БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ИЗГИБАНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ГАУССОВОЙ КРИВИЗНЫ ПРИ ЗАДАННЫХ ВАРИАЦИЯХ НЕКОТОРЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

Стефка Т. Хинева

Пусть $\Phi \in C^4$ односвязная поверхность отрицательной гауссовой кривизны, которая ограничена двумя асимптотическими линиями l_1 и l_2, исходящими из одной точки, и произвольной кривой g, которая нигде не касается асимптотических направлений.

Т. Минагава и Т. Радо [5] доказали, что если такую поверхность закрепить вдоль асимптотических линий или вдоль линии g, то поверхность станет жесткой.

В данной работе доказано, что поверхность Φ допускает бесконечно малые изгибания, в процессе которых вдоль кривой g сохраняются главные направления на поверхности, а вариация средней кривизны поверхности вдоль кривой g (или вариация геодезического кручения кривой g, или вариация кривизны кривой g) является произвольной наперед заданной функцией, отличной от нуля. Если же потребовать, чтобы в процессе бесконечно малых изгибаний поверхности сохранялись вдоль линии g главные направления и средняя кривизна поверхности (или геодезическое кручение кривой g, или кривизна кривой g), то поверхность станет жесткой.

§ 1. БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ИЗГИБАНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ ПРИ ЗАДАННОЙ ВАРИАЦИИ СРЕДНЕЙ КРИВИЗНЫ

Теорема 1. 1. Пусть $\Phi \in C^4$ односвязная поверхность отрицательной гауссовой кривизны, которая ограничена двумя асимптотическими линиями l_1 и l_2, исходящими из одной точки, и регулярной линией g, которая нигде не касается асимптотических направлений. Тогда поверхность Φ допускает нетривиальные бесконечно малые изгибания, в процессе которых вдоль кривой g сохраняются главные направления на поверхности, а вариация средней кривизны поверхности вдоль кривой g является произвольной наперед заданной функцией $\varphi(u, v)\big|_g \neq 0$. Поверхность Φ становится жесткой по отношению к бесконечно малым изгибаниям, сохраняющим вдоль кривой g главные направления и среднюю кривизну поверхности.

Доказательство. Отнесем поверхность Ф к линиям кривизны. Тогда

$$F=0,\ M=0 \tag{1.1}$$

и основная система бесконечно малых изгибаний поверхности примет вид

$$\begin{cases} L\gamma+N\beta=0, \\ \alpha_v-\gamma_u=\Gamma^1_{11}\gamma-2\Gamma^1_{12}\alpha+\Gamma^1_{22}\beta, \\ \alpha_u-\beta_v=\Gamma^2_{11}\gamma-2\Gamma^2_{12}\alpha+\Gamma^2_{22}\beta. \end{cases} \tag{1.2}$$

Из первого уравнения системы (1.2), учитывая, что $LN-M^2=LN<0$, определяем:

$$\gamma=-\frac{N}{L}\beta=\left|\frac{N}{L}\right|\beta. \tag{1.3}$$

Подставляя это выражение во второе и третье уравнения системы (1.2), получаем следующую систему уравнений для определения функций $\alpha(u, v)$ и $\beta(u, v)$:

$$\begin{gathered} \alpha_u-\beta_v=-2\Gamma^2_{12}\alpha+\left(\Gamma^2_{22}-\frac{N}{L}\Gamma^2_{11}\right)\beta, \\ \alpha_v-\left|\frac{N}{L}\right|\beta_u=-2\Gamma^1_{12}\alpha+\left(\Gamma^1_{22}-\frac{N}{L}\Gamma^1_{11}-\left(\frac{N}{L}\right)_u\right)\beta. \end{gathered} \tag{1.4}$$

Для того, чтобы система (1.4) описывала бесконечно малые изгибания, в процессе которых вдоль кривой g сохраняются главные направления на поверхности, а вариация средней кривизны поверхности вдоль кривой g является наперед заданной функцией $\varphi(u, v)\big|_g$, необходимо и достаточно (см. работу [4]), чтобы функции $\alpha(u, v)$ и $\beta(u, v)$ удовлетворяли условиям

$$\alpha(u, v)\big|_g=0, \tag{1.5}$$

$$\left.\frac{\left(-E\frac{N}{L}+G\right)\beta(u,v)}{2W}\right|_g=\varphi(u, v)\big|_g, \tag{1.6}$$

где через W обозначено $\sqrt{EG-F^2}$.

Так как коэффициенты E, G первой квадратичной формы всегда положительны, а коэффициенты второй квадратичной формы L, N имеют противоположные знаки ($LN<0$), то

$$-EN+LG\neq 0. \tag{1.7}$$

Учитывая (1.7), из (1.6) получаем

$$\beta(u, v)|_g = \frac{2WL}{-EN+GL}\,\varphi(u, v)|_g. \tag{1.8}$$

I. Пусть $\varphi(u, v)|_g \neq 0$.

Пусть кривая g на поверхности Ф задана уравнением

$$u = \psi(v). \tag{1.9}$$

Тогда равенство (1.8) запишется так:

$$\beta(u, v)|_g = \theta(v), \tag{1.10}$$

где через $\theta(v)$ обозначено

$$\theta(v) = \left.\frac{2WL\varphi}{-EN+GL}\right|_g.$$

Следовательно, чтобы доказать первую часть теоремы, достаточно доказать, что система (1.4) при краевых условиях (1.5), (1.10) имеет нетривиальное решение.

Отыскание решения системы (1.4), удовлетворяющего вдоль кривой g краевым условиям (1.5), (1.10), есть обобщенная задача Коши.

Приведем систему (1.4) к каноническому виду. Для этого достаточно сделать следующую замену неизвестных функций

$$Z_1 = \frac{\alpha + \sqrt{\frac{N}{L}}\,\beta}{\sqrt{1+\frac{N}{L}}},$$

$$Z_2 = \frac{\alpha - \sqrt{\frac{N}{L}}\,\beta}{\sqrt{1+\frac{N}{L}}}, \tag{1.11}$$

где величины $\sqrt{\frac{N}{L}}$, $-\sqrt{\frac{N}{L}}$ являются корнями характеристического уравнения системы (1.4). Характеристиками системы (1.4) являются линии, заданные уравнениями

$$\frac{dv}{du} = \pm\sqrt{\frac{L}{N}}.$$

На поверхности Ф им соответствуют асимптотические линии. Выражая из равенств (1.11) функции $\alpha(u, v)$ и $\beta(u, v)$ через $z_1(u, v)$ и $z_2(u, v)$ и подставляя их в (1.4), получаем:

$$
(1.12)\qquad
\begin{aligned}
Z_{1u} &= \sqrt{\frac{L}{N}}\; Z_{1v} + A_1 Z_1 + B_1 Z_2,\\
Z_{2u} &= -\sqrt{\frac{L}{N}}\; Z_{2v} + A_2 Z_1 + B_2 Z_2,
\end{aligned}
$$

где через A_1, B_1, A_2, B_2 обозначено

$$
A_1 = \frac{1}{2}\left\{ -\frac{\left(\sqrt{1+\frac{N}{L}}\right)_u}{\sqrt{1+\frac{N}{L}}} + \frac{\left(\sqrt{1+\frac{N}{L}}\cdot\sqrt{\frac{N}{L}}\right)_v}{\sqrt{1+\frac{N}{L}}} - 2\Gamma^2_{12}\right.
$$

$$
+\left(\Gamma^2_{22} - \Gamma^2_{11}\frac{N}{L}\right)\sqrt{\frac{L}{N}} - 2\Gamma^1_{12}\sqrt{\frac{L}{N}} + \left(\Gamma^1_{22} - \Gamma^1_{11}\frac{N}{L} - \left(\frac{N}{L}\right)_u\right)\frac{L}{N}
$$

$$
\left. - \frac{\left(\sqrt{1+\frac{N}{L}}\cdot\sqrt{\frac{L}{N}}\right)_v}{\sqrt{1+\frac{N}{L}}\cdot\sqrt{\frac{L}{N}}} + \frac{\left(\sqrt{1+\frac{N}{L}}\right)_v\sqrt{\frac{L}{N}}}{\sqrt{1+\frac{N}{L}}} \right\},
$$

$$
B_1 = \frac{1}{2}\left\{ -\frac{\left(\sqrt{1+\frac{N}{L}}\right)_u}{\sqrt{1+\frac{N}{L}}} - \frac{\left(\sqrt{1+\frac{N}{L}}\cdot\sqrt{\frac{L}{N}}\right)_v}{\sqrt{1+\frac{N}{L}}} - 2\Gamma^2_{12} - \left(\Gamma^2_{22} - \Gamma^2_{11}\frac{N}{L}\right)\sqrt{\frac{L}{N}}\right.
$$

$$
+ \frac{\left(\sqrt{1+\frac{N}{L}}\cdot\sqrt{\frac{L}{N}}\right)_v}{\sqrt{1+\frac{N}{L}}\cdot\sqrt{\frac{L}{N}}} + \frac{\left(\sqrt{1+\frac{N}{L}}\right)_v\sqrt{\frac{L}{N}}}{\sqrt{1+\frac{N}{L}}} - 2\Gamma^1_{12}\sqrt{\frac{L}{N}}
$$

$$
\left. - \left(\Gamma^1_{22} - \Gamma^1_{11}\frac{N}{L} - \left(\frac{N}{L}\right)_u\right)\frac{L}{N} \right\},
$$

$$
A_2 = \left\{ -\frac{\left(\sqrt{1+\frac{N}{L}}\right)_u}{\sqrt{1+\frac{N}{L}}} + \frac{\left(\sqrt{1+\frac{N}{L}}\cdot\sqrt{\frac{L}{N}}\right)_v}{\sqrt{1+\frac{N}{L}}} - 2\Gamma^2_{12} + \left(\Gamma^2_{22} - \Gamma^2_{11}\frac{N}{L}\right)\sqrt{\frac{L}{N}}\right.
$$

$$+\frac{\left(\sqrt{1+\frac{N}{L}}\cdot\sqrt{\frac{L}{N}}\right)_v}{\sqrt{1+\frac{N}{L}}\cdot\sqrt{\frac{L}{N}}}-\frac{\left(\sqrt{1+\frac{N}{L}}\right)_v\sqrt{\frac{L}{N}}}{\sqrt{1+\frac{N}{L}}}+2\Gamma_{12}^1\sqrt{\frac{L}{N}}$$

$$-\left(\Gamma_{22}^1-\Gamma_{11}^1\frac{N}{L}-\left(\frac{N}{L}\right)_u\right)\frac{L}{N}\Bigg\},$$

$$B_2=\frac{1}{2}\Bigg\{-\frac{\left(\sqrt{1+\frac{N}{L}}\right)_u}{\sqrt{1+\frac{N}{L}}}-\frac{\left(\sqrt{1+\frac{N}{L}}\cdot\sqrt{\frac{L}{N}}\right)_v}{\sqrt{1+\frac{N}{L}}}-2\Gamma_{12}^2-\left(\Gamma_{22}^2-\Gamma_{11}^2\frac{N}{L}\right)\sqrt{\frac{L}{N}}$$

$$-\frac{\left(\sqrt{1+\frac{N}{L}}\cdot\sqrt{\frac{L}{N}}\right)_v}{\sqrt{1+\frac{N}{L}}\cdot\sqrt{\frac{L}{N}}}-\frac{\left(\sqrt{1+\frac{N}{L}}\right)_v\sqrt{\frac{L}{N}}}{\sqrt{1+\frac{N}{L}}}+2\Gamma_{12}^1\sqrt{\frac{L}{N}}$$

$$+\left(\Gamma_{22}^1-\Gamma_{11}^1\frac{N}{L}-\left(\frac{N}{L}\right)_u\right)\frac{L}{N}\Bigg\}.$$

Принимая во внимание равенства (1.15), (1.10), из равенств (1.11) определяем

$$Z_1(\psi(v),v)=\frac{\sqrt{\frac{N(\psi(v),v)}{L(\psi(v),v)}}}{1+\sqrt{\frac{N(\psi(v),v)}{L(\psi(v),v)}}}\,\theta(v),$$

(1.13)

$$Z_2(\psi(v),v)=\frac{-\sqrt{\frac{N(\psi(v),v)}{L(\psi(v),v)}}}{1+\sqrt{\frac{N(\psi(v),v)}{L(\psi(v),v)}}}\,\theta(v).$$

Равенства (1.13) представляют собой краевые условия, при которых следует интегрировать систему (1.12). Сведем обобщенную задачу Коши — (1.12), (1.13) к обычной задаче Коши. Для этого введем новые независимые переменные ξ и η следующим образом

$$\xi = u - \psi(v), \qquad \eta = v. \tag{1.14}$$

Если положить

$$Z_1(u, v) = Z_1(\xi + \psi(\eta), \eta) = \bar{Z}_1(\xi, \eta), \qquad Z_2(u, v) = Z_2(\xi + \psi(\eta), \eta) = Z_2(\xi, \eta), \tag{1.15}$$

то рассматриваемая система (1.12) перейдет в систему

$$Z_{1\xi} = \lambda_1 \bar{Z}_{1\eta} + C_1 \bar{Z}_1 + D_1 Z_2, \qquad Z_{2\xi} = \lambda_2 Z_{2\eta} + C_2 Z_1 + D_2 Z_2, \tag{1.16}$$

где через λ_1, $\bar{\lambda}_2$, C_1, D_1, C_2, D_2 обозначено

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{\dfrac{L(\xi+\psi(\eta), \eta)}{N(\xi+\psi(\eta), \eta)}}}{1+\psi'(\eta)\sqrt{\dfrac{L(\xi+\psi(\eta), \eta)}{N(\xi+\psi(\eta), \eta)}}}, \quad \lambda_2 = \frac{-\sqrt{\dfrac{L(\xi+\psi(\eta), \eta)}{N(\xi+\psi(\eta), \eta)}}}{1+\psi'(\eta)\sqrt{\dfrac{L(\xi+\psi(\eta), \eta)}{N(\xi+\psi(\eta), \eta)}}},$$

$$C_1 = \frac{A_1(\xi+\psi(\eta), \eta)}{1+\psi'(\eta)\sqrt{\dfrac{L(\xi+\psi(\eta), \eta)}{N(\xi+\psi(\eta), \eta)}}}, \quad D_1 = \frac{B_1(\xi+\psi(\eta), \eta)}{1+\psi'(\eta)\sqrt{\dfrac{L(\xi+\psi(\eta), \eta)}{N(\xi+\psi(\eta), \eta)}}},$$

$$C_2 = \frac{A_2(\xi+\psi(\eta), \eta)}{1-\psi'(\eta)\sqrt{\dfrac{L(\xi+\psi(\eta), \eta)}{N(\xi+\psi(\eta), \eta)}}}, \quad D_2 = \frac{B_2(\xi+\psi(\eta), \eta)}{1-\psi'(\eta)\sqrt{\dfrac{L(\xi+\psi(\eta), \eta)}{N(\xi+\psi(\eta), \eta)}}}.$$

Поскольку кривая g нигде не касается асимптотических направлений, то

$$1 \pm \psi'(v)\sqrt{\frac{L(u, v)}{N(u, v)}} = 1 \pm \psi'(\eta)\sqrt{\frac{L(\xi+\psi(\eta), \eta)}{N(\xi+\psi(\eta), \eta)}} \neq 0.$$

Учитывая (1.14), из равенств (1.15) получаем, что вдоль кривой g функции $\bar{Z}_1(\xi, \eta)$ и $Z_2(\xi, \eta)$ принимают следующие значения:

$$Z_1(0, \eta) = F_1(\eta), \qquad Z_2(0, \eta) = F_2(\eta), \tag{1.17}$$

где через $F_1(\eta)$ и $F_2(\eta)$ обозначено

$$F_1(\eta)=\frac{\sqrt{\dfrac{N(\psi(\eta),\ \eta)}{L(\psi(\eta),\ \eta)}}}{1+\sqrt{\dfrac{N(\psi(\eta),\ \eta)}{L(\psi(\eta),\ \eta)}}}\ \theta(\eta),$$

$$F_2(\eta)=\frac{-\sqrt{\dfrac{N(\psi(\eta),\ \eta)}{L(\psi(\eta),\ \eta)}}}{1+\sqrt{\dfrac{N(\psi(\eta),\ \eta)}{L(\psi(\eta),\ \eta)}}}\ \theta(\eta).$$

Итак, мы ищем решение системы (1.16), которое при $\xi=0$ удовлетворяет начальным условиям (1.17).

Рассмотрим замкнутую область G на координатной плоскости $(\xi,\ \eta)$. Пусть область G ограничена отрезком $[a,\ b]$ оси $O\eta$ и характеристиками l_1 и l_2, выходящими соответственно из точек $(O,\ a)$ и $(O,\ b)$, и принадлежащими различным семействам.*

Известно (см. Петровский И. Г. [1]), что в области $\bar{G}$ существует единственное решение системы (1.16), которое на интервале $[a,\ b]$ удовлетворяет начальным условиям (1.17).

Поскольку система (1.16) симметрическая с нулевыми правыми частями, а начальные условия (1.17) ненулевые, то в силу оценки решений гиперболических систем (см. Годунов С. К. [3], стр. 127)

$$|Z|\leqq \text{const}\ |Z_0|$$

в смысле нормы

$$|Z|=\max\sqrt{\int_0^L\sum_{i=1}^2 Z_i^2(\xi,\ \eta)\ d\eta},$$

где Z вектор с компонентыми $(Z_1,\ Z_2)$, а Z_0 — вектор $(F_1,\ F_2)$, то решение системы (1.16) нетривиальное.

II. Докажем вторую часть теоремы.

Пусть теперь $\varphi(u,\ v)=0$. Тогда из равенств (1.6), принимая во внимание (1.7), имеем

$$\beta(u,\ v)|_g=0. \tag{1.18}$$

Доказательство теоремы в этом случае сводится к задаче Коши для системы (1.4) при начальных условиях (1.5), (1.18). Функции $\alpha(u,\ v)=0$ и $\beta(u,\ v)=0$ удовлетворяет системе (1.4) и начальным условиям (1.5), (1.18). Тогда, поскольку задача Коши имеет единственное решение, то

$$\alpha(u,\ v)=0,\ \beta(u,\ v)=0 \tag{1.19}$$

* Сеть асимптотических линий на поверхности Ф правильна.

являются единственными решениями системы (1.4).

Из равенств (1.19) заключаем, что поверхность Ф не допускает бесконечно малых изгибаний, сохраняющих вдоль кривой g главные направления и среднюю кривизну поверхности.

Теорема доказана.

Как следствие из первой части теоремы 1.1 получаем следующую теорему:

Теорема 1.2. Пусть $\Phi \in C^4$ односвязная поверхность отрицательной гауссовой кривизны, которая ограничена двумя асимптотическими линиями l_1 и l_2, исходящими из одной точки, и регулярной линией g, которая нигде не касается асимптотических направлений. Тогда такая поверхность Ф допускает нетривиальные бесконечно малые изгибания, в процессе которых вариация средней кривизны поверхности вдоль кривой g является произвольной наперед заданной функцией $\varphi(u, v)|_g$, отличной от нуля.

§ 2. БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ИЗГИБАНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ ПРИ ЗАДАННОЙ ВАРИАЦИИ КРИВИЗНЫ КРИВОЙ g

Теорема 2.1. Пусть $\Phi \in C^4$ односвязная поверхность отрицательной гауссовой кривизны, которая ограничена двумя асимптотическими линиями l_1 и l_2, исходящими из одной точки, и регулярной линией g, которая нигде не касается асимптотических направлений. Тогда поверхность Ф допускает нетривиальные бесконечно малые изгибания, в процессе которых вдоль кривой g сохраняются главные направления на поверхности, а вариация кривизны кривой g является произвольной наперед заданной функцией $\varphi(u, v)$. Поверхность Ф становится жесткой по отношению к бесконечно малым изгибаниям, сохраняющим вдоль кривой g главные направления на поверхности и кривизну кривой g.

Доказательство. Будем считать, что поверхность Ф отнесена к линиям кривизны. Краевые условия, при которых следует интегрировать систему (1.4) в рассматриваемом случае, те же самые, что и в теореме 1.1. Действительно для того, чтобы в процессе бесконечно малых изгибаний поверхности Ф вариация кривизны кривой являлась наперед заданной функцией $\varphi(u, v)$, необходимо и достаточно (см. работу [4]), чтобы

$$(2.20)\quad \beta(u,v)\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2\alpha(u,v)\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+\frac{N}{L}\beta(u,v)\left(\frac{dv}{ds}\right)^2\Bigg|_g=\frac{\varphi(u,v)}{W\cos\theta}\Bigg|_g,$$

где s — длина дуги кривой g, θ — угол между главной нормалью кривой g и нормалью к поверхности. Так как $\alpha(u, v)|_g=0$ (главные направления на поверхности сохраняются вдоль кривой g), то из (2.20) получаем

$$\beta(u, v)_g = \frac{\varphi(u, v)}{W\cos\theta\left[\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + \frac{N}{L}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2\right]_g}. \tag{2.21}$$

Если обозначить

$$\theta(v) = \frac{\varphi(u, v)}{W\cos\theta\left[\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + \frac{N}{L}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2\right]_g},$$

то равенство (2.20) запишется так:

$$\beta(\psi(v), v) = \theta(v). \tag{2.22}$$

Дальнейшее доказательство аналогично доказательству теоремы 1.1.

Теорема 2.2. Пусть Ф односвязная поверхность отрицательной гауссовой кривизны, которая ограничена двумя асимптотическими линиями l_1 и l_2, исходящими из одной точки, и регулярной линией g, которая нигде не касается асимптотических направлений. Тогда поверхность Ф допускает нетривиальные бесконечно малые изгибания, в процессе которых вариация кривизны кривой g является произвольной наперед заданной функцией $\varphi(u, v)_g \neq 0$.

Доказательство теоремы следует из доказательства теоремы 2.1.

§ 3. БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ИЗГИБАНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ ПРИ ЗАДАННОЙ ВАРИАЦИИ ГЕОДЕЗИЧЕСКОГО КРУЧЕНИЯ КРАЯ

Теорема 3.1. Пусть $\Phi \in C^4$ односвязная поверхность отрицательной гауссовой кривизны, которая ограничена двумя асимптотическими линиями l_1 и l_2, исходящими из одной точки, и регулярной линией g, которая нигде не касается асимптотических и главных направлений поверхности и вдоль которой средняя кривизна поверхности нигде не обращается в нуль. Тогда

I) поверхность Ф допускает нетривиальные бесконечно малые изгибания, в процессе которых вдоль кривой g сохраняются главные направления на поверхности, а вариация геодезического кручения является произвольной наперед заданной функцией $\varphi(u, v)|_g \neq 0$;

II) поверхность Ф становится жесткой по отношению к бесконечно малым изгибаниям, сохраняющим вдоль кривой g главные направления на поверхности и геодезическое кручение кривой g.

Доказательство. Пусть поверхность Ф отнесена к линиям кривизны. Найдем краевые условия, при которых следует интегрировать систему (1.4) в рассматриваемом случае. Для того, чтобы в процессе бесконечно малых изгибаний поверхности Ф вариация геодезического кручения кривой g являлась наперед заданной функцией $\varphi(u, v)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$(3.23)\qquad \frac{E\alpha\left(\frac{du}{ds}\right)^2+\left\{E\left(-\frac{N}{L}\right)-G\right\}\beta\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}-G\alpha\left(\frac{dv}{ds}\right)^2}{E\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2F\frac{du}{ds}\cdot\frac{dv}{ds}+G\left(\frac{dv}{ds}\right)^2}\Bigg|_g-\varphi(u,v)\Big|_g.$$

Так как $\alpha(u,v)|_g=0$, $EN+GL\neq 0$, то из равенства (3.23) получаем

$$\beta(\psi(v),\ v)=\theta(v),$$

где через $\theta(v)$ обозначено

$$\theta(v)=\frac{L\left(E\left(\frac{du}{dv}\right)^2+G\right)\varphi(u,v)}{(-EN-GL)\frac{du}{dv}}\Bigg|_g.$$

Следовательно, и в этом случае доказательство теоремы сводится к исследованию задачи Коши для системы (1.4) при краевых условиях (1.15), (1.10) в первом случае и (1.5), (1.18) — во втором случае.

Теорема 3.2. Пусть Ф односвязная поверхность отрицательной гауссовой кривизны, которая ограничена двумя асимптотическими линиями l_1 и l_2, исходящими из одной точки, и регулярной линией g, которая нигде не касается асимптотических и главных направлений поверхности и вдоль которой средняя кривизна поверхности нигде не обращается в нуль. Тогда поверхность Ф допускает нетривиальные бесконечно малые изгибания, в процессе которых вдоль кривой g вариация геодезического кручения является произвольной наперед заданной функцией $\varphi(u,v)|_g\neq 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петровский, И. Г.: Лекции об уравнениях с частными производными. М., 1961.
2. Курант, Р.: Уравнения с частными производными. М., 1964.
3. Годунов, С. К.: Уравнения математической физики. М., 1971.
4. Хінева, С. Т.: Про деякі крайові задачі нескінченно малих згинань розгортних поверхонь. Вісник КДУ, 1974.
5. Minagava, T., Rado, T.: On the infinitesimal rigidity of surfaces. Osaka math. J., 4, 2 (1952), 241—285.

Постъпила на 23. XI. 1973 г.

INFINITESIMAL BENDINGS OF SURFACES WITH NEGATIVE GAUSSIAN CURVATURE IN CASE OF GIVEN VARIATIONS OF CERTAIN GEOMETRICAL MAGNITUDES

S. T. Hineva

(SUMMARY)

Let $\Phi \in C^4$ be a simple connected surface with negative Gaussian curvature, which is bounded by two asymptotic curves l_1 and l_2, coming out of one point, and the arbitrary curve g whose tangents have not asymptotic directions.

It has been proved in the paper that the surface Φ allows infinitesimal bendings, in the process of which along the curve g the principal directions of the surface are preserved, and the variation of the mean curvature of the surface along the curve g (or the variation of the geodesic torsion of the curve g, or the variation of the curvature of the curve g) is an arbitrary given function, different from zero. If in the process of the infinitesimal bending of the surface along the line g the principal directions and the mean curvature of the surface (or the geodesic torsions of the curve g, or the curvature of the curve g) are preserved, the surface will become rigid.