ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ВЫПУКЛЫХ КРИВЫХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ КРИВЫМИ

Васил А. Попов

ВВЕДЕНИЕ

Приближение кривых в плоскости полиномиальными кривыми в метрике Хаусдорфа рассматривалось в [1] — [3]. В [1], [2] показано, что если кривая Γ имеет конечную длину l, ее наилучшее приближение $E_n(\Gamma)_r$ полиномиальными кривыми n-ой степени в метрике Хаусдорфа удовлетворяет

$$E_n(\Gamma)_r \leqq \frac{\pi l}{2(n+1)} \tag{1}$$

и это неравенство нельзя улучшить по порядку в классе Γ_l всех кривых длины l; точнее существует константа $c>0$ такая, что

$$c\,\frac{l}{n+1} \leqq \sup_{\Gamma\in\Gamma_l} E_n(\Gamma)_r. \tag{2}$$

В [3] показано, что для каждой отдельной спрямляемой кривой Γ неравенство (1) можно улучшить:

$$E_n(\Gamma)_r = o(1/n), \tag{3}$$

но можно показать, что для каждой последовательности $\{\varepsilon_n\}_1^\infty$, $\varepsilon_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, существует спрямляемая кривая Γ и подпоследовательность $\{\varepsilon_{n_k}\}$, для которых имеет место

$$E_{n_k}(\Gamma)_r \geqq \frac{\varepsilon_{n_k}}{n_k}.$$

Но если рассматриваем выпуклые кривые конечной длины, то оказывается, что (1) можно улучшить: как будет показано ниже, в этом случае $E_n(\Gamma)_r = O(\ln^2 n/n^2)$.

Заметим, что наряду с хаусдорфовым приближением можно рассматривать также параметрическое приближение, т. е. если кривая Γ имеет параметрическое представление $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, то можно приближать равномерно $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ алгебраическими многочленами n-ой

степени и потом взять inf по всем параметрическим представлениям кривой Γ.

Очевидно при этом, что хаусдорфовое приближение всегда меньше либо равно параметрическому. Отметим, что по существу в [2] и [3] были доказаны оценки типа (1) — (3) для параметрического приближения и отсюда были получены те же самые оценки для хаусдорфового приближения.

Поэтому мы будем сразу рассматривать параметрическое приближение.

В первом параграфе работы приведены используемые означения и определения и доказаны некоторые вспомогательные утверждения.

Во втором параграфе получаем основной результат: параметрическое приближение $E_n(\Gamma)$ выпуклой кривой конечной длины полиномиальными кривыми n-ой степени удовлетворяет

$$E_n(\Gamma) = O\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right)$$

(и, следовательно, то же самое неравенство удовлетворяет и наилучшее приближение $E_n(\Gamma)_r$ в метрике Хаусдорфа).

В последнем, третьем параграфе показано, что в совокупности K_l всех выпуклых кривых длины l параметрическое приближение $E_n(\Gamma)$ не может быть лучше чем $1/n^2$:

$$\sup_{\Gamma \in K_l} E_n(\Gamma) \geqq c/n^2,$$

где c — абсолютная постоянная.

§ 1. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ. ЛЕММЫ

Пусть Γ — кривая в плоскости. Обозначим через $\Gamma(t)$ множество всех параметрических представлений кривой Γ, $t \in [0,1]$, т. е. $\Gamma(t)$ состоит из пар функций $(\varphi(t), \psi(t))$ таких, что $\Gamma = \{(x, y): x = \varphi(t), y = \psi(t), 0 \leqq t \leqq 1\}$.

Через $H_n(t)$ обозначим множество всех полиномиальных кривых n-ой степени, т. е. $\gamma \in H_n(t)$, если

$$\gamma = \{(x, y): x = p(t), y = q(t); p(t) \in H_n, q(t) \in H_n, t \in [0,1]\},$$

где через H_n обозначена совокупность всех алгебраических многочленов n-ой степени.

Будем говорить, что ограниченная кривая θ в плоскости является ломаной n-ого порядка, если существуют n отрезков $A_i A_{i+1}$, $i = 1, \ldots, n$, такие, что $\theta = \bigcup_{i=1}^{n} A_i A_{i+1}$. Точки A_i, $i = 1, \ldots, n+1$ будем называть вершинами ломаной θ.

Множество всех ломаных n-ого порядка обозначим через L_n. Ломаная θ называется вписанной в кривой Γ, если вершины ломаной θ лежат на Γ.

Если кривая Γ имеет параметрическое представление $\Gamma=\{(x, y): x=\varphi(t), y=\psi(t), 0\leqq t\leqq 1\}$, то коротко будем писать $\Gamma=(\varphi(t), \psi(t))=(\varphi, \psi)$.

Будем рассматривать следующие наилучшие приближения ограниченной кривой Γ:

Наилучшее параметрическое приближение кривой Γ ломаными n-ого порядка:

$$\varepsilon_n(\Gamma)=\inf_{(\varphi,\psi)\in\Gamma(t)} \max\{\ \varphi-f\ ,\ \ \psi-g\ \},$$
$$\theta=(f, g)\in L_n,$$

где
$$\varphi-f=\sup_{t\in[0,1]} f(t)-\varphi(t).$$

Наилучшее параметрическое приближение кривой Γ полиномиальными кривыми n-ой степени:

$$E_n(\Gamma)=\inf_{\substack{(\varphi,\psi)\in\Gamma(t)\\ p\in H_n,\ q\in H_n}} \max\{\ \varphi-p\ \},\ \ \psi-q\ \}.$$

Наилучшее хаусдорфовое приближение кривой Γ ломаными n-ого порядка:

$$\varepsilon_n(\Gamma)_r=\inf_{\theta\in L_n} r(\Gamma, \theta),$$

где $r(\Gamma, \theta)$ — хаусдорфовое расстояние между кривыми Γ и θ:

$$r(\Gamma, \theta)=\inf_{\Gamma\subset\theta^\alpha,\ \theta\subset\Gamma^\alpha} \alpha,$$

где через Γ^α и θ^α обозначены α-окрестности кривых Γ и θ относительно евклидового расстояния между точками в плоскости.

Наилучшее хаусдорфовое приближение кривой Γ полиномиальными кривыми n-ой степени:

$$E_n(\Gamma)_r=\inf_{P\in H_n(t)} r(\Gamma, P).$$

Очевидно

$$\varepsilon_n(\Gamma)_r\leqq\varepsilon_n(\Gamma),$$
$$E_n(\Gamma)_r\leqq E_n(\Gamma).$$

В [4] доказана следующая теорема:

Теорема 1. Пусть Γ — выпуклая кривая длины l. Тогда для каждого натурального n существует вписанная в Γ ломаная n-ого порядка θ_n такая, что

$$r(\Gamma, \theta_n)\leqq\frac{l}{2n}\sin\frac{\pi}{n}. \tag{4}$$

Из теоремы 1 сразу следует, что

$$\varepsilon_n(\Gamma)_r = O(1/n^2).$$

При помощи теоремы 1 получим

Теорема 2. Пусть Γ — выпуклая кривая конечной длины l. Тогда

$$\varepsilon_n(\Gamma) = O(1/n^2)$$

или точнее существует вписанная в Γ ломаная θ_n n-ого порядка, $\theta_n = (f, g)$, и $(\varphi, \psi) \in \Gamma(t)$ такие, что

$$\max\{\|\varphi - f\|, \|\psi - g\|\} \leqq \frac{l}{2n} \sin\frac{\pi}{n}.$$

При этом можно считать, что соответствия $t \to \{\varphi(t), \psi(t)\}$ и $t \to \{f(t), g(t)\}$ взаимно однозначные для $0 \leqq t \leqq 1$ (для $0 \leqq t < 1$, если Γ — замкнута).

Доказательство. Рассмотрим вписанную в Γ ломаную θ_n n-ого порядка, для которой имеет место (4). Пусть A_i, $i = 1, \ldots, n+1$ — вершины ломаной θ_n (если θ_n — замкнута, то $A_1 = A_{n+1}$). Пусть теперь $\theta_n = (f(t), g(t))$ и $A_i = (f(t_i), g(t_i))$, и соответствие $t \to \{f(t), g(t)\}$ $0 \leqq t \leqq 1$ — взаимнооднозначное (если θ_n — замкнутая, только для $0 \leqq t < 1$).

Рассмотрим дугу $\overset{\frown}{A_iA_{i+1}}$ кривой Γ между точками A_i и A_{i+1}. В силу выпуклости Γ и (4) каждая точка $A \in \overset{\frown}{A_iA_{i+1}}$ находится на расстоянии $\leqq \frac{l}{2n} \sin\frac{\pi}{n}$ от отрезка A_iA_{i+1}. Обозначим через $\sigma(A)$ проекцию точки A на A_iA_{i+1}. Точка $\sigma(A)$ — ближайшая точка отрезка A_iA_{i+1} к точке A. Соответствие $\overset{\frown}{A_iA_{i+1}} \xrightarrow{\sigma} A_iA_{i+1}$ — взаимно однозначное. Пусть функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ определяются через $(\varphi(t), \psi(t)) = \sigma^{-1}(f(t), g(t))$, $0 \leqq t \leqq 1$.

Тогда $\Gamma = (\varphi(t), \psi(t))$, т. е. $(\varphi, \psi) \in \Gamma(t)$ и кроме того очевидно

$$\max\{\|\varphi(t) - f(t)\|, \|\psi(t) - g(t)\|\} \leqq \delta = \frac{l}{2n} \sin\frac{\pi}{n}.$$

Этим теорема доказана.

§ 2. ВЕРХНЯЯ ОЦЕНКА ДЛЯ E_n (Г), ЕСЛИ Г — ВЫПУКЛАЯ КРИВАЯ

Следующая лемма будет основная:

Лемма 1. Пусть θ — ломаная m-ого порядка длины l. Тогда для любых натуральных n и k, $n > k$, имеет место

$$E_n(\theta) \leqq \frac{l}{m}\left(\frac{ckm}{n}\right)^k,$$

где c — абсолютная постоянная.

Доказательство. Пользуясь параметрическим представлением ломаной θ через ее длину, легко можно получить, что существует параметрическое представление $\theta=\{x(t),\ y(t),\ 0\leqq t\leqq 1\}$, где функции $x(t)$ и $y(t)$ удовлетворяют следующим условиям: существуют $2m+1$ точек t_i, $i=0,\ldots,\ 2m$, $0=t_0<t_1<\ldots<t_{2m}=1$, интервала $[0,1]$ такие, что

а) в интервале $[t_i,\ t_{i+1}]$, $i=0,\ldots,\ 2m-1$, функции $x(t)$ и $y(t)$ линейные и удовлетворяют условию Липшица с константой $\leqq l$, т. е.

$$|x(t)-x(t')|\leqq l\,|t-t'|,\quad |y(t)-y(t')|\leqq l\,|t-t'|,$$

б) $t_{i+1}-t_i\leqq\frac{1}{m},\quad i=0,\ldots,\ 2m-1$

(именно для выполнения условия б) мы увеличили число узлов t_i от $m+1$ на $2m+1$).

Положим:

$$t_{ij}=\frac{i}{2m}+\frac{j}{2km},\qquad \begin{matrix}j=0,1,\ldots,\ k,\\ i=0,1,\ldots,\ 2m-1,\end{matrix}$$

$$\varphi_i(t)=\sum_{j=0}^{k}{}'\frac{k\,(t_{ij}-t)_+^{k-1}}{\omega_i'(t_{ij})},$$

где $\omega_i(t)=\prod_{j=0}^{k}(t-t_{ij})$;

$$(x-t)_+^{k-1}=\begin{cases}(x-t)^{k-1}, & \text{если}\quad x>t;\\ 0, & \text{если}\quad x\leqq t.\end{cases}$$

Функции $\varphi_i(t)$ являются сплайн-функциями $k-1$-вой степени [5].

Из [5], стр. 258, следует, что $\varphi_i(t)>0$ для $t\in(t_{i0},\ t_{ik})$, $\varphi_i(t)=0$ для $t\notin(t_{i0},\ t_{ik})$ и кроме того

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_i(t)dt=1.$$

Функции $\varphi_i(t)$ являются $k-2$ раза дифференцируемыми и $\varphi_i^{(k-2)}(t)$ удовлетворяют условию Липшица с константой

$$M=(2k\,m)^k.$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi(t)=\int_0^t\sum_{i=0}^{2m-1}{}'(t_{i+1}-t_i)\,\varphi_i(t)\,dt.$$

Очевидно $\varphi(t)$ — неубывающая функция, $\varphi(0)=0$, $\varphi(1)=1$, и кроме того $\varphi(t_{i0})=t_i$, $i=0,1,\ldots,\ 2m-1$.

Так как $$\varphi_i(t_{i0}) = \ldots = \varphi_i^{(k-2)}(t_{i0}) = 0,$$

$$\varphi_i(t_{ik}) = \ldots = \varphi_i^{(k-2)}(t_{ik}) = 0,$$

то функции $x(\varphi(t))$ и $y(\varphi(t))$ являются $k-1$ раз дифференцируемыми функциями на отрезке $[0,1]$ и их $k-1$-вые производные $(x(\varphi(t)))^{(k-1)}$ и $(y(\varphi(t)))^{(k-1)}$ удовлетворяют условию Липшица с константой $\frac{l}{m}(2km)^k$.

Из теоремы Джексона (см. напр. [6]) следует, что существуют алгебраические многочлены $p_n(t)$ и $q_n(t)$ n-ой степени такие, что

$$(5)\qquad \max_{t\in[0,1]} |x(\varphi(t)) - p_n(t)| \leqq \frac{lc^k}{m}\left(\frac{2km}{n}\right)^k,$$

$$\max_{t\in[0,1]} |y(\varphi(t)) - q_n(t)| \leqq \frac{lc^k}{m}\left(\frac{2km}{n}\right)^k,$$

где c — абсолютная постоянная.

Из (5) следует утверждение леммы.

Докажем теперь:

Теорема 3. Пусть Γ — выпуклая кривая конечной длины l. Тогда

$$E_n(\Gamma) = O(l \cdot \ln^2 n/n^2).$$

Доказательство. Пусть $\Gamma = (\varphi(t), \psi(t))$. В силу теоремы 2 существует вписанная в Γ ломаная θ_m m-ого порядка, $\theta_m = (f(t), g(t))$, такая, что

$$(6)\qquad \max\{|\varphi - f|, |\psi - g|\} \leqq \frac{l}{2m}\sin\frac{\pi}{m}$$

и соответствия $t \to (\varphi(t), \psi(t))$, $t \to (f(t), g(t))$, $0 \leqq t \leqq 1$ — взаимно однозначные (для $0 \leqq t < 1$, если Γ — замкнутая).

По лемме 1 существуют алгебраические многочлены $p_n(t)$ и $q_n(t)$ n-ой степени и параметрическое представление ломаной $\theta_m : \theta_m = (x(t), y(t))$, такие, что

$$(7)\qquad \max\{|x - p_n|, |y - q_n|\} \leqq \frac{l}{m}\left(\frac{2ckm}{n}\right)^k$$

для $n > k$, где c — абсолютная постоянная.

Тогда

$$(\varphi(f^{-1}(x(t))),\ \psi(g^{-1}(y(t))))$$

является элементом из $\Gamma(t)$, т. е. параметрическим представлением кривой Γ. При этом в силу (6) и (7)

$$
\begin{aligned}
&\| \varphi(f^{-1}(x(t)))-p_n(t) \| \leqq \| \varphi(f^{-1}(x(t)))-f(f^{-1}(x(t))) \| \\
&+\| f(f^{-1}(x(t)))-p_n(t) \| \leqq \frac{l}{2m} \sin \frac{\pi}{m}+\frac{l}{m}\left(\frac{2ckm}{n}\right)^k, \\
&\| \psi(g^{-1}(y(t)))-q_n(t) \| \leqq \| \psi(f^{-1}(x(t)))-f(f^{-1}(x(t))) \| \\
&+\| g(g^{-1}(g(t)))-q_n(t) \| \leqq \frac{l}{2m} \sin \frac{\pi}{m}+\frac{l}{m}\left(\frac{2ckm}{n}\right)^k.
\end{aligned} \tag{8}
$$

Полагая $m=\left[\frac{n}{2ckl}\right]$, $k=[\ln n]-1$, получаем $\frac{l}{2m} \sin \frac{\pi}{m}+\frac{l}{m}\left(\frac{2ckm}{n}\right)^k$

$$\leqq \tilde{c}\, l \ln^2 n/n^2,$$

где $\tilde{c}$ — абсолютная постоянная.

Следовательно (8) дает нам

$$\max\{\| \varphi(f^{-1}(x(t)))-p_n(t) \|, \| \psi(g^{-1}(y(t)))-q_n(t) \|\}=O\left(l \frac{\ln^2 n}{n^2}\right). \tag{9}$$

Из (9) следует теорема.

Отметим, что полученная оценка равномерна в классе K_l всех выпуклых кривых длины l.

Следствие. При предположении теоремы 3

$$E_n(\Gamma)_r=O(l \cdot \ln^2 n/n^2).$$

Сделаем сравнение полученного результата с приближением выпуклых функций рациональными функциями.

Г. Фройд [7] показал, что если выпуклая на отрезке [0,1] функция $f(t)$ удовлетворяет условию Липшица на [0,1], то ее наилучшее приближение $R_n(f)$ рациональными функциями n-ой степени относительно равномерного расстояния удовлетворяет

$$R_n(f)=O(\ln^2 n/n^2).$$

Заметим, что здесь при помощи двух многочленов n-ой степени числитель $p_n(t)$ и знаменатель $q_n(t)$, аппроксимируем $f(t)$ равномерно с точностью $\ln^2 n/n^2$.

При параметрическом приближении опять при помощи двух многочленов $x=p_n(t)$ и $y=q_n(t)$ получаем в некотором смысле равномерное приближение $f(t)$ с точностью $\ln^2 n/n^2$.

§ 3. НИЖНЯЯ ОЦЕНКА ДЛЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ В КЛАССЕ ВСЕХ ВЫПУКЛЫХ КРИВЫХ ДАННОЙ ДЛИНЫ

В этом параграфе мы докажем следующую теорему:

Теорема 4. Существует постоянная c_1 такая, что

$$\sup_{\Gamma\in K_l} E_n(\Gamma) \geqq \sup_{\Gamma\in K_l} E_n(\Gamma)_r \geqq l\,\frac{c_1}{n^2},$$

где через K_l обозначена совокупность всех выпуклых кривых длины не больше l.

Доказательство. Для каждого натурального n мы построим выпуклую кривую длины $\leqq l$, для которой параметрическое приближение полиномиальными кривыми n-ой степени будет больше чем $l\,c_1/n^2$.

Рассмотрим окружность σ радиуса R с центром в начале координат. Пусть $Q_{4n}' = A_1' \dots A_{4n}'$ — правильный $4n$-угольник, вписанный в окружности σ и $Q_{4n}'' = A_1'' \dots A_{4n}''$ — правильный $4n$-угольник, описанный около окружности σ со сторонами, параллельными сторонам Q_{4n}'. Прямые $A_i'A_{i+1}'$ и $A_i''A_{i+1}''$ находятся на расстоянии $R\left(1-\cos\frac{\pi}{4n}\right)$. Пусть $Q_{4n} = A_1 \dots A_{4n}$ — правильный $4n$-угольник со сторонами параллельными сторонам Q_{4n}' и Q_{4n}'' такой, что прямая A_iA_{i+1} находится на середине между прямыми $A_i'A_{i+1}'$ и $A_i''A_{i+1}''$ (на расстоянии $\frac{R}{2}\left(1-\cos\frac{\pi}{4n}\right)$ от них).

Допустим теперь, что

$$E_n(Q_{4n})_r < \frac{R}{2}\left(1-\cos\frac{\pi}{4n}\right).$$

Тогда существуют алгебраические многочлены $p_n(t)$ и $q_n(t)$ n-ой степени такие, что полиномиальная кривая $\gamma = \{(p_n(t), q_n(t)),\ t\in[0,1]\}$ находится внутри полосы, заключенной $4n$-угольниками Q_{4n}' и Q_{4n}''. Отсюда сразу следует, что γ имеет $4n$ различные общие точки с окружностью σ, т. е. существуют $4n$ числа t_i, $i=1,\dots,4n$, $0\leqq t_i\leqq 1$, $t_i\neq t_j$ при $i\neq j$, такие, что

$$p_n^2(t_i)+q_n^2(t_i)=R^2,\ i=1,\dots,4n.$$

Но это означает, что алгебраический многочлен степени не выше $2n$

$$p_n^2(t)+q_n^2(t)-R^2$$

имеет $4n$ различные нули, т. е. получаем противоречие.

Следовательно,

$$E_n(Q_{4n})_r \geqq \frac{R}{2}\left(1-\cos\frac{\pi}{4n}\right) \geqq 8R\,\frac{c_1}{n^2}.$$

Этим теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сендов, Бл.: Апроксимиране на точкови съвокупности с полиномиални криви в равнината. Год. на Соф. Унив., Мат. фак., **60** (1965/66), 211—222.
2. Сендов, Бл.: Некоторые вопросы теории приближения функции и множеств в хаусдорфовой метрике. УМН, XXIV (1969), № 5, 143—178.
3. Сендов, Бл., Попов В. А.: Апроксимация кривых в плоскости полиномиальными кривыми. Докл. БАН, **23**, № 6 (1970), 639—642.
4. Попов, В. А.: Апроксимиране на изпъкнали множества. Изв. на Мат. инст. БАН, XI (1970), 67—80.
5. Schöenberg, I. J.: On spline functions, Inequalities. New York — London, 1967, 255—292.
6. Натансон, И. П.: Конструктивная теория функций. Москва, 1949.
7. Freud, G.: Über die Approximation reeller Funktionen durch rationale gebrochene Funktionen. Acta Math. Acad. Sci. Hung., **17** (1966), 313—324.

Постъпила на 23. XI. 1973 г.

PARAMETRIC APPROXIMATION OF CONVEX CURVES BY MEANS OF POLYNOMIAL CURVES

V. A. Popov

(SUMMARY)

Let us denote by $\Gamma(t)$ the set of all parametric representations of the plane curve Γ, $t \in [0,1]$, i. e. $\Gamma(t)$ consists of the couples (φ, ψ) for which

$$\Gamma = \{(x, y): x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ 0 \leqq t \leqq 1\}.$$

The best parametric approximation $E_n(\Gamma)$ of the plane curve Γ by polynomial curves of n^{th} degree is defined by

$$E_n(t) = \inf_{\substack{(\varphi,\psi)\in\Gamma(t)\\ p\in H_n,\ q\in H_n}} \max\{\ \varphi - p\ ,\ \psi - q\ \}$$

where $\varphi - p = \sup_{t\in[0,1]} \varphi(t) - p(t)$ and H_n denotes the set of all algebraic polynomials of n^{th} degree.

Let K_l be the set of all convex curves with a length $\leqq l$. The following result is obtained:

$$c_1 l \frac{1}{n^2} \leqq \sup_{\Gamma\in K_l} E_n(\Gamma) \leqq c_2\ l \frac{\ln^2 n}{n^2}$$

where c_1 and c_2 are absolute constants.