О ПОДПОЛУГРУППАХ ИДЕМПОТЕНТОВ ПОЛУГРУППЫ ПОЧТИ ТОЖДЕСТВЕННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ И ИХ ПОРЯДКОВЫХ ЧИСЛАХ

Калчо Ж. Тодоров

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

На первом Всесоюзном симпозиуме по теории полугрупп Б. М. Шайном была поставлена следующая задача ([2], задача 46): какие числа могут служить порядками подполугрупп полугруппы всех преобразований множества из n элементов? Частичный ответ этому вопросу для подполугрупп идемпотентов симметрической полугруппы дан автором в работе [3]. В связи с результатами этой работы возникает следующий вопрос: существует ли полугруппа преобразований множества X (минимальной мощностью), содержащая полугруппы идемпотентов любого конечного порядка? В работе показано (§§ 2 и 3), что полугруппа почти тождественных преобразований счетного множества содержит полугруппы идемпотентов любого конечного порядка, являющиеся соответственно полугруппами правых и левых нулей.

Припомним, что согласно [3] преобразование α множества X является идемпотентом тогда и только тогда, когда его ограничение на множестве $X\alpha$ есть тождественное преобразование (см. [1], задача 9 из § 1.1). Другими словами, если обозначим через $\pi_\alpha = \alpha_0 \alpha^{-1}$ ядерную эквивалентность на множестве X, то α является идемпотентом тогда и только тогда, когда $X\alpha$ пересекается с каждым классом эквивалентности множества X по $\mathrm{mod}\,\pi_\alpha$ точно по одному элементу (т. е. $X\alpha$ — „поперечное сечение“ разбиения π_α), являющимся неподвижной точкой этого преобразования.

Таким образом можно считать, что каждое преобразование α, являющееся идемпотентом, определяется парой $(\pi_\alpha, X\alpha)$, где компоненты π_α и $X\alpha$ связаны между собой вышеуказанным способом.

Пусть X любое бесконечное множество. Рассмотрим только те преобразования этого множества в себя, каждое из которых действительно перемещает лишь некоторое конечное, хотя, быть может, произвольно большое число символов. Такие преобразования называют почти тождественными, а их совокупность полугруппой почти тождественных преобразований множества X. Если положим

$$D_\alpha = \{\bar{x} : (\bar{x} \in X/\pi_\alpha : |\bar{x}| \geqq 2)\},$$

то, очевидно, преобразование α является почти тождественным тогда и только тогда, когда D_α конечное.

Условимся те идемпотенты α, для которых множество D_α состоит из одного элемента $x(\in X/\pi_\alpha)$ и $x\alpha = a$, записывать в виде

$$\alpha = (xa .$$

Тогда, по аналогии с теорией симметрической группы, каждый идемпотент β такой, что

$$D_\beta = \{x_1, \ldots, x_n\},$$

можно представить в виде произведения идемпотентов вида α следующим образом

$$\beta = (x_1 a_1 \ldots (x_n a_n ,$$

где

$$\beta(x_i) = (x_i a_i , \ (x_i \beta = a_i, \ x_i \in D_\beta)$$

есть ограничение преобразования β на множестве x_i $(i = 1, \ldots, n)$.

Полугруппу почти тождественных преобразований множества X всюду дальше будем обозначать через A_X.

В терминологии теории полугрупп мы следуем книге [1].

§ 2. ПОЛУГРУППЫ ИДЕМПОТЕНТОВ, ЯВЛЯЮЩИЕСЯ ПОЛУГРУППАМИ ПРАВЫХ НУЛЕЙ

Под почти тождественным разбиением множества X будем понимать такое разбиение π_0, при котором множество

$$D_0 = \{x : (x \in X/\pi_0 : x \geq 2)\}$$

является конечным.

Совокупность A_0 всех идемпотентов полугруппы A_X таких, что их ядерные эквивалентности совпадают с π_0, будем называть совокупностью, соответствующей разбиению π_0.

Лемма 1. Пусть π_0 почти тождественное разбиение множества X и A_0 соответствующая ему совокупность идемпотентов. Тогда:

i) Любая подсовокупность совокупности A_0 является полугруппой правых нулей.

ii) Порядковое число полугруппы A_0 равно произведению чисел элементов всех неодноэлементных классов эквивалентности множества X по $\mathrm{mod}\,\pi_0$.

Доказательство. i) Доказательство следует непосредственно из следующих равенств: $(x_i \in D_0, \ i=1, \ldots, n)$

$$\alpha = (x_1 a_1 \ldots (x_n a_n ,$$

$$\beta = (x_1 b_1 \ldots (x_n b_n ,$$

$$(\bar{x}_i a_i | (\bar{x}_j b_j | = (\bar{x}_j b_j | (\bar{x}_i a_i |, \text{ если } i \neq j;$$

$$(\bar{x}_i a_i | (\bar{x}_i b_i | = (\bar{x}_i b_i | \quad (i = 1, \ldots, n).$$

ii) Утверждение справедливо ввиду того, что $X\alpha$ ($\alpha \in A_0$) является „поперечным сечением" разбиения π_0.

Теорема 1. Каждое натуральное число может быть порядковым числом подполугруппы идемпотентов полугруппы почти тождественных преобразований.

Доказательство. Числу

$$\omega = p_1^{k_1} \ldots p_m^{k_m},$$

где $p_1, \ldots, p_m$ — простые, а $k_1, \ldots, k_m$ — натуральные числа, сопоставим разбиение π_0, состоящее из $k_1, \ldots, k_m$ неодноэлементных классов по $\mathrm{mod}\,\pi_0$, каждый из которых имеет соответственно $p_1, p_2, \ldots, p_m$ элементов из множества X, а все остальные классы разбиения π_0 одноэлементные. Согласно лемме 1*ii*) число ω будет порядковым числом полугруппы идемпотентов A_0, соответствующей разбиению π_0.

§ 3. ПОЛУГРУППЫ ИДЕМПОТЕНТОВ, ЯВЛЯЮЩИЕСЯ ПОЛУГРУППАМИ ЛЕВЫХ НУЛЕЙ

Как было отмечено выше (§ 1), каждый идемпотент α определяется парой (π_α, X_α), где $X\alpha$ является „поперечным сечением" разбиения π_α. Полугруппы § 2 состоят из идемпотентов, ядерные эквивалентности которых совпадают.

Аналогичные результаты для случая идемпотентов α, имеющие одинаковые вторые проекции $X\alpha$, содежатся в этом параграфе.

Лемма 2. Пусть Y_1, Y конечные подмножества множества X таких, что $Y_1 \subset Y$, $Y_1 \neq Y$ и B_1 совокупность идемпотентов β полугруппы A_X таких, что

$$X\beta = Y_1 \cup (X \setminus Y).$$

Тогда:

i) Любая подсовокупность совокупности B_1 является полугруппой левых нулей.

ii) Число m^{n-m}, где $m = |Y_1|$ и $n = |Y|$, является порядковым числом полугруппы B_1.

Доказательство. i) Предположим, что

$$Y_1 = \{a_1, \ldots, a_m\}; \quad \alpha, \beta \in B_1,$$

$$D_\alpha = \{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m\},$$

$$D_\beta = \{\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_m\}, \quad (\bar{x}_i \in Y/\pi_\alpha, \bar{y}_i \in Y/\pi_\beta),$$

т. е. что

$$\alpha = (x_1 a_1 \ \ldots (x_m a_m \ ,$$

$$\beta = (y_1 a_1 \ \ldots (y_m a_m \ .$$

Тогда доказательство следует непосредственно из равенств

$$(x_i a_i \ (y_j a_j \ = (y_j a_j \ (x_i a_i \ , \text{ если } i \neq j$$

и

$$(x_i a_i \ (y_j a_j \ = (x_i a_i \ , \text{ если } i = j.$$

ii) Доказательство следует непосредственно из факта, что элементы множества Y_1 являются неподвижными точками идемпотентов из B_1, а все элементы множества $Y \setminus Y_1$ „приклеиваются" к любому из них.

Непосредственно из доказательства леммы вытекает следующее

Следствие. Каждое число ω, удовлетворяющее неравенство

$$1 \leqq \omega \leqq m^{n-m},$$

где m, n натуральные числа и $m < n$, является порядковым числом некоторой подполугруппы полугруппы почти тождественных преобразований.

В заключение работы отметим, что все утверждения верны, если множество X счетное. Схемы доказательств лемм 1 и 2 позволяют утверждать, что полугруппа A_X содержит и полугруппы идемпотентов как счетной мощности, так и мощности континуума.

ЛИТЕРАТУРА

1. Клиффорд, А., Престон, Г.: Алгебраическая теория полугрупп. „Мир", М., 1972.
2. Свердловская тетрадь (Нерешенные задачи теории полугрупп). Свердловск, 1969.
3. Тодоров, К. Ж.: О подполугруппах идемпотентов полугруппы преобразований конечного множества и их порядковых числах (в печати).

Постъпила на 23. XI. 1973 г.

ON SUBSEMIGROUPS OF IDEMPOTENTS OF THE SEMIGROUP OF THE ALMOST IDENTICAL TRANSFORMATIONS AND THEIR ORDINAL NUMBERS

K. J. Todorov

(SUMMARY)

The paper contains a positive answer to the following question: is there a semigroup of transformations of a set (with a minimal power) containing a semigroup of idempotents of an arbitrary finite order. The semigroup of the almost identical transformations of a countable set possesses semigroups of idempotents of finite order, which are respectively the semigroups of the right and of the left zeroes.