ТЕОРЕМА ОТ НЬОТЕРОВ ТИП В МЕХАНИКАТА НА НЕПОТЕНЦИАЛНИТЕ СИСТЕМИ

Тодор Л. Бояджиев

Законите за запазване играят важна роля в механиката и физиката. Класическият анализ на този въпрос е свързан с името на Е. Ньотер [1]. Както е известно, теоремата на Ньотер съществено се опира на връзката, съществуваща между законите за запазване, от една страна, и инвариантността относно дадена група преобразования на интеграла „действие" на физичните системи, от друга.

В съвременната аналитична механика и особено в теоретичната физика е по-широко разпространен подходът [2—6], съгласно който законите за запазване са следствие от инвариантността на подинтегралната функция на действието (функцията на Лагранж) относно аналогична група преобразования. Използването на този подход се оказва особено целесъобразно за изследването на системите с непотенциални сили, към които класическите резултати на Ньотер са трудно приложими.

1. ФУНДАМЕНТАЛЕН ЗАКОН ЗА ЗАПАЗВАНЕ

Ще разглеждаме еволюцията на механична система материални точки в непрекъснатия интервал време $[t_1, t_2]$; с t_1 и t_2 са означени началният и крайният моменти на времето на движение. Структурата на приетия математичен модел на системата се характеризира с функцията на Лагранж $L(t, x, \dot{x})$. За опростяване на изложението ще предполагаме, че всички срещащи се функции са необходимият брой пъти диференцируеми по своите променливи. Състоянието на системата във всеки момент t се определя със задаването на декартовите координати $x \equiv \{x^{k\alpha}\}$ на частиците и скоростите им $\dot{x} \equiv \{\dot{x}^{k\alpha}\}$, където $k=1, 2, 3$; $\alpha=1, 2, \ldots, A$, а A е дадено натурално число, брой на частиците. На системата са наложени холономни връзки от вида

$$F^a(t, x)=0, \qquad a=1, 2, \ldots, \mathrm{A}; \quad \mathrm{A}<K+A, \tag{1}$$

характеризиращи взаимодействията на частиците една с друга и с външната среда. Ще означим с $R \equiv \{R_{k\alpha}\}$ външните непотенциални сили, които в общия случай могат да бъдат функции на времето, ко-

ординатите и скоростите, т. е. $R_{k\alpha}=R_{k\alpha}(t, x, \dot{x})$. С помощта на оператора на вариационната производна

$$\frac{\delta}{\delta x}=\left\{\frac{\delta}{\delta x^{k\alpha}}\right\}, \quad \frac{\delta}{\delta x^{k\alpha}}\equiv\frac{\partial}{\partial x^{k\alpha}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{x}^{k\alpha}}$$

динамическите уравнения на изучаваната система записваме в следния компактен вид:

$$\frac{\delta L}{\delta x^{k\alpha}}+R_{k\alpha}(t, x, \dot{x})=0, \tag{2}$$

където функцията $L(t, x, \dot{x}, \lambda)$ е дефинирана по следния начин:

$$L\equiv \mathbf{L}(t, x, \dot{x})+\lambda_a F^a(t, x), \tag{3}$$

а $\lambda\equiv\{\lambda_a(t)\}$ са множителите на Лагранж. По повтарящите се два пъти в един израз индекси с изключение на подчертаните отдолу навсякъде се подразбира сумиране. Непотенциалността на силите $\{R_{k\alpha}\}$ означава, че не съществува функция $\Lambda(t, x, \dot{x})$ такава, че $\{R_{k\alpha}\}$ да са вариационни производни на Λ, т. е. $R_{k\alpha}\neq\frac{\delta\Lambda}{\delta x^{k\alpha}}$. Към необходимостта да бъдат разглеждани системи с непотенциални сили водят редица задачи от теоретичната и приложна механика. В частност към този клас могат да бъдат отнесени диссипативните, жироскопичните и нехолономните системи [5, 6].

Придържайки се към схемата, предложена в монографията [2], ще разгледаме трансформационните свойства на функцията L относно преобразованията на разширеното конфигурационно пространство на системата

$$T=T(t, x), \quad X^{k\alpha}=X^{k\alpha}(t, x), \tag{4}$$

$$\Lambda_a=\Lambda_a(t, \lambda). \tag{5}$$

Да предположим, че преобразованията (4) и (5) са неизродени на целия интервал $[t_1, t_2]$. Следователно те са обратими и всяко от тях може да бъде разгледано като съвкупност от безкрайно малки преобразования (вариации) от вида

$$\delta t=T-t, \quad \delta x^{k\alpha}=X^{k\alpha}-x^{k\alpha}, \tag{6}$$

$$\delta\lambda_a=\Lambda_a-\lambda_a. \tag{7}$$

Преобразованията (4) и (5) пораждат преобразование на лагранжевата функция $L(t, x, \dot{x}, \lambda)\Rightarrow\tilde{L}(T, X, \frac{dX}{dT}, \Lambda)$ на системата. Вариацията на функцията L по определение притежава структурата

$$\delta L=\tilde{L}\left(T, X, \frac{dX}{dT}, \Lambda\right)-L(t, x, \dot{x}, \lambda). \tag{8}$$

Тъй като вариациите (6) са безкрайно малки, за производната $\frac{dX}{dT}$ намираме

$$\frac{dX^{k\alpha}}{dT}=\frac{d(x^{k\alpha}+\delta x^{k\alpha})}{d(t+\delta t)}=\frac{d(x^{k\alpha}+\delta x^{k\alpha})}{dt}\cdot\frac{1}{1+\frac{d\delta t}{dt}},$$

откъдето в линейно приближение следва

$$\frac{dX^{k\alpha}}{dT}=\dot{x}^{k\alpha}\left(1-\frac{d\delta t}{dt}\right)+\frac{d\delta x^{k\alpha}}{dt}. \tag{9}$$

Да изключим от равенството (8) величините $\left(T, X, \frac{dX}{dT}, \Lambda\right)$ с помощта на съотношенията (6), (7) и (9). Разлагайки получения израз и ограничавайки се с линейните събираеми, имаме

$$\delta L=\frac{\partial L}{\partial t}\delta t+\frac{\partial L}{\partial x^{k\alpha}}\delta x^{k\alpha}+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{k\alpha}}\left(\frac{d\,\delta x^{k\alpha}}{dt}-\dot{x}^{k\alpha}\frac{d\delta t}{dt}\right)+\frac{\partial L}{\partial \lambda_a}\delta\lambda_a. \tag{10}$$

Оттук след замяната на частната производна $\partial L/\partial t$ с пълната dL/dt окончателно намираме

$$\delta L=\frac{dL}{dt}\delta t+\frac{\partial L}{\partial x^{k\alpha}}\Delta x^{k\alpha}+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{k\alpha}}\frac{d\Delta x^{k\alpha}}{dt}+\frac{\partial L}{\partial \lambda_a}\Delta\lambda_a, \tag{11}$$

$$\delta x^{k\alpha}=\Delta x^{k\alpha}+\dot{x}^{k\alpha}\delta t. \tag{12}$$

Уравнението (11) определя структурата на пълната вариация на лагранжевата функция. Във формулите (12) първите събираеми в дясната страна представляват синхронните вариации (при $\delta t\equiv 0$), съответствуващи на различния избор на зависимостта на координатите от времето. Вторите събираеми описват изменението на координатите при варирането на времето. Ще казваме, че вариациите $\{\delta x^{k\alpha}\}$ са изохронни, ако $\delta t=C$, където C е постоянно число. В частния случай $C\equiv 0$ вариациите $\{\delta x^{k\alpha}\}$ са синхронни и $\delta x^{k\alpha}\equiv\Delta x^{k\alpha}$.

По-нататъшния анализ ще извършваме за многообразието на решенията на системата уравнения (1) и (2). Това ни позволява да изключим от израза (11) за вариацията на лагранжевата функция частните производни $\partial L/\partial x^{k\alpha}$, след което, прилагайки формулата на Лайбниц, намираме

$$\delta L+L\frac{d\delta t}{dt}+R_{k\alpha}(\delta x^{k\alpha}-\dot{x}^{k\alpha}\delta t)=\frac{d}{dt}\left[L-\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{k\alpha}}\dot{x}^{k\alpha}\right)\delta t+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{k\alpha}}\delta x^{k\alpha}\right]. \tag{13}$$

Формулата (13) ни определя структурата на пълната вариация на функцията $L(t, x, \dot{x}, \lambda)$ на интегралното многообразие на системата уравнения (1) и (2). Същественото в нея е, че вариацията δL не зависи от преобразованията на променливите $\{\lambda_a\}$.

Нека преобразованията (4) образуват група, която ще наричаме пълна група на лагранжевата функция. Да отделим от тази група такава подгрупа, за която

$$\delta L + \mathrm{L}\frac{d\delta t}{dt} + R_{k\alpha}(\delta x^{k\alpha} - \dot{x}^{k\alpha}\delta t) = \frac{d f(t)}{dt}. \tag{14}$$

Тук $f(t)$ е известна функция. Тази подгрупа ще наричаме пълна допустима група на лагранжевата функция. От съотношенията (13) и (14) следва, че

$$\frac{d}{dt}\left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{k\alpha}}\dot{x}^{k\alpha}\right)\delta t + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{k\alpha}}\delta x^{k\alpha} + f(t)\Big] = 0. \tag{15}$$

Да въведем импулсите $p \equiv \{p_{k\alpha}\}$ и функцията на Хамилтон $H(t, x, p)$ на системата посредством релациите

$$p_{k\alpha} = \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{x}^{k\alpha}} \tag{16}$$

$$H = p_{k^\alpha}\dot{x}^{k\alpha} - \mathrm{L}. \tag{17}$$

В тези означения изразът (15) приема вид

$$\frac{d}{dt}\left[p_{k\alpha}\delta x^{k\alpha} - H\delta t + f(t)\right] = 0. \tag{18}$$

Уравненията (13) и (18) ще наричаме съответно условия за допустимост и фундаментален закон за запазване. Получените резултати ни дават възможност да формулираме следната

Теорема 1. На преобразованията (4), принадлежащи към пълната допустима група на лагранжевата функция, съответствува фундаменталният закон за запазване (18).

Да отделим от пълната допустима група на лагранжевата функция такава подгрупа, че преобразованията (4), принадлежащи към последната, да оставят функцията L инвариантна, т. е. $\delta L = 0$. Нея ще наричаме собствено допустима група на лагранжевата функция. Нека преобразованията (4), отнасящи се към указаната група, са изохронни тогава условията (14) приемат вид

$$R_{k\alpha}(\delta x^{k\alpha} - \dot{x}^{k\alpha}\delta t) = \frac{d}{dt}. \tag{19}$$

Следствие. На изохронните преобразования, принадлежащи към собствено допустимата група на лагранжевата функция, съответствува фундаменталният закон за запазване (18).

При по-нататъшния анализ ще предполагаме, че $f(t)=\text{const}$. Тогава условията за допустимост, а също така фундаменталният закон за запазване се привеждат към следната форма

$$\delta L + \mathrm{L}\frac{d\delta t}{dt} + R_{k\alpha}(\delta x^{k\alpha} - \dot{x}^{k\alpha}\,\delta t) = 0, \tag{20}$$

$$R_{k\alpha}(\delta x^{k\alpha} - \dot{x}^{k\alpha}\,\delta t) = 0, \tag{21}$$

$$\frac{d}{dt}(p_{k\alpha}\delta x^{k\alpha} - H\delta t) = 0. \tag{22}$$

Този случай е особено важен за задачите на класическата аналитична динамика. Условието (21) е аналогично на известното изискване за „идеалност" на силите $\{R_{k\alpha}\}$ [6].

По такъв начин в механиката на непотенциалните системи условието за инвариантност на лагранжевата функция е необходимо, но не и достатъчно за съществуването на закони за запазване. Да отбележим, че наличието на външните непотенциални сили $\{R_{k\alpha}\}$ води само към ограничения на пълните вариации, т. е. свива класа на възможните преобразования (4), но не изменя формата на фундаменталния закон за запазване (18). В частния случай, когато всички сили $\{R_{k\alpha}\}$ са тъждествено равни на нула, идваме до резултатите, получени в монографията [2].

2. ОБОБЩЕНИЕ НА ПЪРВАТА ТЕОРЕМА НА НЬОТЕР

Нека преобразованията (4), принадлежащи към пълната допустима група на лагранжевата функция, зависят от N параметъра $e \equiv \{e^\nu\}$ по такъв начин, че на нулевите стойности на величините $\{e^\nu\}$ съответствува тъждествено преобразование

$$T = T(t,\ x,\ e),\ X^{k\alpha} = X^{k\alpha}(t,\ x,\ e), \tag{23}$$

$$T(t, x, 0) = t,\ X^{k\alpha} = (t,\ x,\ 0) = x^{k\alpha}. \tag{24}$$

Да изразим вариациите (6) чрез инфинитезималните матрици

$$\delta t = T_\nu e^\nu,\ \delta x^{k\alpha} = X^{k\alpha}_\nu e^\nu, \tag{25}$$

$$T_\nu \equiv \frac{\partial T(t, x, o)}{\partial e^\nu},\quad X^{k\alpha}_\nu \equiv \frac{\partial X^{k\alpha}(t, x, o)}{\partial e^\nu}, \tag{26}$$

Замествайки изразите (25) в условията (20), (21) и фундаменталния закон за запазване (22), привеждаме последните към следния вид:

(27) $$\delta L + L\frac{d\delta t}{dt} + R_{k\alpha}(X_{\nu}^{k\alpha} - \dot{x}^{k\alpha}T_{\nu})\,e^{\nu} = 0,$$

(28) $$R_{k\alpha}(X_{\nu}^{k\alpha} - \dot{x}^{k\alpha}T_{\nu})\,e^{\nu} = 0,$$

(29) $$\frac{d}{dt}\left[(p_{k\alpha}X_{\nu}^{k\alpha} - HT_{\nu})e^{\nu}\right] = 0.$$

С това е доказана следната

Теорема 2. На всяко преобразование (4) (или което е същото (23)), принадлежащо към пълната допустима група на лагранжевата функция, съответствува закон за запазване от вид (29).

Следствие 1. На всяко изохронно преобразование (4), принадлежащо към собствено допустимата група на лагранжевата функция, съответствува закон за запазване от вид (29).

Следствие 2. Нека параметрите $\{e^{\nu}\}$ са независими. Тогава на всяко изохронно преобразование (4), принадлежащо към собствено допустимата група на лагранжевата функция, съответствува закон за запазване от вид

(30) $$\frac{d}{dt}(p_{k\alpha}X_{\nu}^{k\alpha} - HT_{\nu}) = 0.$$

При това за условията за допустимост имаме

(31) $$R_{k\alpha}(X_{\nu}^{k\alpha} - \dot{x}^{k\alpha}T_{\nu}) = 0.$$

Ще отбележим, че този резултат е едно обобщение на първата теорема на Е. Ньотер [1].

3. СПЕЦИАЛНИ РЕАЛИЗАЦИИ НА ЗАКОНИ ЗА ЗАПАЗВАНЕ

Да разгледаме някои примери, илюстриращи ограниченията, налагани на преобразованията (4) от условията за допустимост.

1. Енергия. Нека преобразованията (4) описват инфинитезимално временно изместване

(32) $$T = t + e, \quad X^{k\alpha} = x^{k\alpha}.$$

Тук e е малка постоянна. Тъй като преобразованието (32) е изохронно, замествайки го в уравненията (27) и (31), намираме

(33) $$\frac{\partial L}{\partial t} + R_{k\alpha}\dot{x}^{k\alpha} = 0,$$

(34) $$\frac{dH}{dt} = 0.$$

Нека функцията на Лагранж е инвариантна относно преобразованието (32). От това следва, че $\partial L/\partial t=0$, т. е. L не зависи явно от времето t. В този случай условията за допустимост съгласно съотношението (30) се записват във формата

$$R_{k\alpha}\dot{x}^{k\alpha}=0 \tag{35}$$

и имат прост физически смисъл — енергията на системата се запазва (формула (34)), ако мощността на външните сили е равна на нула във всяка точка на траекторията на движение. Ще отбележим, че даже за механичните системи съотношението (34) може да има смисъл не собствено на закон за запазване на енергията, а на закон за запазване на величина с друго конкретно физично съдържание.

2. Импулс. Да разгледаме преобразование, осъществяващо инфинитезимално пространствено изместване

$$T=t,\ X^{k\alpha}=x^{k\alpha}+e^{k\alpha}. \tag{36}$$

На това преобразование при класическия анализ [2, 3] съответствува законът за запазване на импулса на системата. В случая, когато разглеждаме непотенциална система, съгласно равенството (31) идваме до следните условия за допустимост

$$R_{k\alpha}=0. \tag{37}$$

Следователно за непотенциалните системи в общия случай импулсът не се запазва. Нека обаче за някаква съвкупност от частици, характеризуеми посредством индекса $\beta=1, 2,\ldots, B$, $B<A$, условията за допустимост да се удовлетворяват, т. е. $R_{k\beta}=0$. В съответствие с това да разгледаме преобразованието

$$T=t,\ X^{k\beta}=x^{k\beta}+c^{\beta}e^{k},\ X^{k\mu}=x^{k\mu}, \tag{38}$$
$$\mu=1, 2,\ldots, A-B.$$

Тук $\{c^{\beta}\}$ са известни постоянни, характеризиращи структурата на системата, а $\{e^{k}\}$ са параметрите на преобразованието. Индексът μ приема стойности $\mu=1, 2,\ldots, A-B$. Замествайки изразите (38) във формулите (30), стигаме до следната съвкупност от закони за запазване

$$\frac{d}{dt}p_{k\beta}c^{\beta}=0, \tag{39}$$

всеки от които съществено зависи от величините $\{c^{\beta}\}$. В частния случай, когато $c^{\beta}=1$, от (39) следва законът за запазване на съответните импулси

$$\frac{d}{dt}\sum_{\beta}p_{k\beta}=0. \tag{40}$$

Подобни ситуации се реализират при някои нехолономни и диссипативни системи [6]. Ще отбележим, че до аналогични резултати стигаме и в случая, когато проекцията на вектора $\vec{R}$ върху някоя от координатните оси е нула.

3. Момент на импулса. Да разгледаме преобразование, описващо инфинитезималната ротация на системата

$$T=t,\ X^{k\alpha}=x^{k\alpha}+e_n^{k\alpha}y^{n\alpha}. \tag{41}$$

В класическата аналитична динамика матрицата $\|e_n^{k\alpha}\|$ може да бъде представена по следния начин

$$e_n^{k\alpha}=e^{m\alpha}\delta_{mn}^k, \tag{42}$$

където $\{\delta_{mn}^k\}$ са символите на Леви-Чивита [7]. Това позволява преобразованията (41) да бъдат записани във векторна форма

$$T=t,\ \vec{X}^\alpha=\vec{x}^\alpha+\vec{e}^\alpha\times\vec{y}^\alpha. \tag{43}$$

Нека относно тези преобразования функцията на Лагранж е инвариантна. От съотношенията (31), (41) и (42) стигаме до условието за допустимост

$$\sum_\alpha R_{k\alpha}y^{n\alpha}e^{m\alpha}\delta_{nm}^k=0, \tag{44}$$

което във векторен вид е следното

$$\sum(\vec{R}_\alpha\times\vec{y}^\alpha)\vec{e}^\alpha=0. \tag{45}$$

При това съответният закон за запазване съгласно (30) и (42) е

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_\alpha(\vec{p}_\alpha\times\vec{y}^\alpha)\vec{e}^\alpha\right]=0. \tag{46}$$

Нека $\{\vec{e}^\alpha\}$ и $\{\vec{y}^\alpha\}$ са векторите на въртене на частиците около дадена ос с единичен вектор $\vec{l}=\{l^k\}$ и разстоянията от частиците до произволна точка на тази ос. Тогава $\vec{e}^\alpha=e^\alpha\vec{l}$ и уравненията (46) изразяват закона за запазване на момента на импулса на системата относно тази ос

$$\frac{d}{dt}[(\vec{p}_\alpha\times\vec{y}^\alpha)\vec{l}]=0. \tag{47}$$

Условието за допустимост в този случай изразява изискването за равенство на нула момента на външните сили относно същата ос

$$(\vec{R}_\alpha\times\vec{y}^\alpha)\vec{l}=0. \tag{48}$$

Да предположим, че $\{\vec{y}^a\}$ и $\{\vec{l}^a\}$ са съответно разстоянията от частиците до дадена точка и векторите на въртенето им около нея. Тогава от съотношението (46) стигаме до закона за запазване на момента на импулса относно тази точка

$$\frac{d}{dt}(p_a \times y^a) = 0. \tag{49}$$

В разглеждания случай условието за допустимост съгласно формулата (45) има вид

$$\overline{R_a \times y^a = 0} \tag{50}$$

и изразява изискването за равенство на нула момента на външните непотенциални сили $\{\vec{R}_a\}$ относно точката.

4. Калибровъчна инварианта. Нека функцията на Лагранж на системата зависи освен от $\{t, x, \dot{x}\}$ и от комплексно спрегнатите функции $z = \{z^n\}$ и $\bar{Z} = \{\bar{z}^n\}$, $n = 1, 2, \ldots, N$ и техните производни $\{\dot{z}^n\}$ и $\{\dot{\bar{z}}^n\}$, т. е. $L(t, x, \dot{x}, z, \bar{z}, \dot{z}, \dot{\bar{z}})$, и нека на тези променливи съответствуват комплексно спрегнати „непотенциални сили“ $\{R_n(t, x, \dot{x}, z, \bar{z}, \dot{z}, \dot{\bar{z}})\}$ и $\{\bar{R}_n(t, x, \dot{x}, z, \bar{z}, \dot{z}, \dot{\bar{z}})\}$. „Динамическите“ уравнения в този случай се състоят от уравненията (1) и (2), а също така и

$$\frac{\delta L}{\delta z^n} + R_n(t, x, \dot{x}, z, \bar{z}, \dot{z}, \dot{\bar{z}}) = 0, \tag{51}$$

$$\frac{\delta L}{\delta \bar{z}^n} + \bar{R}_n(t, x, \dot{x}, z, \bar{z}, \dot{z}, \dot{\bar{z}}) = 0. \tag{52}$$

Изследвайки трансформационните свойства на функцията L относно преобразованията

$$\begin{aligned} &T = T(t, x, z, \bar{z}), \quad X^{ka} = X^{ka}(t, x, z, \bar{z}), \\ &Z^n = Z^n(t, x, z, \bar{z}), \quad \bar{Z}^n = Z^n(t, x, z, \bar{z}), \end{aligned} \tag{53}$$

стигаме до следните условия за допустимост и фундаментален закон за запазване

$$\delta L + L\frac{d\delta t}{dt} + R_{ka}(\delta x^{ka} - \dot{x}^{ka}\delta t) + R_n(\delta z^n - \dot{z}^n\delta t) + \bar{R}_n(\delta \bar{z}^n - \dot{\bar{z}}\delta t) \tag{54}$$

$$\frac{d}{dt}(p_{ka}\delta x^{ka} + \pi_n\delta z^n + \bar{\pi}_n\delta \bar{z}^n - H\delta t) = 0, \tag{55}$$

където вариациите $\{\delta z^n\}$ и $\{\delta \bar{z}^n\}$ се определят от съотношения, аналогични на съотношенията (6)

$$\delta z^n = Z^n - z^n, \quad \delta \bar{z}^n = \bar{Z}^n - z^n. \tag{56}$$

Нека преобразованията (53) образуват N-параметрична група, инфинитезималните матрици на която

$$T_\nu = \frac{\partial T(t, z, \bar{z}, x, 0)}{\partial e^\nu}, \quad X_\nu^{k\alpha} = \frac{\partial X^{k\alpha}(t, x, z, \bar{z}, 0)}{\partial e^\nu},$$

$$Z_\nu^n = \frac{\partial Z^n(t, x, z, \bar{z}, 0)}{\partial e^\nu}, \tag{57}$$

$$\bar{Z}_\nu^n = \frac{\partial \bar{Z}^n(t, x, z, \bar{z}, 0)}{\partial e^\nu}$$

удовлетворяват условията (пълна допустима група на лагранжевата функция)

$$\delta L + \mathrm{L}\frac{dT_\nu}{dt} e^\nu + [R_{k\alpha}(X_\nu^{k\alpha} - \dot{x}^{k\alpha} T_\nu) + R_n(Z_\nu^n - \dot{z}_\nu^n T_\nu) \tag{58}$$

$$+ \bar{R}_n(\bar{Z}_\nu^n - \dot{\bar{z}}^n T_\nu)] e^\nu = 0.$$

Теорема 3. На всяко преобразование (53), принадлежащо към пълната допустима група на лагранжевата функция, съответствува закон за запазване

$$\frac{d}{dt}[(p_{k\alpha} X_\nu^{k\alpha} + \pi_n Z_\nu^n + \bar{\pi}_n \bar{Z}_\nu^n - HT_\nu) e^\nu] = 0. \tag{59}$$

Следствие 1. На всяко изохронно преобразование (53), принадлежащо към собствено допустимата група на лагранжевата функция, съответствува закон за запазване от вид (59). Условията за допустимост са

$$[R_{k\alpha}(X_\nu^{k\alpha} - \dot{x}^{k\alpha} T_\nu) + R_n(Z_\nu^n - \dot{z}^n T_\nu) + \bar{R}_n(\bar{Z}_\nu^n - \dot{\bar{z}}^n T_\nu] e^\nu = 0. \tag{60}$$

Следствие 2. Нека параметрите $\{e^\nu\}$ са независими. Тогава на всяко изохронно преобразование (53), принадлежащо към собствено допустимата група на лагранжевата функция, съответствува закон за запазване от вида

$$\frac{d}{dt}(p_{k\alpha} X_\nu^{k\alpha} + \pi_n Z_\nu^n + \bar{\pi}_n \bar{Z}_\nu^n - \mathrm{H}T_\nu) = 0. \tag{61}$$

Условията за допустимост са

$$R_{k\alpha}(X_\nu^{k\alpha} - \dot{x}^{k\alpha} T_\nu) + R_n(Z_\nu^n - \dot{z}^n T_\nu) + \bar{R}_n(\bar{Z}_\nu^n - \dot{\bar{z}}^n T_\nu) = 0. \tag{62}$$

Във формулите (55) и (59) — (61) с $\{\pi_n\}$ и $\{\bar{\pi}_n\}$ са означени импулсите, спрегнати с променливите $\{z^n\}$ и $\{\bar{z}^n\}$

(63) $$\pi_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}^n}, \quad \pi_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{z}}^n},$$

а с $H(t, x, p, \pi, \bar{\pi}, \lambda)$ — функцията на Хамилтон

(64) $$H = \pi_n Z^n + \bar{\pi}_n \dot{Z}^n - L.$$

Нека преобразованията (53) имат вид

(65) $$T = t, \; X^{k\alpha} = x^{k\alpha}, \; Z^n = z^n_- - \exp\{ie^n\}, \; Z^n = \bar{z}^n_- \exp\{ie^n_-\}.$$

Замествайки (65) в условията (62) и уравнението (61), намираме

(66) $$\frac{d I_n}{dt} = 0,$$

т. е. че величините $I_n \equiv i(z^n_- \pi_n - \bar{z}^n_- \bar{\pi}_n)$ се запазват върху интегралното многообразие на системата уравнения (1), (2), (51) и (52), ако са изпълнени изискванията

(67) $$R^n_- z^n_- - \bar{R}^n_- Z^n_- = 0.$$

Съответната величина I_n ще наричаме калибровъчна инварианта. Да отбележим, че законът (66) за запазване на калибровъчната инварианта е едномерен аналог на закона за запазване на потока на плътността на вероятностите в квантовата механика, а също така на закона за запазване на тока в теориите на полето [2].

Авторът благодари на проф. д-р В. С. Ткалич за вниманието към настоящата работа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нётер, Е.: Инвариантные вариационные задачи. Сб. „Вариационные принципы механики", „Физматгиз", М., 1959.
2. Ткалич, В. С.: Теоретические основы оптимальных взаимодействий, ч. I, Аналитическая динамика. „Наукова думка", Киев, 1971.
3. Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е. М.: Механика, „Наука", ГРФМЛ, М., 1965.
4. Йост, Р.: Общая теория квантованных полей, „Мир", М., 1967.
5. Бояджиев, Т. Л.: Законы сохранения экстремальной неголономной модели. Сб. „III Всесоюзная научно-техн. конф. по прикл. аеродинамике", Киев, 1973.
6. Бояджиев, Т. Л.: Законы сохранения в механике непотенциальных систем. Сб. „Втори нац. конгрес по теор. и прил. механика, Резюмета на докладите", Варна, 1973.
7. Корн, Г., Кори, Т.: Справочник по математике. „Наука", ГРФМЛ, М., 1970.

Постъпила на 24. XI. 1973 г.

UN THÉORÈME DU TYPE DE NOETHER DANS LA MÉCANIQUE DE SYSTÈMES NONPOTENTIELS

T. Boiadjiev

(RÉSUMÉ)

On étudie le modèle d'un système nonpotentiel avec des forces nonpotentielles dans des variables lagrangiennes.

Sortant des propriétés de transformation des fonctions de Lagrange, on obtient un analogue du premier théorème de Noether. On a montré que les forces nonpotentielles amènent aux limitations supplémentaires du groupe de transformations de l'espace de configuration qui naît les lois de conservation. On donne la forme évidente de cettes limitations. On considère certaines transformations et des réalisations spéciales des lois de conservation qui leur correspondent.