ВЪВЕЖДАНЕ НА ЪГЛОВА МЕТРИКА В ДВУОСНОТО ПРОСТРАНСТВО ЧРЕЗ ЪГЪЛА МЕЖДУ ДВА СФЕРОИДА

Анани Лангов

Двуосното пространство третираме като тримерно реално проективно пространство, допълнено с комплексните точки прави и равнини, в което две прави f и g, реални или комплексно спрегнати, са избрани за абсолют. Двуосна геометрия наричаме клайновата геометрия, породена от групата на колинеациите, запазващи правите f и g. В настоящата работа ще се изключва от разглеждане двуосното параболично пространство.

Основна геометрична фигура, инвариантна относно двуосните колинеации, е конгруенцията от правите, пресичащи абсолютните прави f и g, наречена абсолютна конгруенция. Линейните комплекси от прави, съдържащи абсолютната конгруенция прави, образуват сноп линейни комплекси, наречен абсолютен сноп линейни комплекси. Той очевидно е също инвариантен относно същата група.

Норден А. П. въвежда (в[1]) ъгъл между две прави a и b в двуосната геометрия, използувайки възможността да се съпостави число на двойката линейни комплекси $L(a)$ и $L(b)$ от абсолютния сноп линейни комплекси, които съдържат съответно правите a и b.

1. ИЗРАЗЯВАНЕ ЪГЪЛА НА ДВОЙКА ПРАВИ ЧРЕЗ ОСНОВНИТЕ ИНВАРИАНТИ НА ТАЗИ ДВОЙКА

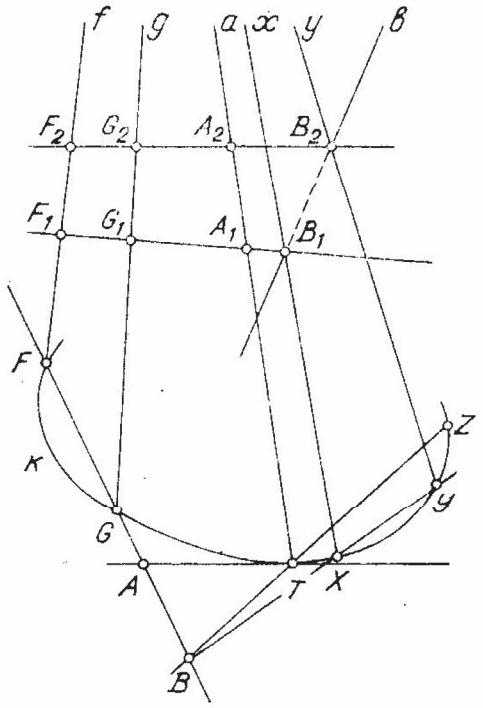
Ще изразим ъгъла на двойката прави a и b, въведен от Норден, чрез двете двойни отношения, които се образуват върху двете трансверзали на четирите прави a, b, f и g при пресичането им с тези прави.

За тази цел ще използуваме, че този ъгъл се изразява (в([2]) чрез двойното отношение на полюсите на произволна неособена равнина α относително линейните комплекси $L(a)$, $L(b)$, $L(f)$, $L(g)$

[С $L(f)$ (респ. $L(g)$) е означен изроденият линеен комплекс от правите, пресичаща правата f (респ. g)]. Построяването на тези полюси по схемата, изложена по-долу, е обосновано в [3].

1) означаваме с k (фиг. 1) кривата от втора степен, в която праволинейната повърхнина от втора степен, съдържаща правите f, g и a, пресича α; 2) означаваме с F, G, T прободите на α съответно с

правите f, g, a; 3) допирателната права към кривата k в точката T пресича правата FG в точката A, която е полюсът на α относно комплекса $L(a)$; 4) нека с x и y означим правите, които пресичат правата b и принадлежат на квадратичния рой R от прави, съдържащ правите f, g и a. С X и Y да означим техните прободи с α и с B — пресечната точка на правите XY и FG. Точката B е полюсът на α относно комплекса $L(b)$.



Фиг. 1

Като вземем пред вид, че F и G са полюсите на α относно изродените комплекси $L(f)$ и $L(g)$, то $\rho(a, b) = c \operatorname{Log} W$, където $W = (FGAB)$, $c = \text{const}$.

От друга страна, върху двете прави от роя R^*, спрегнат на R, които пресичат b, се образуват двойните отношения $W_1 = (F_1 G_1 A_1 B_1)$ и $W_2 = (F_2 G_2 A_2 B_2)$, които се проектират върху кривата k в равните им двойни отношения $(FGTX)$ и $(FGTY)$. Проектирайки $W = (FGAB)$ върху k от точката T, получаваме $W = (FGTZ)$. От инволюцията в кривата k с център точката B намираме равенството $(FGTX) = (FGYZ)$. Като заместим в тъждеството $(FGTZ) = (FGTY) . (FGYZ)$ двойното отношение $(FGYZ)$ с равното му двойно отношение $(FGTX)$, получаваме резултата $W = W_1 . W_2$.

Следователно за ъгловата метрика получаваме изразяването: $\rho(a, b) = c \operatorname{Log}(W_1 . W_2)$.

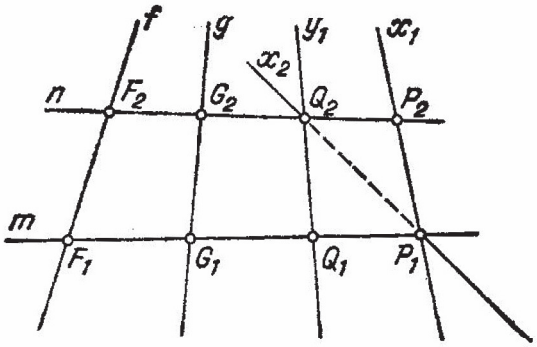
2. ЪГЪЛ МЕЖДУ ДВА СФЕРОИДА

Сфероид наричаме всяка реална повърхнина от втора степен (в смисъл, че коефициентите на уравнението ѝ спрямо реална координатна

система са реални числа), инцидентна с абсолютните прави f и g. Съдържайки реалните или комплексно спрегнати прави f и g, сфероидът е праволинейна повърхнина от втора степен и когато не се разпада в двойка равнини съвпада със съвкупността от точките, инцидентни с правите на един квадратичен рой, съдържащ правите f и g. Очевидно е, че съвкупността G от сфероидите е инвариантна фигура относно двуосните колинеации. По-долу ще въведем понятието ъгъл между два сфероида като проективна инварианта на двойката сфероиди. Като изходен пункт ще служи определението за ъгъл между две равнини от един сноп равнини, когато оста на снопа е трансверзала на абсолютните прави f и g. Съгласно това определение, ако неособените равнини α и β се пресичат в трансверзалата m на правите f и g и с μ е означена равнината инцидентна с правите f и m, а с ν — равнината, инцидентна с g и m, то $\varphi = \rho(\alpha, \beta) = c \operatorname{Log}(\mu\gamma\alpha\beta)$, където $c = \frac{1}{2i}$ за елиптичното двуосно пространство и $c = \frac{1}{2}$ за хиперболичното двуосно пространство.

Два сфероида H_1 и H_2 се пресичат в правите f и g; те се пресичат още и в две безкрайни прави m и n (трансверзали на f и g), които могат да бъдат и съвпадащи или комплексно спрегнати. Ще докажем следната

Теорема 1. В точките от безкрайната пресечница m на сфероидите H_1 и H_2 допирателните равнини към H_1 и H_2 образуват постоянен ъгъл φ (в смисъл на горното определение за ъгъл между две



Фиг. 2

равнини), а в точките на втората тяхна безкрайна пресечна права n ъгълът е $\varphi' = -\varphi$.

Доказателство. Ако $m = n$, то сфероидите H_1 и H_2 във всяка точка на m имат обща допирателна равнина и теоремата е вярна. Нека сега имаме общия случай, когато $m \neq n$. Ще построим допирателните равнини α и β съответно към сфероидите H_1 и H_2 в точката P_1, от правата m (фиг. 2). С x_1 и x_2 означаваме образуващите съответно на H_1 и H_2, минаващи през точката P_1 и непресичащи абсолют-

ните прави f и g. Нека още $P_2 = x_1 \cap n$, $Q_2 = x_2 \cap n$, $y_1 \mathrel{\underline{\smile}} Q_2$ е правата от системата образуващи на H_1, която съдържа x_1, и $Q_1 = y_1 \cap m$. Равнината α е определена от правите x_1 и m, а равнината β — от x_2 и m. От това, че равнината β минава през m и y_1, следва, че тя е допирателна равнина към H_1 в точката Q_1. Следователно $(\mu\gamma\alpha\beta) = (F_1 G_1 P_1 Q_1)$ (тук $\mu \mathrel{\underline{\smile}} m, f$; $\nu \mathrel{\underline{\smile}} m, g$).

Нека P_1' е друга точка от правата m, а α' и β' са допирателни равнини съответно към H_1 и H_2 в точката P_1' и Q_1 е точката от m, която съответствува на P_1' така, че $(\mu\nu\alpha'\beta') = (F_1 G_1 P_1' Q_1')$.

Квадратичният рой R от образуващи на повърхнината H_1, който съдържа правите f и g, се пресича от правите m и n в двойки точки, съответни при една проективност φ_1 на m върху n. Аналогично от H_2 се определя проективност φ_2 на правата m върху правата n. При проективността $\psi = \varphi_1 \varphi_2^{-1}$ съответни двойки са: $F_1 \to F_1$, $G_1 \to G_1$, $P_1 \to Q_1$, $P_1' \to Q_1'$, т. е. $F_1 G_1 P_1 P_1' \barwedge F_1 G_1 Q_1 Q_1'$.

Но от последното съотношение следва, че е изпълнено и съотношението $F_1 G_1 P_1 Q_1 \barwedge F_1 G_1 P_1' Q_1'$. И така получихме желаното равенство $(\mu\nu\alpha\beta) = (F_1 G_1 P_1 Q_1) = (F_1 G_1 P_1' Q_1') = (\mu\nu\alpha'\beta')$.

Допирателните равнини съответно към H_1 и H_2 в точката Q_2 от правата n са $\alpha'' \mathrel{\underline{\smile}} n, y_1$ и $\beta'' \mathrel{\underline{\smile}} n, x_2$. Но $\beta'' \mathrel{\underline{\smile}} P_2$, $\beta'' \mathrel{\underline{\smile}} n, x_1$ и следователно β'' е допирателната равнина към H_1 в точката P_2. Така получаваме равенството $(\mu'\nu'\alpha''\beta'') = (F_2 G_2 Q_2 P_2)$, където $\mu' \mathrel{\underline{\smile}} f, n$ е допирателна равнина към H_1 в точката $F_2 = f \cap n$, а $\nu' \mathrel{\underline{\smile}} g, n$ — допирателната равнина също към H_1 в точката $G_2 = g \cap n$. Изобразявайки последната четворка точки с помощта на φ_1^{-1} върху правата m, получаваме $(F_2 G_2 Q_2 P_2) = (F_1 G_1 Q_1 P_1)$, а съгласно по-горните резултати $(F_1 G_1 Q_1 P_1) = (\mu\nu\beta\alpha)$, т. е. $(\mu'\nu'\alpha''\beta'') = (\mu\nu\beta\alpha)$, от което получаваме $\varphi' = -\varphi$.

Дефиниция 1. Ъгълът φ между допирателните към сфероидите H_1 и H_2 в точките на коя да е тяхна безкрайна пресечна права наричаме ъгъл между сфероидите H_1 и H_2.

От съдържанието на теорема 1 е ясно, че ъгълът между два сфероида е определен многозначно, като двете му главни стойности са противоположни по знак, а останалите стойности се получават от главните с прибавяне на числото $k\pi$.

Дефиниция 2. Нека са дадени две неособени прави a и b. Определени са еднозначно сфероидите $H(a)$ и $H(b)$, които минават съответно през правите a и b. Ъгъл между правите a и b ще наричаме ъгъла между сфероидите $H(a)$ и $H(b)$.

Ето някои свойства на ъгъла между две прави, непосредствено следващи от дадените дефиниции:

1. $\rho(a, b) = \rho(b, a)$. Равенството следва от това, че главните стойности на ъгъла между сфероидите са противоположни числа.

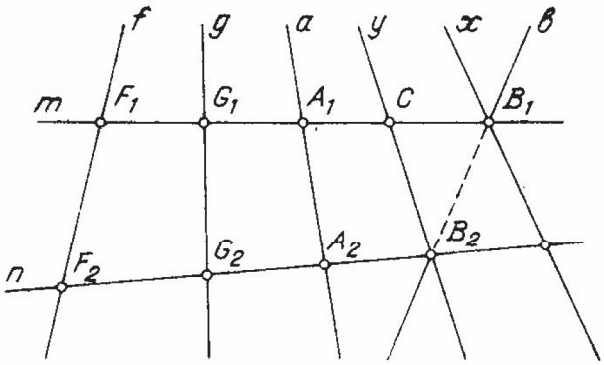
2. Нека $\rho(a, b) = \varphi$; тогава всички прави от квадратичния рой $R(a)$, съдържащ абсолютните прави f, g и правата a, сключват с правата b също ъгъл φ. Всяка права от роя $R(a)$ сключва с всяка права от квадратичния рой $R(b)$, съдържащ правите f, g и b също ъгъл φ.

3. Ако a и b принадлежат на един и същи квадратичен рой, съдържащ абсолютните прави f и g, то $\rho(a, b) = 0$.

В частност $\rho(a, a) = 0$.

3. ИЗРАЗЯВАНЕ НА ЪГЪЛА НА ДВОЙКА ПРАВИ, ВЪВЕДЕН ЧРЕЗ ДЕФИНИЦИЯ 2, ПОСРЕДСТВОМ ОСНОВНИТЕ ИНВАРИАНТИ НА ДАДЕНАТА ДВОЙКА ПРАВИ

Нека a и b са две неособени прави в пространството (фиг. 3). Двете трансверзали на четирите прави f, g, a, b нека са m и n. При пресичането на m и n с четирите прави се получават двойните отношения $W_1 = (F_1 G_1 A_1 B_1)$ и $W_2 = (F_2 G_2 A_2 B_2)$. Сфероидът $H(a)$ съдържа



Фиг. 3

правите m, n и следователно се пробожда от правата b в точките B_1 и B_2. Построяваме образуващите x и y на $H(a)$, които минават през точките B_1 и B_2 и принадлежат на системата образуващи, която съдържа правата a. Нека $C = m \cap y$. Използувайки получените при доказателството на теорема 1 съотношения (при полагане на $k = x_2$), получаваме, че $\rho(a, b) = c \operatorname{Log} W = c \operatorname{Log} (\mu\nu\alpha\beta) = c \operatorname{Log} (F_1 G_1 B_1 C)$. Тук α и β са допирателните равнини съответно към $H(a)$ и $H(b)$ в точката B_1, а $\mu \mathrel{\overline{\wedge}} m, f$; $\nu \mathrel{\overline{\wedge}} m, g$.

От друга страна, $(F_1 G_1 B_1 C) = (F_1 G_1 B_1 A_1)(F_1 G_1 A_1 C)$, а $(F_1 G_1 A_1 C) = (F_2 G_2 A_2 B_2) = W$, защото правите f, g, x, y принадлежат на един квадратичен рой. Така получаваме $(F_1 G_1 B_1 C) = \frac{1}{W_1} \cdot W_2 = \frac{W_2}{W_1}$, $\varphi = c \operatorname{Log} \frac{W_2}{W_1}$. Разбира се, $\varphi' = c \operatorname{Log} \frac{W_1}{W_2} = -\varphi$.

4. ВЪРХУ ЕДНА КОНСТРУКТИВНА ЗАДАЧА

Нека са дадени правите a и b. Да намерим съвкупността P от правите p, за които $\rho(a, b) = \rho(a, p)$, т. е. съвкупността от всички прави p, които сключват с правата a даден ъгъл, равен на ъгъла между a и b.

Ще използуваме фиг. 3 и означенията, въведени по-рано. Ъгълът между a и b намираме от равенството $\rho(a, b) = c\,\mathrm{Log}(F_1 G_1 B_1 C) = c\,\mathrm{Log}(f g x y)$. Ако p е произволна права, постъпвайки за двойката a, p, както за a и b, намираме $\rho(a, p) = c\,\mathrm{Log}(f g x' y')$, където x', y' са правите от квадратичния рой R, съдържащ f, g и a, които пресичат p. Равенството $\rho(a, b) = \rho(a, p)$ се свежда до $(fgxy) = fg x' y')$. С други думи, търсим правата p като права, пресичаща двойка прави x, y от роя R, за която двойка е изпълнено $(f g x y) = W$(const).

Ще докажем, че съвкупността P е квадратичен комплекс от прави. Затова ще покажем, че в общия случай в една равнина α правите от съвкупността P образуват крива от втори клас, а през произволна точка S от пространството правите от P принадлежат на конус от втора степен.

Да пресечем сфероида $H(a)$ с дадената равнина α в крива k от втора степен. Произволна права от α, която принадлежи на съвкупността P, пресича k в двойка точки X, Y така, че върху кривата k двойното отношение $(FGXY)$ е равно на W (тук $F = f \cap \alpha$, $G = g \cap \alpha$). Тази подсъвкупност на P е крива от втори клас, на която допирните точки образуват крива от втора степен σ, допираща се с кривата k в точките F и G. Ако започнем търсенето на правата $\rho(\angle \alpha)$ от второто значение на ъгъла, то достигаме до условието, че $(F G X Y) = \frac{1}{W}$ или $(F G Y X) = W$, но това условие не дава нови решения за правата p.

Нека S е произволна точка в пространството. Правите от P, инцидентни с S, образуват конус с връх точката S, чиято степен ще открием, като проверим колко прави от конуса лежат в една равнина α, минаваща през S. Това означава, че от крива от втори клас търсим правите, минаващи през точката S. Тъй като тези прави са две, то следва, че конусът е от втора степен.

Да решим поставената задача за специалния случай, когато $\rho(a, b) = \frac{\pi}{2}$. Сега $(f g x y) = -1$ и $(FGXY) = -1$. Правите от съвкупността P, лежащи в α, минават през точката O, в която се пресичат допирателните f' и g' към k, построени съответно в точките F и G. Кривата σ в този случай се разпада на двойната права FG, а квадратичният комплекс P се състои от правите на един линеен комплекс, който, разбира се, трябва да се смята като двоен. Като имаме пред вид, че друго разлагане на кривата σ не е възможно поради условието за допиране на σ и k в точките F и G, то резултатите, получени досега, могат да се формулират в следната

Теорема 2. Правите в пространството, сключващи с дадена права даден ъгъл, различен от $\frac{\pi}{2}$, образуват квадратичен комплекс от прави. Когато даденият ъгъл е $\frac{\pi}{2}$, този квадратичен комплекс се изражда в линеен комплекс.

Най-после да се спрем на интересния случай, когато $\rho(a, b) = 0$. Този случай се явява: или 1) когато $m = n$, но $H(a) \neq H(b)$; или 2) когато $m \neq n$, но $H(a) = H(b)$.

В случая 1) правите a и b ще наричаме успоредни. Успоредни на правата a са всички прави, които са допирателни към сфероида $H(a)$, т. е. лежат в неговата допирателна равнина и минават през допирната ѝ точка. Лесно се проверява, че успоредността не е транзитивна релация, т. е. от условията $a \parallel b$, $b \parallel c$ не следва $a \parallel c$.

В случая 2) правите, успоредни на a, ще наричаме паралелни. Правите, паралелни на правата a, са образуващите на сфероида $H(a)$, които принадлежат на системата образуващи, която съдържа правата a. Тъй като сега са налице условията: $a \parallel a$, от $a \parallel b$ следва $b \parallel a$ и от $a \parallel b$, $b \parallel c$ следва $a \parallel c$, то имаме, че правите на всеки квадратичен рой прави, съдържащ абсолютните прави, образуват направление.

5. АНАЛИТИЧНО ИЗРАЗЯВАНЕ НА ЪГЪЛА МЕЖДУ ДВА СФЕРОИДА И МЕЖДУ ДВЕ ПРАВИ В ДВУОСНОТО ЕЛИПТИЧНО ПРОСТРАНСТВО

Нека в двуосното елиптично пространство е избрана реална проективна координатна система $(A_1A_2A_3A_4)$ така, че точките $B_1 = A_1 + iA_3$ и $B_2 = A_2 + iA_4$ да лежат върху абсолютната права f, а техните комплексно спрегнати точки $\bar{B}_1 = A_1 - iA_3$ и $\bar{B}_2 = A_2 - iA_4$ — върху другата абсолютна права g.

Уравнението на произволен сфероид се получава от вида

$$\alpha(x_1^2 + x_3^2) + \beta(x_2^2 + x_4^2) + 2\gamma(x_1x_2 + x_3x_4) + 2\delta(x_1x_4 - x_2x_3) = 0,$$

където α, β, γ, δ са реални константи.

Ако е дадена правата l, представена с уравненията

$$x_1 = ax_2 + bx_4,$$
$$x_3 = cx_2 + dx_4,$$

която не пресича абсолютните прави f и g, т. е. $a + b \neq c + d$ и $a - b \neq d - c$, то сфероидът $H(l)$, който съдържа правата l, има коефициенти $\alpha = -2$, $\beta = 2(bc - ad)$, $\gamma = a + d$ и $\delta = b - c$.

Да вземем два сфероида

$$H_i : \alpha_i(x_1^2 + x_3^2) + \beta_i(x_2^2 + x_4^2) + 2\gamma_i(x_1x_2 + x_3x_4) + 2\delta_i(x_1x_4 - x_2x_3) = 0$$
$$(i = 1, 2).$$

Поставяме си задачата да изразим ъгъла между тях, въведен чрез дефиниция 1, т. 2, чрез константите α_i, β_i, γ_i, δ_i $(i = 1, 2)$.

Затова, като използуваме резултатите от теорема 1, т. 2, трябва в една обща точка M на двата сфероида H_1 и H_2, нележаща на f и g, да построим допирателните равнини α_1 и α_2 и изчислим константата $\varphi = \frac{1}{2i} \operatorname{Log}(\mu\nu\alpha_1\alpha_2)$, където $\mu \angle M, f$; $\nu \angle M, g$. За точка M ще използуваме една от точките, в които сфероидите H_1 и H_2 пресичат

координатната равнина $\rho(x_2=0)$. При пресичането на четворките равнини μ, ν, α_1, α_2 с равнината ρ получаваме четворката прави MB_1, $M\bar{B}_1$, a_1, a_2, като a_i $(i=1,2)$ са допирателните прави в точката M към кривите

$h_i: \alpha_i(x_1^2+x_3^2)+2\gamma_i x_3 x_4+2\delta i\, x_2 x_4+\beta_i x_4^2=0$ $(i=1,2)$. За да се разбере същността на израза $\frac{1}{2i}\operatorname{Log}(MB_1, M\bar{B}_1, a_1, a_2)$, ще се обърнем към двуосните колинеации в пространството и индуцираната от тях метрика в равнината $\rho(x_2=0)$.

Спрямо избраната координатна система произволна трансформация от седемчленната група на двуосните колинеации има матрица от вида

$$T=\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}, \text{ където } A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Индуцираните от тези колинеации съответствия в равнината ρ спрямо равнинната проективна координатна система $A_1A_3A_4$ се представят със следните уравнения:

$$\begin{aligned} \rho_1 x_1' &= \quad a_{11}x_1+b_{11}x_3+b_{12}x_4, \\ \rho_1 x_3' &= -b_{11}x_1+a_{11}x_3+a_{12}x_4, \\ \rho_1 x_4' &= \qquad\qquad\qquad a_{22}x_4. \end{aligned}$$

Ако безкрайната права A_1A_3 изберем за изключена права на афинната равнина ρ, то координатната система $(A_1A_3A_4)$ може да се разглежда като афинна. Последната трансформация в нехомогенни координати $X_1=\frac{x_1}{x_4}$, $X_3=\frac{x_3}{x_4}$ добиват вида

$$\begin{aligned} X_1' &= \quad pX_1+qX_3+r_1, \\ X_3' &= -qX_1+pX_3+r_2. \end{aligned}$$

Това показва, че двуосните колинеации индуцират в двойната равнина ρ евклидова метрика (геометрия на подобието). Циклични точки на тази метрика са точките $B_1(1, i, 0)$ и $\bar{B}_1(1, -i, 0)$.

Да забележим още, че афинната координатна система $(A_1A_3A_4)$ е и ортогонална при това мероопределение поради условията $B_1=A_1+iA_3$ и $\bar{B}_1=A_2+iA_4$, от които следва $(B_1\bar{B}_1A_1A_3)=-1$.

Тогава нехомогенните уравнения

$$\alpha_i(X_1^2+X_3^2)+2\delta_i X_2+2\gamma_i X_3+\beta_i=0 \quad (i=1,2)$$

на кривите h_i са уравнения на две окръжности, а $(\mu B_1, \mu\bar{B}_1, a_1, a_2)$ е двойното отношение на изотропните прави и допирателните към

тези окръжности, инцидентни с една пресечна точка на тези окръжности. По формулата на Лагер числото $\varphi = \frac{1}{2i} \operatorname{Log}(MB_1, MB_1, a_1, a_2)$ е равно на ъгъла между правите a_1 и a_2, т. е. на ъгъла между окръжностите h_1 и h_2. Следователно за косинуса от този ъгъл имаме

$$\cos\varphi = \frac{2(\delta_1\delta_2+\gamma_1\gamma_2)-(\alpha_2\beta_1+\alpha_1\beta_2)}{2\sqrt{\delta_1^2+\gamma_1^2-\alpha_1\beta_1}\ \sqrt{\delta_2^2+\gamma_2^2-\alpha_2\beta_2}}.$$

6. ПРЕОБРАЗУВАНЕ НА СФЕРОИДИТЕ. МАТРИЧНО ИЗРАЗЯВАНЕ НА ЪГЪЛА МЕЖДУ ДВА СФЕРОИДА В ДВУОСНОТО ЕЛИПТИЧНО ПРОСТРАНСТВО

Нека сфероида H от двуосното елиптично пространство с уравнение

$$\alpha(x_1^2+x_3^2)+\beta(x_2^2+x_4^2)+2\gamma(x_1x_2+x_3x_4)+2\delta(x_1x_4-x_2x_3)=0$$

подложим на двуосната колинеация φ и образът му H', който е също сфероид, има уравнение

$$\alpha'(x_1^2+x_3^2)+\beta'(x_2^2+x_4^2)+2\gamma'(x_1x_2+x_3x_4)+2\delta'(x_1x_4-x_3x_4)=0.$$

Лявата страна на уравнението на сфероида H представлява квадратична форма с матрица

$$U=\left(\begin{array}{cc:cc} \alpha & \gamma & 0 & \delta \\ \gamma & \beta & -\delta & 0 \\ \hdashline 0 & -\delta & \alpha & \gamma \\ \delta & 0 & \gamma & \beta \end{array}\right),$$

която е и матрица на полярността ψ в пространството, чиито самоспрегнати точки образуват повърхнината H. Нека матрицата на колинеацията φ е T. Както е известно, точковите проективни координати в пространството се трансформират с матрицата T, а проективните координати на равнините — с матрица, пропорционална на матрицата $(T^{-1})'$, транспонирана с T^{-1}. Сфероидът H' се състои от самоспрегнатите точки на полярността $\psi' = \varphi^{-1}\psi\varphi$ и следователно матрицата му е $U' = (T^{-1})' U T^{-1}$.

В този параграф ще дадем по-прост начин за намиране на константите α', β', γ', δ', знаейки уравнението на сфероида H и матрицата T. Умножаването на матрици от четвърти ред ще се замени с умножаване на матрици от втори ред. Тези матрици са матриците на проективностите φ_f и φ_g, индуцирани от колинеацията φ в сноповете равнини с оси абсолютните прави f и g, и подходяща матрица, съставена от коефициентите α, β, γ, δ на сфероида H.

Спрямо въведената в т. 5 координатна система произволна равнина α от снопа с ос правата f има уравнение

$$\lambda(x_1+ix_3)+\mu(x_2+ix_4)=0,$$

а равнина β от снопа с ос правата g — уравнение

$$\lambda_1(x_1-ix_3)+\mu_1(x_2-ix_4)=0,$$

където λ, μ, λ_1, μ_1 са комплексни числа. Произволна повърхнина от втора степен (реална или имагинерна), минаваща през правите f и g, може да се получи като съвкупност от общите точки на съответните двойки равнини при проективност ψ на снопа равнини f върху снопа равнини g.

Нека матрицата на проективността ψ е $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,

$$\rho\lambda_1=a\lambda+b\mu$$

т. е.

$$\rho\mu_1=c\lambda+d\mu,$$

където ρ, a, b, c, d са комплексни константи, при което $\rho\neq 0$. Като елиминираме от тези уравнения и от уравненията на α и β параметрите λ, μ, λ_1, μ_1 и ρ, получаваме уравнението на тази повърхнина

$$b(x_1+x_3^2)-c(x_2^2+x_4^2)+(d-a)(x_1x_2+x_3x_4)-(d+a)i(x_1x_4-x_2x_3)=0.$$

Ако искаме тази повърхнина да бъде сфероид H, то четворката числа b, $-c$, $d-a$, $-i(d+a)$ трябва да бъде пропорционална с реалната четворка α, β, 2γ, 2δ. Оттук получаваме, че до коефициент на пропорционалност имаме

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \delta+i\gamma & -\alpha i \\ \beta i & \delta-i\gamma \end{pmatrix},$$

т. е. a и d трябва да бъдат комплексно спрегнати, а b и c — чисто имагинерни. Следователно проективността ψ определя сфероид тогава и само тогава, когато матрицата ѝ е от вида

$$x=\begin{pmatrix} \delta+\gamma i & -\alpha i \\ \beta i & \delta-\gamma i \end{pmatrix},$$

където α, β, γ, δ са реални числа. Последната матрица ще наричаме матрица на сфероида H.

Нека $\alpha(\lambda, \mu, \lambda i, \mu i)$ е равнина от снопа f и нейната съответна равнина при колинеацията φ, а значи и при проективността φ_f да е $\alpha'(\lambda', \mu', \lambda_i, \mu_i)$. Като изразим условието, че α' и α са съответни при φ^{-1} и отделим независимите уравнения, то за φ_f^{-1} получаваме израза

$$\rho\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11}i & a_{21}-b_{21}i \\ a_{12}-b_{12}i & a_{22}-b_{22}i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda' \\ \mu' \end{pmatrix}=(A'-B'i)\begin{pmatrix} \lambda' \\ \mu' \end{pmatrix}.$$

По аналогичен начин намираме, че матрицата на проективността φ_g^{-1} е равна до коефициент на пропорционалност на матрицата $A'+B'i$. Тогава φ_g има матрица $(A'+B'i)^* = A'^* + B'^* i$ (със * тук е означена присъединената матрица към дадената, т. е. транспонирана адюнгираната матрица на дадената).

Проективността $\psi' = \psi_f^{-1}\psi\varphi_g$ определя сфероида H', образ на H при колинеацията φ, и следователно матрицата му се получава по формулата

$$x' = (A'^* + iB'^*)x(A' - iB').$$

Ако с g означим матрицата $A'+iB'$, то $A'-B'i = g$, а $A'^*+B'^*i = g^*$. Тогава получаваме $x' = g^* x g$.

Нека с x и y означим матриците на два сфероида H_1 и H_2, а с x и y — комплексно спрегнатите им матрици. Като изчислим стойностите на детерминантите в израза $\tau = \dfrac{xy+yx}{4\ xy}$, получаваме, че

$$\tau = \frac{[2(\delta_1\delta_2+\gamma_1\gamma_2)-(\alpha_2\beta_1+\alpha_1\beta_2)]^2}{4(\delta_1^2+\gamma_1^2-\alpha_1\beta_1)(\delta_2^2+\gamma_2^2-\alpha_2\beta_2)}.$$

От това следва, че $\cos\varphi = \sqrt{\tau}$. Така намерихме формулата

$$\cos\varphi = \sqrt{\frac{xy+yx}{4\ xy}}.$$

Пред корена сме взели само знак $+$, защото ъгълът φ е периодична функция с период π.

7. АНАЛИТИЧНО ИЗРАЗЯВАНЕ НА ЪГЪЛ МЕЖДА ДВА СФЕРОИДА И НА ДВОЙКА ПРАВИ В ДВУОСНОТО ХИПЕРБОЛИЧНО ПРОСТРАНСТВО

Нека в двуосното хиперболично пространство е избрана проективна координатна система $(A_1A_2A_3A_4)$ така, че точките $B_1 = A_1 - A_3$ и $B_2 = A_2 - A_4$ лежат върху абсолютната права f, а точките $B_3 = A_1 + A_3$ и $B_4 = A_2 + A_4$ — върху другата абсолютна права g.

Произволен сфероид има спрямо тази координатна система уравнение

$$\alpha(x_1^2 - x_3^2) + \beta(x_2^2 - x_4^2) + 2\gamma(x_1x_2 - x_3x_4) + 2\delta(x_1x_4 - x_2x_3) = 0,$$

където α, β, γ, δ са реални параметри.

Ако правата l с уравнения

$$x_1 = ax_2 + bx_4,$$

$$x_3 = cx_2 + dx_4$$

не пресича абсолютните прави f и g, т. е. $a \neq d$, $b \neq -c$, сфероидът $H(l)$, съдържащ правата l, има коефициенти $\alpha = -2$, $\beta = 2(cb - ad)$, $\gamma = a + d$ и $\delta = b + c$.

Ще изразим ъгъла φ между сфероидите $H_i : \alpha_i(x_1^2 - x_3^2) + \beta_i(x_2^2 - x_4^2) + 2\gamma_i(x_1x_2 - x_3x_4) + 2\delta_i(x_1x_4 - x_2x_3)$ $(i = 1, 2)$ чрез константите α_i, β_i, γ_i, δ_i. Като използуваме синтетичните разглеждания от т. 5, получаваме, че $\varphi = \frac{1}{2}\operatorname{Log}(MB_1, MB_3, a_1, a_2)$, където M е точка, лежаща в равнината $\rho(x_2 = 0)$ и лежаща върху сфероидите H_1 и H_2 $(M \neq F = f \cap \rho$, $M \neq G = g \cap \rho)$, а a_1 и a_2 са допирателните в точката M към кривите $h_i : \alpha_i(x_1^2 - x_3^2) - 2\gamma_i x_3 x_4 + 2\delta_i x_1 x_4 - \beta_i x_4^2 = 0$ $(i = 1, 2)$, в които сфероидите H_1 и H_2 пресичат равнината $\rho(x_2 = 0)$.

Произволна двуосна колинеация в пространството има спрямо въведената координатна система матрица от вида

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}, \text{ където } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Индуцираните от тези колинеации съответствия в равнината $\rho(x_2 = 0)$ спрямо равнинната проективна координатна система $(A_1A_3A_4)$ се представят с уравненията

$$\rho_1 x_1^2 = a_{11}x_1 + b_{11}x_3 + b_{12}x_4,$$

$$\rho_1 x_3' = b_{11}x_1 + a_{11}x_3 + a_{12}x_4,$$

$$\rho_1 x_4' = \qquad\qquad a_{22}x_4.$$

Спрямо афинната координатна система $(A_1A_3A_4)$ с изключена права A_1A_3 и в нехомогенни координати $X_1 = \frac{x_1}{x_4}$, $X_3 = \frac{x_3}{x_4}$ тези уравнения добиват вида

$$X_1' = pX_1 + qX_3 + r_1,$$
$$X_3' = qX_1 + pX_3 + r_2.$$

Това показва, че двуосните колинеации индуцират в равнината ρ псевдоевклидова метрика (геометрия на подобието) с циклични точки B_1 и B_3. От това, че $(B_1B_3A_1A_3) = -1$, пък следва, че координатната система $(A_1A_3A_4)$ е ортогонална. Тогава нехомогенните уравнения

$$h_i : \alpha_i(X_1^2 - X_3^2) + 2\delta_i X_1 - 2\gamma_i X_3 - \beta_i = 0 \quad (i = 1, 2)$$

са уравнения на две „окръжности“ и изразът $\varphi = \frac{1}{2}\operatorname{Log}(MB_1, MB_3, a_1, a_2)$ е ъгълът между правите a_1 и a_2 в тази метрика, т. е.

$$\operatorname{ch}\varphi = \frac{2(\delta_1\delta_2-\gamma_1\gamma_2)+\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1}{2\sqrt{\delta_1^2-\gamma_1^2+\alpha_1\beta_1}\,.\,\sqrt{\delta_2^2-\gamma_2^2+\alpha_2\beta_2}}.$$

В статиите [4] и [5] е установено, че два сфероида в двуосното хиперболично пространство имат инварианта J и е изказана възможността тя да се интерпретира като разстояние или ъгъл между сфероидите. Сравнявайки изразите на въведения в настоящата статия ъгъл φ между сфероидите и инвариантата J, намираме връзката

$$J = 4\operatorname{ch}^2\varphi.$$

8. ПРЕОБРАЗУВАНЕ НА СФЕРОИДИТЕ И МАТРИЧНО ИЗРАЗЯВАНЕ НА ЪГЪЛА МЕЖДУ ДВА СФЕРОИДА В ДВУОСНОТО ХИПЕРБОЛИЧНО ПРОСТРАНСТВО

Спрямо въведената в т. 7 координатна система произволна равнина α от снопа с ос правата f има уравнение $\lambda(x_1+x_3)+\mu(x_2+x_4)=0$, а равнина β от снопа с ос g — уравнение $\lambda_1(x_1-x_3)+\mu_1(x_2-x_4)=0$, където λ, μ, λ_1, μ_1 са комплексни числа. Нека ψ е проективност на снопа равнини с ос f върху снопа равнини с ос g и тази проективност има представяне

$$\rho\lambda_1 = a\lambda + b\mu,$$

$$\rho\mu_1 = c\lambda + d\mu,$$

където a, b, c, d, ρ са комплексни числа, $\rho \neq 0$. Като елиминираме параметрите λ, μ, λ_1, μ_1, ρ от тези уравнения и от уравненията на α и β, получаваме, че повърхнината от втора степен, която се състои от точките, инцидентни с двойките съответни при ψ равнини, има уравнение

$$-b(x_1^2-x_3^2)+c(x_2^2-x_4^2)+(a-d)(x_1x_2-x_3x_4)+(a+d)(x_1x_4-x_2x_3)=0.$$

Сравнявайки това уравнение с уравнението на един сфероид, получаваме, че матрицата $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ на проективността ψ е от вида

$$x = \begin{pmatrix} \delta+\gamma & -\alpha \\ \beta & \delta-\gamma \end{pmatrix}.$$

Тази матрица ще наричаме матрица на сфероида

$$H: \alpha(x_1^2-x_3^2)+\beta(x_2^2-x_4^2)+2\gamma(x_1x_2-x_3x_4)+2\delta(x_1x_4-x_2x_3)=0:$$

Ако φ е двуосна колинеация в пространството с матрица $T=\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$, то по начина, изложен в т. 6, намираме, че матриците на индуцираните от колинеациите φ^{-1} и φ проективности φ_f^{-1} и φ_g в сно-

повете равнини с оси абсолютните прави f и g имат матрици съответно $A'+B'$ и $A'^*-A'^*$. Следователно матрицата на сфероида H', който е образ на H при колинеацията φ, е $x'=(A'^*-B'^*)\,x\,(A'+B')$.

Нека x е матрицата $\begin{pmatrix} \delta+\gamma & -\alpha \\ \beta & \delta-\gamma \end{pmatrix}$ на сфероида H. С $\bar{x}$ означаваме матрицата $\begin{pmatrix} -\delta+\gamma & -\alpha \\ \beta & -\delta-\gamma \end{pmatrix}$, която се получава от първата със замяна на δ с $-\delta$. Ако x и y са матриците на два сфероида и изчислим стойностите на детерминантите в израза $\tau=\dfrac{xy+yx}{4\,xy}$, получаваме

$$\tau=\frac{[2(\delta_1\delta_2-\gamma_1\gamma_2)+\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1]^2}{4(\delta_1^2-\gamma_1^2+\alpha_1\beta_1)(\delta_2^2-\gamma_2^2+d_2\beta_2)},\ \text{т. е. } \operatorname{ch}^2\varphi=\tau \text{ или}$$

$$\operatorname{ch}\varphi=\sqrt{\tau}=\sqrt{\frac{xy+yx}{4\,xy}}.$$

9. ИЗОМЕТРИЧЕН МОДЕЛ НА ДВУОСНОТО ЕЛИПТИЧНО ПРОСТРАНСТВО ВЪРХУ ЕВКЛИДОВА РАВНИНА

Нека равнината на изображението π да е една евклидова равнина, а абсолютните прави f и g на двуосното елиптично пространство да минават през цикличните ѝ точки F и G.

Точките от пространството проектираме с помощта на абсолютната конгруенция прави. Произволна неособена права a се проектира с помощта на квадратична праволинейна повърхнина $H(a)$, минаваща през правите f, g и a и следователно образът ѝ е крива от втора степен, минаваща през точките F и G, т. е. в окръжност a. Окръжността a е образ на всички образуващи на квадриката $H(a)$, от системата образуващи на която принадлежи a. За да изберем точно една от тези образуващи, отбелязваме и стъпката M^a на правата a в равнината π. Така, съпоставяйки на произволна права a окръжността $\bar{a}$ с точката M^a върху нея, получаваме еднозначно обратимо съответствие между неособените прави в пространството и окръжностите в π с избрани точки върху тях. Правите, пресичащи правата $FG=U_\infty$, т. е. евклидово успоредни на π, се изобразяват в окръжности, които се разпадат на двойка прави, от които едната права е U_∞, с точка върху нея, а другата е крайна права. Правите от абсолютната конгруенция се изобразяват в точки.

Нека (a, M^a) и (b, M^b) са изображенията на две произволни неособени прави. Както е показано в т. 5, ъгълът между сфероидите $H(a)$ и $H(b)$, въведени с дефиниция 1, т. 2, е равен на ъгъла между окръжностите a и b. Това означава, че ъгълът между окръжностите

a и b е равен на ъгъла, въведен с дефиниция 2, т. 2, между правите a и b. Следователно построеният модел на пространството от прави е изометричен с пространството в смисъл, че образите на две прави сключват ъгъл, равен на ъгъла между самите прави. Да отбележим накрая, че ъгълът между две прави, въведен от Норден, в същия модел е равен на ъгъла между допирателните към окръжностите $\bar{a}$ и b, построени в точките им M^a и M^b.

ЛИТЕРАТУРА

1. Норден, А. Д.: Пространство линейной конгруэнции. Матем. сб., т. 24 (66), № 3, (1949), 428—455.
2. Тефова, Е. Л.: Модель биаксиального пространства на евклидовой плоскости. Уч. зап. Кабардино-Балкарского у-та, серия физ.-мат., вып. 24 (1965), 247—261.
3. Лангов, А., Пачев, Х.: Успоредно проектиране в двуосното хиперболично пространство. Изв. на Мат. инст. БАН, 14 (1973), 137—147.
4. Станилов, Г.: Основни формули на интегралната геометрия на двуосното пространство. Изв. на Мат. инст. БАН, 10 (1969), 85—111.
5. Станилов, Г.: Интегральные инварианты множеств пар прямых в биаксиальном пространстве. Analele ştiinţifice ale universităţii din Iaşi. s. 1, M., Tomul XIII, (1967), fasc. 1, 89—94.

Постъпила на 22. XI. 1973 г.

EINFÜHRUNG DER WINKELMETRIK IM ZWEIACHSIGEN RAUM VERMITTELS DES WINKELS ZWISCHEN ZWEI SPHÄROIDEN

A. Langow

(ZUSAMMENFASSUNG)

A. Norden definiert den Winkel zwischen zwei Geraden im zweiachsigen Raum als eine Invariante von zwei linearen Komplexen, die die absolute Geradenkongruenz enthalten. In der vorliegenden Arbeit führt man den Begriff „Winkel zwischen zwei Sphäroiden" ein. Das ist eine Invariante der Sphäroiden bezüglich der Gruppe der zweiachsigen Kollineationen. Man drückt diese Invariante aus vermittels des Doppelverhältnisses der Tangentialebenen der beiden Sphäroiden in einem von ihren Schnittpunkten und der isotropen Ebenen, die durch diesen Punkt gehen. Es wird bewiesen, dass dieses Doppelverhältnis für jeden Punkt der Schnittgeraden der Sphäroiden gleich ist.

Man nennt Winkel zwischen zwei Geraden den Winkel zwischen den Sphäroiden, die durch diese Geraden gehen.

Der Winkel zwischen zwei Geraden a und b ist durch die Grundinvarianten dieses Paares im zweiachsigen Raum ausgedrückt, d. h. dieser Winkel ist durch das Doppelverhältnis auf den Geraden, die a, b und die

Absolutgeraden schneiden, ausgedrückt. Es wird bewiesen, dass die Geraden im Raum, die einen bestimmten Winkel mit einer gegebenen Geraden einschliessen, einen quadratischen Komplex bilden.

Der Winkel zwischen zwei Sphäroiden wird analytisch durch die Koeffizienten der Gleichungen der beiden Sphäroiden ausgedrückt.

Man projiziert vermittels der absoluten Kongruenz von Geraden und konstruiert ein Modell des elliptischen zweiachsigen Raumes. In diesem Modell werden die Geraden durch Kreise mit einem Punkt dargestellt, der auf ihnen fixiert ist. Dieses Modell ist isometrisch zu dem Raum von Geraden, d. h. der Winkel zwischen den Kreisen, die die Geraden darstellen, ist gleich dem Winkel zwischen den Geraden im Raum.