a_k}\right)-P_k\left(\frac{z}{b_k}\right)\right\}=0;$$

в) $A$ и $B$ да имат еднакъв знак.

За целите функции от класа $HB$, е дадено представяне с помощта на безкрайно произведение от типа на Вайерщрас. В сила е именно следната

Теорема 2 (М. Г. Крейн) [1, стр. 411]. За да принадлежи цялата функция $\omega(z)$ към класа $HB$, е необходимо и достатъчно тя да се представя във вида

$$\omega(z)=e^{u(z)+i(\gamma z+\delta)}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_k}\right)e^{RP_k\left(\frac{z}{a_k}\right)},$$

където $u(z)$ е реална цяла функция*, $\gamma\geqq 0$, $\operatorname{Im}\{a_k\}>0$ $(k=1, 2, 3,\ldots)$ и $\sum_{k=1}^{\infty}\left|\operatorname{Im}\left(\frac{1}{a_k}\right)\right|<+\infty$.

**3.** Целта ни в настоящата работа е да установим теорема от типа на Билер — Ермит за една класа цели функции. Преди всичко обаче е необходимо да дефинираме тази класа.

Цялата функция $F(z)$ се нарича ермитово четна, респ. нечетна, ако $F(-z)=\bar{F}(z)$, респ. $F(-z)=-\bar{F}(z)$. Непосредствено от това определение следва, че една цяла функция $F(z)$ е ермитово четна (нечетна) тогава и само тогава, когато $RF(z)$ е четна (нечетна), а $IF(z)$ е нечетна (четна).

Означаваме с $HK$ множеството на целите функции $F(z)$, които удовлетворяват следните изисквания:

* т. е. такава, че $Ru(z)=u(z)$.

I) редът на $F(z)$ не надминава единица;

II) $F(z)$ принадлежи на класа на Карлеман, т. е.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\operatorname{Im}\left(\frac{1}{a_k}\right)\right|<+\infty,$$

където $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ са нулите на $F(z)$, отлични от нула;

III) съществува $\theta$ такова, че $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ и нулите на $F(z)$ с евентуално изключение на краен брой се съдържат в секторите $|\arg z|\leqq\theta$ и $|\arg z-\pi|\leqq\theta$;

IV) $F(z)$ е ермитово четна (нечетна);

V) $RF(0)>0$ и $(IF)'(0)>0$ ($(RF)'(0)>0$ и $IF(0)>0$).

Теорема 3. Нека $F(z)$ е цяла функция от класата $HK$. Тогава, за да имат целите функции $RF(z)$ и $IF(z)$ само реални и взаимно разделящи се нули, е необходимо и достатъчно да са удовлетворени следните изисквания:

а) $F(z)$ да няма нули в затворената долна полуравнина;

б) $$\lim_{|y|\to+\infty}\operatorname{Im}\left\{\frac{F'(iy)}{F(iy)}-\frac{\overline{F'(iy)}}{\overline{F(iy)}}\right\}\geqq 0.$$

Преди да се спрем на доказателството на последната теорема, ще установим две помощни твърдения.

Лема 1. Нека $0\leqq\theta<\frac{\pi}{2}$ и $a\neq 0$ е комплексно число, такова, че $|\arg a|\leqq\theta$ или $|\arg a-\pi|\leqq\theta$. Тогава за всяко реално $y$ е в сила неравенството

$$\frac{1}{\left|1-\frac{iy}{a}\right|}\leqq\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}.$$

*Доказателство.* Нека $a=\alpha+i\beta$; тогава

$$\frac{1}{\left|1-\frac{iy}{a}\right|^2}=\frac{|a|^2}{|a-iy|^2}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2+(\beta-y)^2}\leqq\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2}$$

$$=1+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2\leqq 1+\operatorname{tg}^2\theta.$$

Лема 2. Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е редица от комплексни числа, която удовлетворява следните изисквания:

а) $a_n \neq 0$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$;

в) редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im}\left(\frac{1}{a_n}\right)$ е сходящ;

г) съществува $\theta$ $\left(0 \leqq \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ такова, че за всички достатъчно големи $n$ е удовлетворено или неравенството $\arg a_n \leqq \theta$ или неравенството $|\arg a_n - \pi| \leqq \theta$.

Тогава:

1) редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{\frac{1}{z-a_n} - \frac{1}{z-\bar{a}_n}\right\} \tag{1}$$

е абсолютно и равномерно сходящ всяко ограничено и затворено множество, което не съдържа никоя от точките $a_n$ и $\bar{a}_n$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$;

2)
$$\lim_{|y| \to +\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\frac{1}{iy-a_n} - \frac{1}{iy-\bar{a}_n}\right\} = 0.$$

*Доказателство.* 1. От равенството

$$\frac{1}{z-a_n} - \frac{1}{z-\bar{a}_n} = \left(\frac{1}{\bar{a}_n} - \frac{1}{a_n}\right) \frac{1}{\left(1-\frac{z}{a_n}\right)\left(1-\frac{z}{\bar{a}_n}\right)}$$

получаваме, че

$$\left|\frac{1}{z-a_n} - \frac{1}{z-\bar{a}_n}\right| \leqq \frac{2}{\left|1-\frac{z}{a_n}\right| \left|1-\frac{z}{\bar{a}_n}\right|} \operatorname{Im}\left(\frac{1}{a_n}\right).$$

От последното неравенство следва, че абсолютната и равномерна сходимост на реда (1) в смисъла на твърдението на лемата следва от условието в).

2. От лема 1, като имаме пред вид условието г), следва, че съществува естествено число $\nu$ такова, че

$$\left|\frac{1}{iy-a_n} - \frac{1}{iy-\bar{a}_n}\right| \leqq 2(1+\operatorname{tg}^2\theta) \operatorname{Im}\left(\frac{1}{a_n}\right)$$

за $n=\nu, \nu+1, \ldots$ и всяко реално $y$. Следователно редът

$$\sum_{n=\nu}^{\infty}\left\{\frac{1}{iy-a_n}-\frac{1}{iy-\bar{a}_n}\right\}$$

е абсолютно и равномерно сходящ в интервала $(-\infty, +\infty)$. Понеже за всяко $n=1, 2, 3, \ldots$

$$\lim_{y\to+\infty}\left\{\frac{1}{iy-a_n}-\frac{1}{iy-a_n}\right\}=0,$$

получаваме, че

$$\lim_{y\to+\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{iy-a_n}-\frac{1}{iy-\bar{a}_n}\right\}=0.$$

*Доказателство* на теорема 3. 1. Да допуснем, че цялата функция $F(z)$ принадлежи на класата $HK$ и удовлетворява условията на теорема 3. В частност редът на $F(z)$ не недминава единица и ако $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ са нулите на $F(z)$, понеже по предположение редът

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\operatorname{Im}\left(\frac{1}{a_k}\right)\right|$$

е сходящ, $F(z)$ може да се представи във вида

$$F(z)=e^{az+b}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_k}\right)e^{R\frac{z}{a_k}}. \tag{2}$$

Ще покажем, че $F(z)$ принадлежи на класа $HB$, като за целта използуваме теоремата на М. Г. Крейн. Достатъчно е следователно да покажем, че $\operatorname{Im}\{a\}\geqq 0$. От представянето на $F(z)$ във вида (2), като имаме пред вид посочените в началото свойства на изображението $F\to\bar{F}$, намираме, че

$$\bar{F}(z)=e^{\bar{a}z+\bar{b}}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\bar{a}_k}\right)e^{R\frac{z}{a_k}}.$$

Чрез логаритмично диференциране получаваме, че

$$\frac{F'(z)}{F(z)}=a+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{z-a_k}+\operatorname{Re}\left(\frac{1}{a_k}\right)\right\},$$

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = a + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{z - a_k} + \mathrm{Re}\left(\frac{1}{a_k}\right) \right\}.$$

Като поставим $z = iy$, намираме, че

$$\mathrm{Im}\left\{ \frac{F'(iy)}{F(iy)} - \frac{\overline{F'(iy)}}{\overline{F(iy)}} \right\} = \mathrm{Im}\{a\} + \mathrm{Im} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{iy - a_k} - \frac{1}{iy - \overline{a_k}} \right\},$$

откъдето следва въз основа на лема 2, че

$$\mathrm{Im}\{a\} = \lim_{y \to +\infty} \mathrm{Im}\left\{ \frac{F'(iy)}{F(iy)} - \frac{\overline{F'(iy)}}{\overline{F(iy)}} \right\} \geqq 0 .$$

2. Нека $F(z) \in HK$ и $RF(z)$ и $IF(z)$ да имат само реални и взаимно разделящи се нули. За определеност да считаме, че $F(z)$ е ермитово четна. Тогава $RF(z)$ е четна, а $IF(z)$ е нечетна. Нека $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ са положителните нули на $RF(z)$, а $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$ са положителните нули на $IF(z)$. Ако положим $\alpha_{-k} = -\alpha_k$ и $\beta_{-k} = -\beta_k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, то

$$RF(z) = A \prod_{k=-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right) e^{\frac{z}{\alpha_k}},$$

$$IF(z) = Bz \prod_{n=-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{\beta_k}\right) e^{\frac{z}{\beta_k}}$$

и веднага следва, че условието б) на теоремата на Мейман е удовлетворено. Условието в) също е удовлетворено, понеже $A = RF(0)$ и $B = (IF)'(0)$. Следователно по теоремата на Мейман $F(z)$ принадлежи на класа $HB$ и в частност $F(z)$ няма нули в затворената долна полуравнина. Ако представим съгласно теоремата на Крейн $F(z)$ във вида (2), ще бъде изпълнено неравенството $\mathrm{Im}\{a\} \geqq 0$, което, както видяхме, е еквивалентно с условието б) на теорема 3.

4. Да разгледаме целите функции от вида

$$E(f;\ z) = \int_{-1}^{1} f(t)\, e^{itz}\, dt, \tag{3}$$

където $f(t)$ е сумируема функция в интервала $(-1, 1)$. Ще обърнем внимание преди всичко, че целите функции от горния вид удовлетворяват изискванията I), II), III) и IV) за принадлежност към класата $HK$. Условието I) е очевидно изпълнено. Всяка цяла функция от вида (3) е от експоненциален тип (крайна степен) и е ограничена върху реал-

ната ос, а цели функции, които удовлетворяват последните две изисквания, принадлежат на класа $A$ на Карлеман [1, стр. 293]. Условието III) също е удовлетворено съгласно един резултат на Пейли, Винер и Тичмарш [2, стр. 24]. Най-сетне очевидно е, че всяка цяла функция от вида (3) е ермитово четна. Ако допуснем още, че са удовлетворени примерно неравенствата

$$\int_{-1}^{1} f(t)\,dt>0, \quad \int_{-1}^{1} tf(t)\,dt>0,$$

цялата функция $F(f;\,z)$ ще принадлежи на класата $HK$.

Да допуснем още, че $f(t)\geqq 0$. Ще покажем тогава, че

$$\lim_{y\to+\infty} \operatorname{Im}\left\{\frac{E'(f;\,iy)}{E(f;\,iy)}-\frac{\bar{E}'(f;\,iy)}{\bar{E}(f;\,iy)}\right\}$$

съществува.

Да положим по определение

$$\Phi(f;\,y)=\operatorname{Im}\left\{\frac{E'(f;\,iy)}{E(f;\,iy)}-\frac{\bar{E}'(f;\,iy)}{\bar{E}(f;\,iy)}\right\}$$

и

$$\varphi(f;\,y)=\frac{\int_{-1}^{1} tf(t)\,e^{ty}\,dt}{\int_{-1}^{1} f(t)\,e^{ty}\,dt}.$$

Както не е трудно да се убедим,

$$\Phi(f;\,y)=\varphi(f;\,y)+\varphi(f;\,-y). \tag{4}$$

Ще покажем, че функцията $\varphi(f;\,y)$ като функция на $y$ е монотонно растяща в интервала $(-\infty,\,+\infty)$. Наистина

$$\frac{d\varphi(f;\,y)}{dy}=\frac{\int_{-1}^{1} t^2 f(t)\,e^{ty}\,dt\int_{-1}^{1} f(t)\,e^{ty}\,dt-\left(\int_{-1}^{1} tf(t)\,e^{ty}\,dt\right)^2}{\left(\int_{-1}^{1} f(t)\,e^{ty}\,dt\right)^2}$$

и от неравенството на Коши — Буняковски следва, че

$$\left(\int_{-1}^{1} tf(t)\,e^{ty}\,dt\right)^2=\left(\int_{-1}^{1} t\sqrt{f(t)}\,e^{\frac{ty}{2}}\sqrt{f(t)}\,e^{\frac{ty}{2}}\,dt\right)^2$$

$$\leqq\int_{-1}^{1} t^2 f(t)\,e^{ty}\,dt\int_{-1}^{1} f(t)\,e^{ty}\,dt.$$

От допускането, че $f(t)$ е неотрицателна, следва, че $\varphi(f;\,y)$ е и ограничена. Следователно съществува $\lim\limits_{y\to+\infty}\varphi(f;\,y)$, а също така и $\lim\limits_{y\to+\infty}\varphi(f;\,-y)$. От (4) следва тогава, че съществува $\lim\limits_{y\to\infty}\Phi(f;\,y)$.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Левин, Б. Я.: Распределение корней целых функций. Москва, 1956.
2. Обрешков, Н.: Год. на Соф. унив., Физ.-мат. фак., 37 (1940/41), кн. 1 (мат. и физ.), 1—104.

Постъпила на 16. XI. 1973 г.

# BIEHLER — HER MITE'S THEOREM FOR A CLASS OF ENTIRE FUNCTIONS

P. Russev

## (SUMMARY)

The aim of the paper is to establish a theorem of Biehler — Hermite's type for the class $HK$ of entire functions $F(z)$ defined by the following conditions:

1) the order of $F(z)$ is at most equal to one;
2) $F(z)$ belongs to the class $A$ of Carleman, i. e.

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}' \left|\operatorname{Im}\left(\frac{1}{a_k}\right)\right|<+\infty$$

where $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ are the zeroes of $F(z)$;

3) there exists $\theta$ $\left(0 \leqq \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ such that almost all the zeroes of $F(z)$ lie in the regions $\arg z \leqq \theta$ and $\arg z - \pi \leqq \theta$.

4) $F(-z) = \bar{F}(z)$ {or $F(-z) = -\bar{F}(z)$};

5) $RF(0) > 0$ and $(IF)'(0) > 0$ $\{(RF)'(0) > 0$ and $IF(0) > 0\}$, where

$$RF(z) := \frac{1}{2}\{F(z) + \bar{F}(z)\} \text{ and } IF(z) := \frac{1}{2i}\{F(z) - \bar{F}(z)\}.$$

Theorem. Let $F(z) \in HK$. Then the entire functions $RF(z)$ and $IF(z)$ have only real and alternating zeroes if and only if:

a) $F(z) \neq 0$ for $\operatorname{Im}\{z\} \leqq 0$;

b) $$\lim_{|y| \to +\infty} \operatorname{Im}\left\{\frac{F'(iy)}{F(iy)} - \frac{\bar{F}'(iy)}{\bar{F}(iy)}\right\} \geqq 0.$$