ВЪРХУ РАЗРЕШИМОСТТА НА ЗАДАЧАТА НА ДИРИХЛЕ С ГРАНИЧНА ФУНКЦИЯ, ПРИТЕЖАВАЩА СТЕПЕННА ОСОБЕНОСТ

Соня Денева

Да разгледаме ограничената m-мерна ($m \geqq 2$) област g с контур Γ и елиптичното уравнение

$$Lu = \sum_{k,\, l=1}^{m} a_{kl}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l} + \sum_{k=1}^{m} b_k(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} + c(x) u = 0. \tag{1}$$

На контура Γ е зададена функция $\varphi(x)$ със следните свойства:

а) $\varphi(x)$ е определена и непрекъсната на $\Gamma - \overset{\circ}{x}$ ($\overset{\circ}{x} \in \Gamma$);

б) в сила е следната оценка:

$$|\varphi(x)| \leqq c_1 r_{x\overset{\circ}{x}}^{\alpha - m}, \quad 1 < \alpha < m, \; x \in \Gamma - \overset{\circ}{x}.^{*} \tag{2}$$

Ще разгледаме задачата на Дирихле с гранична функция $\varphi(x)$, т. е.

$$\begin{cases} Lu = 0, \\ u(x)\big|_{x \in \Gamma - \overset{\circ}{x}} = \varphi(x). \end{cases} \tag{3}$$

Функцията $u(x)$ ще наричаме решение на уравнението (1), ако тя удовлетворява следните условия:

1. $u(x) \in C^2(g) \cap C^0(g + \Gamma - \overset{\circ}{x})^{**}$.
2. В областта g функцията удовлетворява уравнението (1).
3. $u(x)\big|_{x \in \Gamma - \overset{\circ}{x}} = \varphi(x)$.
4. Съществува такава константа C_2, че

$$|u(x)| \leqq C_2 r_{x\overset{\circ}{x}}^{\alpha - m}, \quad x \in g + \Gamma - \overset{\circ}{x}.$$

Цел на настоящата работа е доказателството на теоремата за съществуването и единственост на решението на задачата (3).

---

* Под C_k ($k = 1, 2, \ldots$) ще разбираме всяка константа, която не зависи от x; тук и по-нататък r_{xy} ще означава разстоянието между точките x и y, а $r_{x\Gamma}$ — разстоянието между точката x и контура Γ.

** Определението на тези класи виж например в [1].

За да сформулираме получените в работата резултати, да въведем условията A, заключаващи се в следното:

а) уравнението (1) е равномерно елиптично, т. е. съществува такова положително число ν, че за всеки реален вектор $\xi=(\xi_1, \ldots, \xi_m)$ и за всяка точка $x \in g$ се изпълнява

$$\sum_{k,\, l=1}^{m} a_{kl}(x)\xi_k\xi_l \geqq \nu \sum_{k=1}^{m} \xi_k^2;$$

б) навсякъде в областта g е в сила $c(x) \leqq 0$;

б) коефициентите на уравнението (1) принадлежат на класовете

$$a_{kl} \in C^{2,\lambda}(g), \quad b_k \in C^{1,\lambda}(g), \quad c \in C^{0,\lambda}(g), \quad k, l=1, \ldots, m \quad 0<\lambda<1$$

г) $\Gamma \in A^{2,\lambda}$ *.

Теорема 1. Нека се изпълняват условията A. Тогава задачата (1), (3) има и при това единствено решение.

С въпроси за разрешимостта на задачи от типа (3) са се занимавали редица автори, напр. Ю. П. Красовски, Я. А. Ройтберг ([2], [3]), С. П. Гавеля [5]. В работите на Ю. П. Красовски и Я. А. Ройтберг се разглеждат задачи със степенни особености в дясната част на уравнението и в граничните условия за общи елиптични оператори от ред $2m$. Тези работи на Ю. П. Красовски и Я. А. Ройтберг се отнасят за случая на безкрайно гладки контури и коефициенти на оператора. Анализът на работата на Ю. П. Красовски за функцията на Грин, виж [4], с помощта на която той изследва показаната по-горе задача със степенни особености, показва, че в нашия случай — когато разглеждаме уравнения от втори ред, неговите изисквания към уравнението и към границата са следните: всички коефициенти на уравнението принадлежат на класа $C^4(g)$, а контурът Γ — на $C^6(g)$, т. е. те са значително по-силни, отколкото в формулираната по-горе теорема 1.

Относително по-ранни са работите на Миранда [1], Кшижански [7]. В тези работи особеността на функцията $\varphi(x)$ има ред $\frac{1}{r_{x\mathring{x}}^{\alpha-m}}$, където $\alpha=2+\lambda$, $\lambda>0$.

Първо ще покажем единствеността на решението на задачата (1), (3).

Лема 1. Ако се изпълняват условията A, то задачата (1), (3) има не повече от едно решение.

Доказателство. Да допуснем, че съществуват две различни решения $u_1(x)$ и $u_2(x)$. Тогава тяхната разлика $v(x)=u_1(x)-u_2(x)$ удовлетворява условията 1—4 на дефиницията на решение с $\varphi(x)\equiv 0$ върху $\Gamma-\mathring{x}$. Ще покажем, че

* Вж забележката ** на стр. 411.

$$v(x) \equiv 0, \quad x \in g.$$

Да означим с Γ_ρ множеството от точки $x \in g$, за които $r_{x\Gamma} = \rho$. От г) на условията A следва, че при достатъчно малки неотрицателни $\rho (0 \leqq \rho \leqq \rho_1)$ това множество е $m-1$-мерна повърхнина, която ограничава област $g_\rho \subset g$, като $\Gamma_\rho \in A^{1,\lambda}$. Нека $L_\rho(x, y)$ е функция на Грин за задачата на Дирихле за уравнението (1) в областта g_ρ. Такава функция съществува ([1], стр. 83, т. 21, 4). Да фиксираме точката $\tilde{x} \in g$. Ще се намери такова положително число $\rho_2 < \rho_1$, че при всички $0 \leqq \rho \leqq \rho_2$ се изпълнява $\tilde{x} \in g_\rho$. Получаваме от формулата на Стокс

$$v(\tilde{x}) = -\int_{\Gamma\rho} \frac{d L_\rho(\tilde{x}, y)}{d \nu_\rho} v(y) ds_y,$$

където с ν_ρ сме означили направлението на конормалата в точката $y \in \Gamma_\rho$. При $0 \leqq \rho \leqq \frac{\rho_2}{2}$ имаме

$$\left| \frac{d L_\rho(\tilde{x}, y)}{d \nu_\rho} \right| \leqq c_3,$$

откъдето се получава неравенството

$$|v(\tilde{x})| \leqq c_3 \int_{\Gamma\rho} |v(y)| ds_y. \tag{4}$$

Да означим с $K(\overset{\circ}{x}, \delta)$ множеството точки $x \in g$, за които $r_{x\overset{\circ}{x}} \leqq \delta$. От 4. на дефиницията на решение следва, че на всяко положително ε може да се съпостави такова положително δ_1, че за всички $0 < \delta < \delta_1$ и $0 \leqq \rho \leqq \frac{\rho_2}{2}$ се изпълнява неравенството

$$\int_{\Gamma_\rho \cap k(\overset{\circ}{x}, \delta)} |v(y)| ds_y < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5}$$

Очевидно

$$\int_{\Gamma_\rho \cap k(\overset{\circ}{x}, \delta)} v(y) ds_y \leqq \int_{\Gamma_\rho \cap k(\overset{\circ}{x}, \delta)} c r_{y\overset{\circ}{x}}^{\alpha-m} ds_y \leqq c \int_0^{2\delta} \frac{r^{m-2}}{r^{m-\alpha}} dr$$

$$= c \int_0^{2\delta} r^{\alpha-2} dr = c r^{\alpha-1} \Big|_0^{2\delta} \underset{\delta \to 0}{\longrightarrow} O, \text{ тъй като } \alpha > 1.$$

В затворената област $g+\Gamma-K(\overset{\circ}{x}, \delta)$ функцията $v(x)$ е равномерно непрекъсната и

$$\lim_{\substack{x\to x' \\ x'\in\Gamma \mid K(\overset{\circ}{x},\ \delta)}} v(x)=0.$$

В такъв случай съществува число ρ_3, може би зависещо от $\delta\left(0\leqq\rho_3\leqq\frac{\rho_2}{2}\right)$, така че за всички $0\leqq\rho\leqq\rho_3$ се изпълнява неравенството

$$\int\limits_{\Gamma_\rho \mid [K(\overset{\circ}{x},\ \delta)\cap\Gamma_\rho]} |v(y)|\, ds_y < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6}$$

От неравенствата (4)—(6) следва

$$|v(\tilde{x})| \leqq c_3(\rho_2)\int\limits_{\Gamma_\rho \mid [K(\overset{\circ}{x},\ \delta)\cap\Gamma_\rho]} |v(y)|\, ds_y + c_3\int\limits_{\Gamma_\rho\cap K(\overset{\circ}{x},\ \delta)} |v(y)|\, ds_y$$

$$< c_3\left(\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\right),$$

$$|v(\tilde{x})| < c_3\varepsilon.$$

Тъй като ε е произволно, получаваме $v(\tilde{x})=0$, с което лемата е доказана.

Сега ще докажем съществуването на решение на нашата задача.

Лема 2. Ако се изпълняват условията A, то задачата (1), (3) има решение, което се представя във вида

$$u(x)=-\int \frac{d\,L(x,\ y)}{d\,\nu_y}\varphi(y)\, ds_y. \tag{7}$$

Доказателство. Трябва да покажем, че функцията, зададена с равенството (7), удовлетворява условията 1.—4. на дефиницията на решение. Че условията 1.—3. са удовлетворени, следва от теоремата 21. 4 (стр. 83) и теорема 15. 2 (стр. 46)—[I]. Ще покажем, че се удовлетворява и условие 4.

Нека $K(\overset{\circ}{x}, \mu)$ е сфера с радиус μ и с център в точката $\overset{\circ}{x}$. В затворената област $g+\Gamma-K(\overset{\circ}{x}, \mu)$ функцията $u(x)$ е непрекъсната, т. е.

$$|u(x)|\leqq c_4(\mu), \quad x\in g+\Gamma-K(\overset{\circ}{x}, \mu). \tag{8}$$

Нека сега $x\in K(\overset{\circ}{x},\mu)\cap g$. Съществува такова положително число ρ, че за всяко $x\in K(\overset{\circ}{x}, \mu)$ се изпълнява

$$L(x, y)=H(y, x)-H(y, x^*)+V(x, y),$$

където $L(x, y)$ е функцията на Грин на задачата на Дирихле за уравнението (1)

$$H(y, x)=\begin{cases} \dfrac{1}{(m-2)\,\omega\, m\sqrt{A(x)}}\left(\sum\limits_{r,\, s=1}^{m} A_{rs}(x)(x_s-y_s)(x_r-y_r)\right)^{\frac{2-m}{2}}, & m\geqq 3, \\[2ex] \dfrac{1}{2\pi\sqrt{A(x)}}\ln\left(\sum\limits_{r,\, s=1}^{2} A_{rs}(x)(x_s-y_s)(x_r-y_r)\right)^{-\frac{1}{2}}, & m=2. \end{cases}$$

$$A(x)=\det\|a_{rs}(x)\|,$$

а с $A_{rs}(x)$ сме означили отношението на алгебричното допълнение на елемента $a_{rs}(x)$ към детерминанта $A(x)$, с ω_m — лицето на m-мерната единична сфера и с x^* — точка, разположена на една конормала с точката x към контура Γ и симетрична на Γ.

Функцията $V(x, y)$ удовлетворява условията

$$D_y^s V(x, y)=O(r_{xy}^{2-m-s+\alpha}), \quad s=0,\ 1 \text{ (виж [6])}.$$

Като използваме това представяне, получаваме

$$u(x)=-\int\limits_{\Gamma}\left[\frac{dH(y, x)}{d\nu_y}-\frac{dH(y, x^*)}{d\nu_y}\right]\varphi(y)\,ds_y-\int\limits_{\Gamma}\frac{dV(x, y)}{d\nu_y}\varphi(y)\,ds_y$$

$$\equiv I_1(x)+I_2(x).$$

Вторият интеграл в дясната част на последното равенство се оценя като $O(r_{x\overset{\circ}{x}}^{1+\alpha-m})$ ([1], Т. 2, II, стр. 30). Да оценим първия интеграл. Имаме

$$\frac{dH(y, x)}{d\nu_y}-\frac{dH(y, x^*)}{d\nu_y}=O(r_{x\Gamma}\, r_{xy}^{-m}).$$

Оттук и от равенствата (2) получаваме

$$|I_1(x)|\leqq c_5\, r_{x\Gamma}\int\limits_{\Gamma} r_{xy}^{-m}\, r_{\overset{\circ}{x}y}^{\alpha-m}\, d\, s_y$$

$$(9)\qquad =c_5\, r_{x\Gamma}\int\limits_{K(\overset{\circ}{x},\, 2\mu)\cap\Gamma} r_{xy}^{-m}\, r_{\overset{\circ}{x}y}^{\alpha-m}\, ds_y+c_5\, r_{x\Gamma}\int\limits_{\Gamma/K(\overset{\circ}{x},\, 2\mu)} r_{xy}^{-m}\, r_{\overset{\circ}{x}y}^{\alpha-m}\, ds_y$$

$$\equiv I_3(x)+I_4(x).$$

Тук $K(\overset{\circ}{x}, 2\mu)$ е сфера с радиус 2μ и с център точката $\overset{\circ}{x}$. Положителното число μ избираме толкова малко, че $K(\overset{\circ}{x}, 2\mu) \subset K(\overset{\circ}{x}, R)$, където $K(\overset{\circ}{x}, R)$ е сфера на Ляпунов с радиус R и с център точката $\overset{\circ}{x}$. При $x \in K(\overset{\circ}{x}, \mu)$, $y \in \Gamma - K(\overset{\circ}{x}, 2\mu)$ имаме $r_{xy} \geqq \mu$, $r_{\overset{\circ}{x} y} \geqq 2\mu$, откъдето

$$0 \leqq I_4(x) \leqq c_6(\mu) r_{x\Gamma}$$

$$(10) \qquad I_4(x) = c_5 r_{x\Gamma} \int\limits_{\Gamma \mid K(\overset{\circ}{x}, 2\mu)} r_{xy}^{-m} r_{\overset{\circ}{x} y}^{\alpha-m} ds_y \leqq c_5 r_{x\Gamma} \int\limits_{\Gamma \mid K(\overset{\circ}{x}, 2\mu)} 2^{\alpha-m} \mu^{\alpha-m} ds_y$$

$$= c_6(\mu) r_{x\Gamma}.$$

Да оценим интеграла $I_3(x)$. Имаме

$$c_5 r_{x\Gamma} \int\limits_{K(\overset{\circ}{x}, 2\mu) \cap \Gamma} r_{xy}^{-m} r_{\overset{\circ}{x} y}^{\alpha-m} ds_y = c_5 - r_{x\Gamma} \int\limits_{K(\overset{\circ}{x}, 2\mu) \cap \Gamma \cap \{r_{x\overset{\circ}{x}} \leqq r_{\overset{\circ}{x} y} \leqq r_{xy}\}} r_{xy}^{-m} r_{\overset{\circ}{x} y}^{\alpha-m} d s_y$$

$$+ c_5 r_{x\Gamma} \int\limits_{K(\overset{\circ}{x}, 2\mu) \cap \Gamma \cap \{r_{x\overset{\circ}{x}} \leqq r_{xy} \leqq r_{\overset{\circ}{x} y}\}} r_{xy}^{-m} r_{\overset{\circ}{x} y}^{\alpha-m} d s_y$$

$$+ c_5 r_{x\Gamma} \int\limits_{K(\overset{\circ}{x}, 2\mu) \cap \Gamma \cap \{r_{\overset{\circ}{x} y} \leqq r_{x\overset{\circ}{x}}\} \cap \{r_{\overset{\circ}{x} y} \leqq r_{xy}\}} r_{xy}^{-m} r_{\overset{\circ}{x} y}^{\alpha-m} ds_y$$

$$+ c_5 r_{xy} \int\limits_{K(\overset{\circ}{x}, 2\mu) \cap \Gamma \cap \{r_{xy} \leqq r_{x\overset{\circ}{x}}\} \cap \{r_{xy} \leqq r_{\overset{\circ}{x} y}\}} r_{xy}^{-m} r_{\overset{\circ}{x} y}^{\alpha-m} ds_y$$

$$= I_5(x) + I_6(x) + I_7(x) + I_8(x),$$

както и

$$0 \leqq I_5(x) \leqq c_5 \int\limits_{K(\overset{\circ}{x}, 2\mu) \cap \Gamma \cap \{r_{x\overset{\circ}{x}} \leqq r_{\overset{\circ}{x} y} \leqq r_{xy}\}} r_{xy}^{-m} r_{\overset{\circ}{x} y}^{\alpha-m} d s_y$$

$$(12) \qquad \leqq c_5 \int\limits_{K(\overset{\circ}{x}, 2\mu) \cap \Gamma \cap \{r_{x\overset{\circ}{x}} \leqq r_{\overset{\circ}{x} y} \leqq r_{xy}\}} r_{\overset{\circ}{x} y}^{1+\alpha-2m} d s_y.$$

Да въведем декартова координатна система $N(\overset{\circ}{x})$. Координатното начало да поставим в точката $\overset{\circ}{x}$, а оста x_m да насочим по вътрешната нормала. Нека $\overset{\circ}{y}_1, \overset{\circ}{y}_2, \ldots, \overset{\circ}{y}_{m-1}, \overset{\circ}{y}_m$ са координатите на точката $y \in \Gamma$. Да означим

$$t^2 = \sum_{k=1}^{m-1} y_k^2.$$

Лесно се вижда, че $r_{\overset{\circ}{x} y} \geqq t$. Оттук

$$I_5(x) \leqq c_6 \int\limits_{r_{x\mathring{x}}}^{2\mu} t^{\alpha-1-m}\, dt = O\left(r_{x\mathring{x}}^{\alpha-m}\right) \tag{13}$$

Аналогично на (12) получаваме

$$0 \leqq I_6(x) = c_5 r_{x\Gamma} \int\limits_{K(\mathring{x},\, 2\mu)\cap\Gamma\cap\left\{r_{x\mathring{x}} \leqq r_{xy} \leqq r_{\mathring{x}y}\right\}} r_{xy}^{-m} r_{\mathring{x}y}^{\alpha-m}\, ds_y$$

$$\leqq c_5 \int\limits_{K(\mathring{x},\, 2\mu)\cap\Gamma\cap\left\{r_{x\mathring{x}} \leqq r_{xy} \leqq r_{\mathring{x}y}\right\}} r_{xy}^{1-m} r_{xy}^{\alpha-m}\, ds_y \leqq c_5 \int\limits_{K(\mathring{x},\, 2\mu)\cap\Gamma\cap\left\{r_{x\mathring{x}} \leqq r_{xy} \leqq r_{\mathring{x}y}\right\}} r_{xy}^{1+\alpha-2m}\, ds_y .$$

Нека x' е точката, получена при пресичането на контура Γ с нормалата, спусната от x към Γ. Да въведем декартова координатна система, чието начало съвпада с x', а оста x_m е насочена по вътрешната нормала. В тази система координати $y=(y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}, y_m)$. Да обозначим $\tau^2 = \sum\limits_{k=1}^{m-1} y_k^2$. Тогава

$$I_6(x) \leqq c_6 \int\limits_{r_{x\mathring{x}}}^{4\mu} r^{\alpha-1-m}\, d\tau = O\left(r_{x\mathring{x}}^{\alpha-m}\right).$$

По-нататък

$$0 \leqq I_7(x) \leqq c_5 \int\limits_{K(\mathring{x},\, 2\mu)\cap\Gamma\cap\left\{r_{\mathring{x}y} \leqq r_{x\mathring{x}}\right\}\cap\left\{r_{\mathring{x}y} \leqq r_{xy}\right\}} r_{xy}^{1-m} r_{\mathring{x}y}^{\alpha-m}\, ds_y$$

$$\leqq \frac{c_5 r_{x\mathring{x}}^{1-m}}{2^{1-m}} \int\limits_{K(\mathring{x},\, 2\mu)\cap\Gamma\cap\left\{r_{\mathring{x}y} \leqq r_{x\mathring{x}}\right\}\cap\left\{r_{\mathring{x}y} \leqq r_{xy}\right\}} r_{x_0 y}^{\alpha-m}\, ds_y \tag{15}$$

$$\leqq c_7 r_{x\mathring{x}}^{\alpha-m} \int\limits_0^{r_{x\mathring{x}}} t^{\alpha-2}\, dt = O\left(r_{x\mathring{x}}^{\alpha-m}\right)$$

Тук използвахме това, че при $r_{\mathring{x}y} \leqq r_{xy}$ е в сила неравенството

$$r_{xy} \geqq \frac{1}{2} r_{x\mathring{x}} .$$

Освен това поради $\alpha > 1$ последният интеграл клони към нула.

Накрая остана да оценим интеграла $I_8(x)$, който е равен на 0 при $r_{x\Gamma} = r_{x\mathring{x}}$.

Имаме $\left(\text{понеже } r_{\mathring{x}y} \geqq \frac{1}{2} r_{x\mathring{x}}\right)$

$$(16)\qquad 0 \leqq I_8(x) \leqq c_5\, r_{x\Gamma}\, r_{x\overset{\circ}{x}}^{\alpha-m} \int_0^{4\mu} \frac{\tau^{m-2}\, d\tau}{(r_{x\Gamma}^2+\tau^2)^{\frac{m}{2}}}$$

$$= c_5 - r_{x\overset{\circ}{x}}^{\alpha-m} \int_0^{\frac{4\mu}{r_{x\Gamma}}} \frac{\tau^{m-2}\, d\tau}{(1+\tau^2)^{\frac{m}{2}}} \leqq c_2\, r_{x\overset{\circ}{x}}^{\alpha-m} \int_0^{\infty} \frac{\tau^{m-2}\, d\tau}{(1+\tau^2)^{\frac{m}{2}}} = O\left(r_{x\overset{\circ}{x}}^{\alpha-m}\right).$$

Оценките (11)—(16) ни дават

$$I_1(x) = O\left(r_{x\overset{\circ}{x}}^{\alpha-m}\right),$$

което заедно с оценката на $I^2(x)$ показва, че

$$(17)\qquad u(x) = O\left(r_{x\overset{\circ}{x}}^{\alpha-m}\right).$$

Лемата е доказана.

В горните разглеждания уравнението беше хомогенно ($f \equiv 0$). Ако $f \not\equiv 0$, то представяйки решението като сума на обемния потенциал и нова функция u, ще получим за u разгледаната задача.

От доказателствата е ясно, че теорема 1. е в сила и в този случай, когато на контура Г е зададено крайно множество точки x_1, $x_2, \ldots, x_N$, в които граничната функция $\varphi(x)$ има степенни особености със степен, не по-голяма от α, където $\alpha < m-1$.

Като използваме представянето (7) на решението на задачата (3) и оценката за производните на функцията $V(x, y)$ (вж. (9)), лесно получаваме оценки за производните на решението на задача (3), които са аналогични на оценката (17).

ЛИТЕРАТУРА

1. Миранда, К.: Уравнения с частными производными эллиптического типа. М., ИЛ, 1957.
2. Красовский, Ю. П.: Дифференциальные свойства решений эллиптических граничных задач со степенными особенностями в правых частях. Изв. АН СССР, серия матем., 35 (1971), 202—209.
3. Ройтберг, Я. А.: О разрешимости общих граничных задач для эллиптических уравнений при наличии степенных особенностей в правых частях. Укр. Матем. журн., 20, № 3 (1968), 412—417.
4. Красовский, Ю. П.: Свойства функции Грина и обобщённые решения эллиптических граничных задач. Изв. АН СССР, серия матем., 33 (1969).
5. Гавеля, С. П.: О решениях линейной эллиптической системы дифференциальных уравнений с разрывным свободным членом. Укр. матем. журнал, 12, № 3 (1960).

6. Лоссиевская, Т. В.: О поведении вблизи границы функции Грина задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка и её производных. Матем. сборник (под печат).
7. Krzyzanski, M.: Sur les solutions de l'équation linéaire du type elliptique discontinues sur la frontière du domaine de leur existence. Studia Math., 11 (1950), 95—125.

Постъпила на 24. XI. 1973 г.

SUR LA RÉSOLUBILITÉ DU PROBLÈME DE DIRICHLET AVEC UNE FONCTION DE FRONTIÈRE POSSÉDANTE UNE SINGULARITÉ DE PUISSANCE

S. Dénéva

(RÉSUMÉ)

Dans le travail on étudie le problème du Dirichlet pour un opérateur linéaire du type elliptique de 2e ordre:

$$(1)\qquad \begin{cases} Lu=\sum\limits_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}+\sum\limits_{i=1}^{m} b_i(x)\dfrac{\partial u}{dx_i}+c(x)\,u=0\,, \\ u(x)\big|_{x\in\Gamma-\overset{\circ}{x}}=\varphi(x)\,. \end{cases}$$

La fonction de frontière $\varphi(x)$ a dans le point $\overset{\circ}{x}$ une singularité de puissance $|\varphi(x)|<Cr^{\alpha-m}_{x\overset{\circ}{x}}$, $\alpha>1$. Une solution du problème est une fonction $u(x)$ qui satisfait les conditions suivantes:

1. $u(x)\in C^2(g)\cap C^0(g+\Gamma-\overset{\circ}{x})$;
2. $u(x)$ satisfait dans le domaine g l'équation $Lu=0$;
3. $u\big|_{\Gamma-\overset{\circ}{x}}=\varphi(x)$;
4. $|u(x)|\leqq Cr^{\alpha-m}_{x\overset{\circ}{x}}$.

Dans le travail on démontre que si les coefficients de l'opérateur L et la frontière Γ satisfont aux conditions $a_{ij}\in C^{2,\lambda}$, $b_i\in C^{(1,\lambda)}$ et $c\in C^{(0,\lambda)}$, $c\leqq 0$, $\Gamma\in A^{(2,\lambda)}$, on a pour le problème (1) un théorème d'existence et d'unicité de la solution.