О РЕГУЛЯРНО ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Веселин М. Петков, Николай Д. Кутев

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим оператор

$$P = I D_0 + A(x) D_1 + B(x), \tag{1}$$

где $x = (x_0, x_1)$, $D_j = -i \dfrac{\partial}{\partial x_j}$, $j = 0, 1$, I — единичная матрица, $A(x)$, $B(x)$ — $(d \times d)$ матрицы с бесконечно гладкими элементами в открытой ограниченной области $G \subset \mathbf{R}^2$. Предположим, что оператор P гиперболичен в G, т. е. для всех $x \in G$, $\xi_1 \in \mathbf{R}^1$ уравнение

$$P(x, \xi) = \det(\xi_0 I + A(x)\xi_1) = 0, \qquad \xi = (\xi_0, \xi_1)$$

имеет вещественные корни $\xi_0 = \lambda(x)\xi_1$.

Оператор P будем называть симметризуемым (несимметризуемым) в точке $\hat{x} \in G$, если матрица $A(\hat{x})$ подобна (не подобна) диагональной матрице. В этой работе мы получим необходимые условия корректности задачи Коши для систем, которые являются несимметризуемыми в некоторой точке $\hat{x} \in G$.

Введем следующие обозначения и определения:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} Q(x, \xi) = Q^{(j)}(x, \xi), \quad \frac{\partial}{\partial x_j} Q(x, \xi) = Q_{,j}(x, \xi),$$

$$G_\tau^+ = \{x;\ x \in G,\ x_0 \geqq \tau\}, \quad G_\tau^- = \{x;\ x \in G,\ x_0 \leqq \tau\}.$$

Если $D \subset \mathbf{R}^2$, то $\bar{D}$ будет обозначать замыкание D. Через a^* обозначим матрицу, комплексно сопряженную матрице a, через $\operatorname{Ker} a$ — ядро матрицы a, через $<, >$ — скалярное произведение в $\mathbf{C}^d$.

Определение 1. Задачу Коши

$$Pu = f \text{ в } G, \tag{2}$$

$$u \in D'(G), \ \operatorname{supp} u \subset G_T^+, \tag{3}$$

где $G_T^+ \neq G$, будем называть корректной в G_T^+, если выполнены следующие условия:

(E). Для любой $f \in C_0^\infty(G)$, $\operatorname{supp} f \subset \overline{G}_T^+$ существует обобщенная функция $u \in D'(G)$, удовлетворяющая (2) — (3).

(U). Если $u \in D'(G)$ удовлетворяет (2) — (3) и $Pu=0$ в G_t^-, то $u=0$ в G_t^- для любого t, $T<t$.

Определение 2. Оператор P будем называть регулярно гиперболическим в G, если для любой точки $\hat{x} \in G$ существует окрестность U и число $\hat{T}<\hat{x}_0$ такие, что задача Коши (2) — (3) корректна в U_T^+ при любом $T \geqq \hat{T}$ для оператора $(P+B_1(x))$, где $B_1(x)$ — любая матрица с бесконечно гладкими элементами в G.

Как известно [1], [2], для регулярной гиперболичности скалярного гиперболического оператора необходимо, чтобы фундаментальная матрица старшего символа оператора имела в критических точках этого символа пару вещественных отличных от нуля собственных чисел. При некоторых предположениях мы докажем необходимость аналогичного условия для регулярной гиперболичности оператора (1) в G.

Пусть $\hat{x} \in G$, $\lambda(\hat{x})$ — характеристический корень матрицы $A(\hat{x})$ с кратностью $r \geqq 2$,

$$\mathbf{A}(\hat{x}) = -\lambda(\hat{x})I + A(\hat{x}), \ \operatorname{rank} \mathbf{A}(\hat{x}) = d-1.$$

Обозначим через $R_j(\hat{x}) \neq 0$, $j=0,\ldots,r-1$, векторы, для которых

$$\mathbf{A}(\hat{x})R_0(\hat{x})=0,$$

$$\mathbf{A}(\hat{x})R_j(\hat{x})=R_{j-1}(\hat{x}), \ j=1,\ldots,r-1.$$

Аналогично введем векторы $L_j(\hat{x}) \neq 0$, $j=0,\ldots,r-1$, для которых

$$\mathbf{A}^*(\hat{x})L_0(\hat{x})=0,$$

$$\mathbf{A}^*(\hat{x})L_j(\hat{x})=L_{j-1}(\hat{x}), \ j=1,\ldots,r-1.$$

Пусть

$$P_1(x,\xi)=\xi_0 I + A(x)\xi_1,$$

$$F_P(x,\xi)=\begin{pmatrix} P_{,0}^{(0)} & P_{,1}^{(0)} & P^{(0,0)} & P^{(0,1)} \\ P_{,0}^{(1)} & P_{,1}^{(1)} & P^{(1,0)} & P^{(1,1)} \\ -P_{,0,0} & -P_{,0,1} & -P_{,0}^{(0)} & -P_{,0}^{(1)} \\ -P_{,1,0} & -P_{,1,1} & -P_{,1}^{(0)} & -P_{,1}^{(1)} \end{pmatrix}$$

— фундаментальная матрица символа $P(x,\xi)$. Обозначим через $\frac{d}{d\tau}$ производную по направлению бихарактеристики, соответствующей корню $\lambda(\hat{x})$, т. е.

$$\frac{d}{d_\tau} Q = Q_{,\tau} = \frac{\partial Q}{\partial x_0} + \lambda(\hat{x}) \frac{\partial Q}{\partial x_1}.$$

Мы докажем следующую теорему.

Теорема 1. Если оператор P — регулярно гиперболический в G, то в каждой точке $\hat{x} \in G$, в которой матрица $A(\hat{x})$ имеет характеристический корень $\lambda(\hat{x})$ с кратностью $r \geqq 2$ и $\operatorname{rank} \mathbf{A}(\hat{x}) = d - 1$, фундаментальная матрица $F_P(\hat{x}, \lambda(\hat{x}), 1)$ имеет пару вещественных отличных от нуля собственных чисел. При этом, если $F_P(\hat{x}, \lambda(\hat{x}), 1)$ не имеет вещественных отличных от нуля собственных чисел, то для корректности задачи Коши (2) — (3) в G_T^+, $T \leqq \hat{x}_0$, необходимо условие

$$P_0'(\hat{x}) = \frac{i}{2} [\langle L_1, P_{1,\tau}^{(1)} R_0 \rangle - \langle L_0, P_{1,\tau}^{(1)} R_1 \rangle](\hat{x}) + \langle L_0, BR_0 \rangle(\hat{x}) = 0. \tag{4}$$

Доказательство теоремы 1 проводится методом построения асимптотического решения для оператора P. Кроме того, мы используем при построении асимптотического решения метод асимптотической замены переменных [1], [3], [4] и метод „холостых шагов" [5], [6]. В § 1 мы доказываем инвариантность условия [4] относительно выбора векторов $R_k(\hat{x})$, $L_k(\hat{x})$, $k = 0,1$, относительно замены переменных и относительно замены базиса в $\mathbf{C}^d$. В § 2 доказывается теорема 1 в случае $r = 2$, а в § 3 — в случае $r \geqq 3$.

§ 1. Подготовка доказательства теоремы 1

Очевидно условие (4) не зависит от выбора векторов $R_0(\hat{x})$, $L_0(\hat{x})$. Мы покажем, что (4) не зависит и от выбора векторов $R_1(\hat{x})$, $L_1(\hat{x})$.

Пусть $\delta > 0$, $y \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ — фиксированный вектор. Рассмотрим уравнение

$$\det(-\xi_0 I + A(\hat{x} + \delta y)) = 0$$

относительно ξ_0. Из теоремы Реллиха (см. § 8 в [1]) следует, что корни $\xi_0 = \lambda(\hat{x} + \delta y)$ являются аналитическими функциями δ в некоторой окрестности нуля. Отсюда вытекает, что существуют все производные вида $D^\alpha \lambda(\hat{x})$, где $\alpha = (\alpha', 0)$, $\alpha = (0, \alpha'')$.

По предположению теоремы $\operatorname{rank} \mathbf{A}(x) = d - 1$. Следовательно, ранг матрицы

$$\mathbf{A}(x) = -\lambda(x) I + A(x)$$

постоянен в некоторой окрестности $\hat{x}$ и мы можем найти векто функции $R_j(x) \neq 0$, $j=0,\ldots, r-1$, для которых

$$\mathbf{A}(x)R_0(x)=0, \tag{5}$$

$$\mathbf{A}(x)R_j(x)=R_{j-1}(x),\ j=1,\ldots, r-1. \tag{6}$$

Кроме того, эти вектор-функции имеют в $\hat{x}$ частные производи $D^\alpha R_j(\hat{x})$, $\alpha=(\alpha', 0)$, $\alpha=(0, \alpha'')$.

Продифференцируем равенство

$$(-\lambda(x)I+A(x))R_0(x)=0 \tag{7}$$

относительно x_0 и положим $x=\hat{x}$

$$(-\lambda_{x_0} I+A_{x_0})(\hat{x})R_0(\hat{x})+\mathbf{A}(\hat{x})R_{0,x_0}(\hat{x})=0. \tag{8}$$

Умножим скалярно это равенство на $L_0(\hat{x})$ и получим

$$<L_0,\ A_{x_0}R_0>(\hat{x})=0. \tag{9}$$

Аналогично находим

$$<L_0, A_{x_1}R_0>(\hat{x})=0. \tag{10}$$

Из (9), (10) получаем, что условие (4) не зависит от выбора $R_1($ $L_1(\hat{x})$.

Из определения векторов R_1, L_1 следует равенство

$$<L_1, R_0>(\hat{x})=<L_0, R_1>(\hat{x}). \tag{11}$$

Используя (11) легко показать, что условие (4) инвариантно отно тельно замены переменных

$$x_0'=x_0,\quad x_1'=\varphi(x),$$

где $\varphi_{x_1} \neq 0$.

Пусть $C(x)$ — гладкая неособая матрица в G. Сделаем зам неизвестной функции $u(x)=C(x)v(x)$ и умножим P слева на C^{-1} Получим оператор

$$Q=ID_0+(C^{-1}AC)D_1+C^{-1}BC$$
$$-i(C^{-1}C_{x_0}+C^{-1}AC_{x_1}).$$

Покажем, что (4) инвариантно относительно этого преобразова Не ограничивая общности, можно считать, что $C(\hat{x})=I$. Тогда

$$Q_0'(\hat{x})=P_0'(\hat{x})+\frac{i}{2}\{\lambda[<L_1, C_\tau R_0>+<L_1, C_\tau^{-1}R_0>]$$
$$+<L_0, C_\tau R_0>-\lambda[<L_0, C_\tau^{-1}R_1>+<L_0, C_\tau R_1>]-<L_0, C_\tau^{-1}R_0>$$
$$-2<L_0, C_\tau R_0>\}(\hat{x}).$$

Так как $C_\tau(\hat{x}) = -C_\tau^{-1}(\hat{x})$, то $Q_0'(\hat{x}) = P_0'(\hat{x})$.

После этих рассуждений ясно, что не ограничивая общности, можно считать, что

$$\hat{x}=0,\ \lambda(\hat{x})=0$$

и предполагать, что в некоторой окрестности нуля матрица $A(x)$ имеет вид

$$A(x)=\begin{pmatrix} A_r(x) & 0 \\ 0 & D(x) \end{pmatrix},$$

где $A_r(x)$ — $(r\times r)$ матрица,

$$A_r(0)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

$D(x)$ — $(d-r)\times(d-r)$ неособая матрица.

В самом деле, если $\lambda_1(0)=\ldots=\lambda_r(0)=0$, $\lambda_j(0)\neq 0$, $j=r+1,\ldots,d$, то можно найти $\varepsilon>0$ и $\delta>0$ такие, что для $|x|<\varepsilon$ справедливы неравенства

$$|\lambda_j(x)|\leqq\frac{\delta}{2}, \qquad j=1,\ldots,r,$$

$$|\lambda_j(x)|\geqq 2\delta, \qquad j=r+1,\ldots,d.$$

Поэтому можно рассмотреть проекторы

$$\pi_1(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=\delta}(zI-A(x))^{-1}\,dz,$$

$$\pi_2(x)=I-\pi_1(x)$$

и построить матрицу $E(x)$ (см. § I в [6]), для которой

$$E^{-1}(x)A(x)E(x)=\begin{pmatrix} A_r(x) & 0 \\ 0 & D(x) \end{pmatrix}.$$

Положим

$$R_j=(0,\ldots,0,1,\underbrace{0,\ldots,0}_{d-j-1\ \text{нулей}}) \qquad j=0,\ldots,r-1,$$

$$L_j=(0,\ldots,0,1,\underbrace{0,0,\ldots,0}_{d-r+j\ \text{нулей}}) \qquad j=0,\ldots,r-1.$$

Мы покажем, что если $r\geqq 3$, то

$$<L_1,\ A_{x_0}(0)R_0>+<L_0,\ A_{x_0}(0)R_1>=0. \tag{12}$$

Действительно, из равенства

$$\mathbf{A}(x)R_1(x)=R_0(x)$$

следует, что

$$(-\lambda_{x_0}(0)I+A_{x_0}(0))R_1+A_r(0)R_{1,x_0}(0)=R_{0,x_0}(0).$$

Отсюда получаем

$$<L_0,\ A_{x_0}(0)R_1>=<L_0,\ R_{0,x_0}(0)>. \tag{13}$$

С другой стороны, из (8) следует, что

$$<L_1,\ A_{x_0}(0)R_0>+<L_0,\ R_{0,x_0}(0)>=0. \tag{14}$$

Таким образом равенство (12) следует из (13), (14).

В случае $r=2$ мы получим равенство (12) после замены переменных

$$x_0'=x_0,\ x_1'=x_1-\frac{\operatorname{tr}A_{r,x_0}(0)}{4}x_0^2-\frac{\operatorname{tr}A_{r,x_1}(0)}{2}x_0x_1. \tag{15}$$

Кроме того, в новых переменных будем иметь

$$\operatorname{tr}A_{r,x_1}(0)=0. \tag{16}$$

Пусть $<L_0,\ A_{x_0}(0)R_1>=\alpha\neq 0$. Рассмотрим матрицу

$$C(x_0)=\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ \alpha x_0 & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}\left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\\vdots\\1\end{matrix}}\right\}r\ \text{строк.}$$

Имеем

$$<L_1,(C^{-1}AC)_\tau(0)R_0>=<L_0,(C^{-1}AC)_\tau(0)R_1>=0.$$

Следовательно, не ограничивая общности, можно считать, что

(17) $$<L_1, A_{x_0}(0)R_0> \triangleq <L_0, A_{x_0}(0)R_1> = 0,$$

(18) $$P_0'(0) = <L_0, B(0)R_0>.$$

Если $r \geqq 3$, то фундаментальная матрица $F_P(0, 0, 0, 1)$ имеет только нулевые собственные значения. Предположим теперь, что $r=2$ и что фундаментальная матрица $F_P(0, 0, 0, 1)$ не имеет ненулевых вещественных собственных значений. Тогда фундаментальная матрица символа

$$\xi_0^2 - \operatorname{tr} A_r \xi_0 \xi_1 + \det A_r \xi_1^2$$

тоже не имеет ненулевых вещественных собственных чисел в точке (0, 0, 0, 1). Из (9), (16), (17) следует, что в этом случае будем имееть

$$(\det A_r)_{x_0x_0}(0) \geqq 0.$$

Из последнего неравенства, учитывая (9), (17) и гиперболичность оператора P, получим

(19) $$<L_0, A_{x_0x_0}(0)R_0> = 0.$$

Сделаем асимптотическую замену переменных

$$y_0 = x_0 \rho^{r-1}, \quad y_1 = x_1 \rho^r,$$

где $\rho \geqq 1$ — параметр. Получим оператор

(20) $$P_\rho = \rho^{r-1} D_0 + [\rho^r A(0) + \rho y_0 A_{x_0}(0) + y_1 A_{x_1}(0)$$
$$+ \rho^{2-r} \frac{y_0^2}{2} A_{x_0x_0}(0)] D_1 + B(0) + \sum_{\eta=1}^{N-1} (C_\eta(y) D_1 + D_\eta(y)) \rho^{-\eta}$$
$$+ \rho^{-N} R_N(y, D_1) = Q_{N+\rho}^{-N} R_N,$$

где $(C_\eta D_1 + D_\eta)$ — линейные дифференциальные операторы первого порядка с аналитическими коэффициентами, $C_\eta(0) = D_\eta(0) = 0$, $R_N(y, D_1)$ — оператор первого порядка с гладкими коэффициентами.

Для оператора Q_N построим асимптотическое решение в виде

(21) $$u_\rho(y) = \sum_{n=0}^{N_1} v_n(y) \rho^{-\frac{n}{r}} \exp i \left(\sum_{j=0}^{r-1} l^j(y) \rho^{1-\frac{j}{r}} \right),$$

где $v_n(y)$ — вектор-функции, $l^j(y)$ — скалярные функции.

Пусть

$$E(y, \rho) = \exp i \left(\sum_{j=0}^{r-1} l^j(y) \rho^{1-\frac{j}{r}} \right).$$

Тогда можно показать (см. § 2 в [1]), что доказательство некорректности задачи Коши сводится к построению асимптотического решения вида (21), для которого $v_0(0)=1$, l^j, $v_n \in C^\infty(W)$, W — окрестность нуля, $l^0(y)=\varepsilon y_1$, $\varepsilon=\pm 1$, функции $l^1,\ldots,l^{r-1}$ удовлетворяют для $x \in W_0^-$ неравенству

$$\operatorname{Im}\left(\sum_{j=1}^{r-1} l^j \rho^{1-\frac{j}{r}}\right) \geqq \rho^{\frac{r-1}{r}}(\delta-0(1))(-y_0+y_1^2),\ \delta>0 \tag{22}$$

и при любом фиксированном $N_2>0$ имеем в W

$$E^{-1}(y,\rho)Pu_\rho=O(\rho^{-N_2}). \tag{23}$$

Пусть $\mu \leqq r$, $0 \leqq \nu \leqq r$. Обозначим через $K_{(\mu,\nu)}$ коэффициент перед $\rho^{\frac{\mu(r+1)-\nu}{r}}$ во выражении $Q_N(u_\rho)$.

Имеем

$$\begin{aligned}
K_{(\mu,\nu)}=\sum_{j=0}^{r-1}\Big\{ & l^j_{y_1}\Big[Av_{(r-\mu)(r+1)+\nu-j} \\
& +y_0A_{x_0}v_{2r-\mu(r+1)+\nu-j}+y_1A_{x_1}v_{r-\mu(r+1)+\nu-j} \\
& +\frac{y_0^2}{2}A_{x_0x_0}v_{r(3-r)-\mu(r+1)+\nu-j}+\sum_{\eta=1}^{N-1}C_\eta(y)v_{r-\mu(r+1)-r\eta+\nu-j}\Big] \\
& +l^j_{y_0}v_{(r-\mu-1)(r+1)+1+\nu-j}\Big\}-i\Big\{A[v_{(r-\mu-1)(r+1)+\nu+1}]_{y_1} \\
& +[v_{r-\mu-1)(r+1)+\nu+1-r}]_{y_0}+y_0A_{x_0}[v_{\nu+r-\mu(r+1)}]_{y_1} \\
& +y_1A_{x_1}[v_{\nu-\mu(r+1)}]_{y_1}+\frac{y_0^2}{2}A_{x_0x_0}[v_{r(2-r)+\nu-\mu(r+1)}]_{y_1}\Big\} \\
& +Bv_{\nu-\mu(r+1)}+\sum_{\eta=1}^{N-1}(C_\eta(y)D_1+D_\eta(y))(v_{\nu-\mu(r+1)-r\eta}),
\end{aligned} \tag{24}$$

где $v_j(y)\equiv 0$, если $j<0$. Кроме того, все матрицы A, A_{x_0}, A_{x_1}, $A_{x_0x_0}$, B здесь и дальше рассматриваются в точке $x=0$. Мы последовательно будем решать системы $K_{(\mu,\nu)}=0$ и при любом фиксированном $N_2>0$ получим равенство (23).

Предположим, что функция $l^1(y)$ определяется из уравнения

$$S(y,\ l^1_{y_0})=0.$$

Тогда, если в некоторой окрестности нуля уравнение

$$S(y,\ \eta_0)=0 \tag{25}$$

имеет простой корень $\eta_0=F(y)$, для которого $\operatorname{Im}F(y)<-\mu<0$ и $\psi(0, y_1)=0$ для $j=2,\ldots, r-1$, то в некоторой окрестности нуля будет справедливо неравенство (22), если определим $l^1(y)$ как решение задачи Коши

$$\begin{cases} l^1_{y_0}=F(y), \\ l^1(0, y_1)=i\,y_1^2. \end{cases} \tag{26}$$

В следующих двух параграфах мы покажем, что всегда можно найти простой корень уравнения (25), если не выполнено условие (4).

§ 2. Доказательство теоремы 1 в случае $r=2$

Этот параграф иллюстрирует метод „холостых шагов", который применяется при построении асимптотического решения. При $r=2$ проще проследить процесс определения вектор-функций v_n. Этот процесс с некоторыми техническими усложнениями проводится и в общем случае.

Рассмотрим сначала системы $K_{(2,\nu)}=0$, $\nu=0, 1, 2$. Из (9) следует, что все эти системы разрешимы, и мы положим

$$v_\nu(y)=\sigma^\nu R_0, \quad \nu=0, 1, 2,$$

где здесь и до конца доказательства теоремы 1 через $\sigma^0(y)$, $\sigma^1(y)$,.. будем обозначать скалярные аналитические функции.

Теперь мы покажем, что все системы $K_{(1,\nu)}=0$, $\nu=0, 1, 2$, разрешимы и имеют место равенства

$$v_{3+\nu}=\sum_{j=0}^{1}\Phi_{\nu,j}R_j, \qquad \nu=0, 1, 2, \tag{27}$$

где $\Phi_{\nu,j}$ — некоторые аналитические скалярные функции, которые зависят от y, l^1, $\sigma^0,\ldots,\sigma^{3+\nu}$, $\Phi_{\nu,0}=\sigma^{3+\nu}$.

Действительно, при $\nu=0$ разрешимость системы $K_{(1,0)}=0$ следует из (9), а при $\nu=1, 2$ разрешимость систем $K_{(1,\nu)}=0$ следует из (9), (10), (17), (19). При этом, легко получить представление (27), где

$$\Phi_{0,1}=-\varepsilon\sigma^0 l^1_{y_0}, \tag{28}$$

$$\Phi_{1,1}=i\,\varepsilon\,\sigma^0_{y0}+\ldots, \tag{29}$$

$$\Phi_{2,1}=i\,\varepsilon\,\sigma^1_{y0}+\ldots, \tag{30}$$

причем точками в (29) обозначены члены, не содержащие производных функции σ^0, а в (30) — члены, не содержащие производных функции σ^1.

Рассмотрим систему

$$(31)\qquad -\varepsilon A v_6 = l^1_{y_1} A v_5 + y_0 A_{x_0}(\varepsilon v_4 + l^1_{y_1} v_3)$$
$$+\left(y_1 A_{x_1} + \frac{y_0^2}{2} A_{x_0x_0}\right)(\varepsilon v_2 + l^1_{y_1} v_1) + \varepsilon C_1(y) v_0$$
$$+ l^1_{y_0} v_3 - i\Big\{A(v_4)_{y_1} + (v_2)_{y_0} + y_0 A_{x_0}(v_2)_{y_1}$$
$$+\left(y_1 A_{x_1} + \frac{y_0^2}{2} A_{x_0x_0}\right)(v_0)_{y_1}\Big\} + B v_0.$$

Учитывая, что $C_1(0)=0$, $P_0'(0) \neq 0$, и выбирая знак ε, получим, что уравнение

$$\eta_0^2 - \langle L_0, C_1(y) R_0\rangle - \varepsilon \langle L_0, B R_0\rangle = 0$$

имеет простой корень $\eta_0 = F(y)$, для которого $\operatorname{Im} F(0) < 0$. Следовательно мы можем определить l^1 как аналитическое решение задачи Коши (26) и после этого найти вектор-функцию v_6 из (31).

Из (28), (29) вытекает, что условие разрешимости для системы $K_{(0,1)}=0$ будет

$$2 l^1_{y_0} \sigma^0_{y_0} + \psi(y, l^1)\sigma^0 = 0,$$

где ψ — некоторая скалярная аналитическая функция, зависящая от y, l^1. Из этого уравнения определяем σ^0 с начальным условием

$$(32)\qquad \sigma^0(0, y_1) = 1,$$

а из системы $K_{(0,1)}=0$ — вектор-функцию v_7 с точностью до слагаемого $\sigma^7 R_0$.

Далее рассуждаем по индукции. Для этого заметим, что каждый коэффициент $K_{(\mu,\nu)}$ зависит от $\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3, \ldots$ точно так же, как $K_{(\mu,\nu)}$ ($K_{(\mu+1,\,r)}$, если $\nu=0$) зависит соответственно от $\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \ldots$ Поэтому если функции $\sigma^0, \ldots, \sigma^{n-1}$ уже определены, то из условия разрешимости для системы $K_{(\mu,\nu)}=0$, где $\mu = -\left[\frac{n+1}{3}\right]$, $\nu = 3\left\{\frac{n+1}{3}\right\}$ получим уравнение

$$2 l^1_{y_0} \sigma^n_{y_0} + \psi(y, l^1)\,\sigma^n = S_n(y, l^1, \sigma^0, \ldots, \sigma^{n-1}),$$

где S_n — некоторая известная скалярная аналитическая функция. Из этого уравнения определяем σ^n с начальным условием

$$(33)\qquad \sigma^n(0, y_1) = 0,$$

а из $K_{(\mu,\nu)}=0$ — вектор-функцию $v_{3(2-\mu)+\nu}$ с точностью до слагаемого $\sigma^{3(2-\mu)+\nu}(y)$.

§ 3. Доказательство теоремы 1 в случае $r \geqq 3$

Мы покажем сначала, что если $1 \leqq \mu \leqq r$, $0 \leqq \nu \leqq r$, то все системы $K_{(\mu,\nu)}=0$ разрешимы и

$$v_{(r-\mu)(r+1)+\nu} = \sum_{j=0}^{r-\mu} \Phi_{\mu,\nu,j} R_j, \tag{34}$$

где $\Phi_{\mu,\nu,j}$ — некоторые скалярные функции, зависящие от y, l^1, $l^2, \ldots$, l^{r-1}, $\sigma^0, \ldots, \sigma^{(r-\mu)(r+1)+\nu}$ $\Phi_{\mu,\nu,0} = \sigma^{(r-\mu)(r+1)+\nu}$.

Пусть $\mu=r$. Тогда системы

$$K_{(r,\nu)} = \sum_{j=0}^{r-1} l^j_{y_1} A v_{\nu-j} = 0$$

разрешимы и имеет место (34).

Если $\mu>2$, то получим системы

$$K_{(\mu,\nu)} = \sum_{j=0}^{r-1} \Big\{ l^j_{y_1} A v_{(r-\mu)(r+1)+\nu-j} \tag{35}$$

$$+ l^j_{y_0} v_{(r-\mu-1)(r+1)+1+\nu-j} \Big\} - i\Big\{ A\big[v_{(r-\mu-1)(r+1)+\nu+1}\big]_{y_1}$$

$$+ \big[v_{(r-\mu-1)(r+1)+1+\nu-r}\big]_{y_0} \Big\} = 0,$$

в которых будут входить только векторы R_j, $j=0, \ldots r-\mu-1$, если справедливо (34). Поэтому, из (35) можно определить вектор-функции $v_{(r-\mu)(r+1)+\nu-j}$ как линейные комбинации векторов $R_0, \ldots, R_{r-\mu}$. Так как (34) выполнено при $\mu=r$, то по индукции получаем, что (34) выполнено и при $\mu>2$.

Если $\mu=2$, то в системах $K_{(2,\nu)}=0$ кроме слагаемых, входящих в (35), участвует еще сумма

$$\sum_{j=0}^{r-1} y_0 l^j_{y_1} A_{x_0} v_{\nu-2-j}. \tag{36}$$

Разрешимость систем $K_{(2,\nu)}=0$ вытекает из равенства (9). Кроме того, из (9), (17) следует, что решение w системы

$$Aw = A_{x_0} R_0$$

имеет вид

$$w = \sum_{j=0}^{r-2} \alpha_j R_j$$

с некоторыми константами α_j. Следовательно, при $\mu=2$ справедливо (34), причем при $\nu=0, 1$ в $\Phi_{2,\nu,r-2}$ не входят α_j.

При $\mu=1$ в системах $K_{(1,\nu)}=0$ кроме слагаемых (35) входят еще слагаемые

$$\sum_{j=0}^{r-1}[y_1 l^j_{y_1} A_{x_1} v_{\nu-1-j} + y_0 A_{x_0} l^j_{y_1} v_{r+\nu-j-1}] + y_0 A_{x_0}[v_{\nu-1}]_{y_1}. \tag{37}$$

В силу (9), (10), (17) и равенства

$$v_{r+\nu-j-1} = \sum_{j=0}^{1} \Phi_{r-1,\ \nu-j-2,\ j} R_j$$

получим, что системы $K_{(1,\nu)}=0$ разрешимы и, что справедливо (34). При этом, при определении $\Phi_{1,0,r-1}$ не участвуют слагаемые, входящие в (37).

При $r \geqq 3$ мы положим $l^0(y)=y_1$. Прежде чем перейти к системам $K_{(\mu,\nu)}=0$, где $\mu \leqq 0$, мы определим скалярные функции

$$\Phi_{1,\nu,\ r-1}(y, l^1, \ldots), \qquad \nu=0,\ldots,\ r.$$

Мы докажем сначала, что

$$\Phi_{1,0,\ r-1} = (-1)^{r-1} \sigma^0 (l^1_{y_0})^{r-1}. \tag{38}$$

Очевидно, $\Phi_{r-1,\ 0,1} = -\sigma^0 l^1_{y_0}$. Предположим, что мы уже доказали, что

$$\Phi_{r-\varkappa,\ 0,\varkappa} = (-1)^{\varkappa} \sigma^0 (l^1_{y_0})^{\varkappa} \tag{39}$$

для $\varkappa=1,\ldots,\ m$, $m \leqq r-2$. Функцию $\Phi_{r-(m+1),0,m+1}$ определим из системы $K_{(r-(m+1),\ 0)}=0$. Так как $m \leqq r-2$, то в этой системе входят только слагаемые вида (35), (36). Поэтому, учитывая (9), (17), получим систему

$$-Av_{(m+1)(r+1)} = l^1_{y_0}\ \Phi_{r-m,0,m} R_m + \sum_{j=0}^{m-1} \psi_{m,j} R_j,$$

где $\psi_{m,j}$ — некоторые скалярные функции. Следовательно,

$$\Phi_{r-(m+1),\ 0,\ m+1} = -l^1_{y_0} \Phi_{r-m,\ 0,\ m} = (-1)^{m+1} \sigma^0 (l^1_{y_0})^{m+1}$$

и равенство (38) доказано.

Покажем теперь, что

$$\Phi_{1,\nu,\ r-1} = (-1)^{r-1}(r-1)\sigma^0 (l^1_{y_0})^{r-2} l^{\nu+1}_{y_0} + \ldots \tag{40$_\nu$}$$

для $\nu=1,\ldots,\ r-2$,

$$\Phi_{1,r-1,\ r-1} = i(-1)^r (r-1)(l^1_{y_0})^{r-2} \sigma^0_{y_0} + \ldots, \tag{41}$$

причем точками в (40$_\nu$) обозначены члены, не содержащие производных соответственно функции $l^{\nu+1}$, а в (41) — члены, не содержащие производных функции σ^0.

Мы определим сначала функции $\Phi_{r-1,\nu,1}$, $\nu=1,\ldots,r-1$ из системы

$$-Av_{r+1+\nu}=\sum_{j=1}^{\nu} l^j_{y_1}\Phi_{r-1,\nu-j,1}R_0$$

$$+\sum_{j=1}^{\nu+1} l^j_{y_0}\sigma^{\nu+1-j}R_0-i\,\delta_{r-1,\nu}\sigma^0_{y_0}R_0.$$

Имеем

$$\Phi_{r-1,\nu,1}=-l^{\nu+1}_{y_0}\sigma^0R_1+\ldots \qquad \nu=1,\ldots,r-2,$$

$$\Phi_{r-1,r-1,1}=i\,\sigma^0_{y_0}R_1+\ldots,$$

где здесь и дальше до конца доказательства равенств (40_ν), (41) мы отмечаем только члены, содержащие соответственно $l^{\nu+1}_{y_0}$, $\nu=1,\ldots,r-2$, и $\sigma^0_{y_0}$.

Предположим, что мы доказали уже, что

$$(42_\nu)\qquad \Phi_{r-\varkappa,\nu,\varkappa}=(-1)^\varkappa\varkappa\,\sigma^0(l^1_{y_0})^{\varkappa-1}l^{\nu+1}_{y_0}+\ldots,$$

$$(43)\qquad \Phi_{r-\varkappa,r-1,\varkappa}=i(-1)^{\varkappa+1}\varkappa(l^1_{y_0})^{\varkappa-1}\sigma^0_{y_0}+\ldots$$

для $\varkappa=1,\ldots,m$, $\nu=1,\ldots,r-2$, $m\leqq r-2$. Функцию $\Phi_{r-(m+1),\nu,m+1}$ при $\nu=1,\ldots,r-2$ определим из системы

$$-Av_{(m+1)(r+1)+\nu}=l^1_{y_0}\Phi_{r-m,\nu,m}R_m$$

$$+l^{\nu+1}_{y_0}\Phi_{r-m,0,m}R_m+\sum_{j=0}^{m-1}\psi_{m,\nu,j}R_j+\ldots,$$

где $\psi_{m,\nu,j}$ — некоторые скалярные функции. В силу (39), (42_m) получим

$$\Phi_{r-(m+1),\nu,m+1}=(-1)^{m+1}(m+1)\sigma^0(l^1_{y_0})^{m+1}(l^{\nu+1}_{y_0})+\ldots$$

Аналогично при $\nu=r-1$ имеем систему

$$-Av_{(m+1)(r+1)+r-1}=l^1_{y_0}\Phi_{r-m,r-1,m}R_m$$

$$-i(\Phi_{r-m,0,m})_{y_0}R_m+\sum_{j=0}^{m-1}\psi_{m,r-1,j}R_j+\ldots,$$

из которой определяем

$$\Phi_{r-(m+1),r-1,m+1}=i(-1)^{m+2}(m+1)(l^1_{y_0})^m(\sigma^0_{y_0})+\ldots$$

Таким образом доказаны равенства (40_ν), (41).

Рассмотрим теперь систему

$$K_{(0,0)}=\sum_{j=0}^{r-1} l^j_{y_1}\left[Av_{r(r+1)-j}+y_0A_{x_0}v_{2r-j}\right.$$

$$\left.+y_1A_{x_1}v_{r-j}\right]+\sum_{j=1}^{r-1} l^j_{y_0}\, v_{(r-1)(r+1)+1-j}$$

$$-i\{A[v_{(r-1)(r+1)+1}]_{y_1}+[v_{(r-1)(r+1)+1-r}]_{y_0}$$

$$+(y_0A_{x_0}\sigma^r_{y_1}+y_1A_{x_1}\sigma^0_{y_1})\}+\left[B+\frac{y_0^2}{2}A_{x_0x_0}\delta_{3,r}+C_1(y)\right]\sigma^0R_0=0. \tag{44}$$

Из равенств (38), (34) вытекает, что условие разрешимости (44) имеет вид

$$(-1)^{r-1}(l^1_{y_0})^r+\langle L_0, BR_0\rangle+\langle L_0,\left[\frac{y_0^2}{2}A_{x_0x_0}\delta_{3,r}+C_1(y)\right]R_0\rangle=0.$$

Аналогично, как и в § 2, показывается, что можно найти простой корень $\eta_0=F(y)$ уравнения

$$(-1)^{r-1}\eta_0^r+\langle L_0, BR_0\rangle+\langle L_0,\left[\frac{y_0^2}{2}A_{x_0x_0}\delta_{3,r}+C_1(y)\right]R_0\rangle=0$$

и определить функцию l^1 с нужными свойствами.

Предположим, что для $\nu=0,\ldots,m$, $m<r-2$ мы нашли вектор-функции $v_{r(r+1)+\nu}$ с точностью до слагаемого $\sigma^{r(r+1)+r}$ и определили функции $l^{\nu+1}$ с начальными условиями $l^{\nu+1}(0, y_1)=0$.

Используя (38), (40_{m+1}), получим условие разрешимости для системы $K_{(0,m+1)}=0$

$$(-1)^{r-1}r(l^1_{y_0})^{r-1}l^{m+2}_{y_0}+S_{m+1}(y, l^1, l^2,\ldots, l^{m+1})=0,$$

где S_{m+1} — известная скалярная функция. Из этого условия определяем l^{m+2} с начальным условием $l^{m+2}(0, y_1)=0$, а из системы $K_{(0,m+1)}=0$ находим вектор-функцию $v_{r(r+1)+m+1}$ с точностью до слагаемого $\sigma^{r(r+1)+m+1}$.

Аналогично, учитывая (38), (41), из $K_{(0,r)}=0$ получим уравнение для определения σ^0

$$(-1)^{r-1}r(l^1_{y_0})^{r-1}\sigma^0_{y_0}+\psi(y, l^1,\ldots, l^{r-1})\sigma^0=0,$$

которое решаем с начальным условием (32).

Далее следуют стандартные индуктивные рассуждения. Этим заканчивается доказательство теоремы 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Иврий, В. Я., Петков, В. М.: Необходимые условия корректности задачи Коши для нестрого гиперболических уравнений. УМН, **29**, № 5 (1974), 3—70.
2. Иврий, В. Я.: Задача Коши для нестрого гиперболических уравнений. ДАН СССР, **207**, № 5 (1972), 1032—1034.
3. Иврий, В. Я.: Задача Коши для нестрого гиперболических уравнений. ДАН СССР, **197**, № 3 (1971), 517 — 519.
4. Петков, В. М.: Необходимые условия корректности задачи Коши для нестрого гиперболических уравнений. ДАН СССР, **206**, № 2 (1972), 287—290.
5. Петков, В. М.: О задаче Коши для гиперболических систем первого порядка с кратными характеристиками. ДАН СССР, **209**, № 4 (1973), 795 — 797.
6. Петков, В. М.: Необходимые условия корректности задачи Коши для несимметризуемых гиперболических систем. Труды Семинара имени И. Г. Петровского, вып. 1 (1975), 211—236.

Поступила 24. XI. 1973 г.

SUR LES SYSTÈMES RÉGULIÈREMENT HYPERBOLIQUES DU PREMIER ORDRE

V. M. Petkov, N. D. Koutev

(RÉSUMÉ)

On considère les systèmes hyperboliques du premier ordre

$$M = I\frac{\partial}{\partial t} + A(t, x)\frac{\partial}{\partial x} + B(t, x).$$

On démontre que si le problème de Cauchy est bien posé pour chaque choix de $B(t, x)$, la matrice fondamentale du symbole $\det(\xi_0 + A(t, x)\xi_1)$ ne possède pas des valeurs propres réelles non zéro dans les points, où $A(t, x)$ n'est pas diagonalisable.