О СКОРОСТИ РАЦИОНАЛЬНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Петр Г. Бояджиев

1. В теории интерполяции аналитических функций рациональными можно выделить две основные группы проблем. Первая из них объединяет задачи, относящиеся к интерполяции рациональными функциями с фиксированной таблицей полюсов (например интерполяция полиномами). Эта группа проблем мало чем отличается от полиномиальной интерполяции — нужно заботиться только о целесообразном выборе узлов интерполяции. Первые результаты в этом направлении были получены Уолшем еще в 30-х годах. В работах Уолша построены широкие классы сходящихся интерполяционных процессов, обнаружено явление двойственности при рациональной интерполяции и получены многие приложения к вопросам аппроксимации аналитических функций рациональными с фиксированной таблицей полюсов (см. [3], гл. VIII и IX). В последующих работах эти исследования получили дальнейшее развитие и нашли новые приложения ([1], [2], [4], [5]). Особенно интересна работа [1], в которой получена полная характеристика интерполяционных процессов, сходящихся — с учетом двойственности — для произвольных аналитических функций.

Вторая группа проблем характеризуется тем, что рассматриваемые в ней задачи связаны с целесообразным выбором не только узлов интерполяции, но и полюсов интерполирующих функций так, чтобы получить как можно большую скорость аппроксимации. В настоящей статье рассматриваются задачи такого типа.

Введем необходимые обозначения и определения.

Пусть E — компакт в расширенной комплексной плоскости C и D — открытое множество, содержащее E. Будем предполагать, что любая компонента D имеет непустое пересечение с E. Тем самым D состоит из конечного числа компонент $D_1, D_2, \ldots, D_p$. Положим $F=\bar{C}\setminus D$ и $R=\bar{C}\setminus(E\cup F)=D\setminus E$. Ясно, что R — открытое множество в $\bar{C}$.

Определение 1. Пара (E, F) (или тройка (R, E, F)) называется плоским конденсатором.

Определение 2. Конденсатор (E, F) называется регулярным, если существует функция $u(z)$, гармоническая в R, непрерывная в R и такая, что $u_{\partial E}=0$, $u_{\partial F}=1$.

Всюду в этой статье будем рассматривать только регулярные конденсаторы. Заметим, что с точности до множества гармонической емкости нуль содержащегося в $\partial E \cup \partial F$ любой конденсатор регулярен.

2. Емкость конденсатора.

Пусть (E, F) — регулярный конденсатор. Рассмотрим множество $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \ldots \cup \Gamma_5$, состоящее из конечного числа аналитических кривых Жордана, содержащихся в R и отделяющих E от F однократно. При этом слово „однократно" надо понимать в следующем смысле: множество $\overline{C} \setminus \Gamma$ состоит из двух открытых подмножеств U и V таких, что $F \subset U$, $F \subset V$ и $\partial U = \partial V = \Gamma$. В этом случае принято также говорить, что Γ — гомологический класс для множества R.

Определение 3. Число

$$c = c(E, F) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial u(\zeta)}{\partial \nu} ds,$$

где ν — нормаль к Γ, направленная из U к V, называется емкостью конденсатора (E, F).

Ясно, что $c(E, F)$ не зависит от выбора Γ и что $c(E, F) = c(F, E)$.

Мы положим $\rho = \rho(E, F) = e^{\frac{1}{c}}$ и будем называть его римановым модулем множества R. Название это вызвано тем, что в случае, когда R — двухсвязная область, ρ совпадает с обычным римановым модулем R, т. е. с радиусом внешнего круга при конформном отображении R на кольцо $1 < |w| < \rho$.

3. Интерполяция аналитических функций.

Перейдем к формулировке интересующей нас задачи.

Обозначим через $A(D)$ класс функций, однозначных и аналитических в D. Кроме того, если функция $f(z)$ определена на E, то через $\|f\|_E$ будем обозначать максимум $|f(z)|$ на E:

$$\|f\|_E = \max_{z \in E} |f(z)|.$$

Пусть $\alpha = \{a_{nk}\}$, $n = 1, 2, \ldots$, $k = 1, 2, \ldots, n$ — таблица точек, принадлежащих E и $\beta = \{b_{nk}\}$, $n = 1, 2, \ldots$, $k = 1, 2, \ldots, n$ — таблица точек, принадлежащих F. Если $f \in A(D)$, то через $r_{n-1}(z, f, \alpha, \beta)$ будем обозначать рациональную функцию порядка $\leq n-1$, имеющую полюсы в точках $b_{n1}, b_{n2}, \ldots b_{n,n-1}$ и интерполирующую $f(z)$ в точках $a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nn}$; при этом имеется в виду кратное интерполирование: если точка a встречается среди точек $a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nn}$ k раз, то требуется, чтобы

$$r_{n-1}^{(i)}(a, f, \alpha, \beta) = f^{(i)}(a), \quad i = 0, 1, 2, \ldots, k-1,$$

где через $\varphi^{(i)}(z)$, как обычно, обозначается i-ая производная функции $\varphi(z)$.

Определение 4. Пару таблиц (α, β), $\alpha \subset E$, $\beta \subset F$, будем называть интерполяционным процессом для класса $A(D)$.

Пусть (α, β) — фиксированный интерполяцонный процесс.

Тогда число

$$r(\alpha, \beta) = \sup_{f \in A(D)} \lim_{n \to \infty} | f(z) - r_{n-1}(z, f, \alpha, \beta) |_E^{\frac{1}{n}}$$

является мерой того, насколько быстро для любой функции $f \in A(D)$ последовательность $\{r_{n-1}(z, f, \alpha, \beta)\}$ стремится к $f(z)$ равномерно на компакте E; именно для любой функции $f \in A(D)$ порядок стремления $r_{n-1}(z, f, \alpha, \beta)$ к $f(z)$ в метрике $|\,.\,|_E$ не превосходит $[r(\alpha, \beta)]^n$.

В настоящей работе мы фиксировать процесс (α, β) не будем, а будем интересоваться вопросом о нахождении наилучшего порядка, с которым равномерно на компакте E можно приблизить любую функцию $f \in A(D)$ методом интерполирования. Иными словами, нас будет интересовать нахождение величины $r = \inf r(\alpha, \beta)$, где нижняя грань берется по всем интерполяционным процессам (α, β). Кроме того, мы покажем, что она достигается, т. е. существует такой интерполяционный процесс (α^*, β^*), что $r = r(\alpha^*, \beta^*)$.

Эта задача решается в терминах емкости конденсатора.

Прежде чем доказывать основную теорему (теорема 1), мы установим несколько вспомогательных предложений.

Лемма 1. Пусть (E, F) — произвольный регулярный конденсатор. Тогда существуют единичные, неотрицательные меры μ, $\operatorname{supp}\mu \subset E$ и ν, $\operatorname{supp}\nu \subset F$ такие, что для любого $z \in R$ выполняется равенство

$$\frac{1}{c}[u(z) - d] = \int_{\partial E} \ln|\zeta - z|\, d\mu(\zeta) - \int_{\partial F} \ln|\zeta - z|\, d\nu(\zeta), \tag{1}$$

где $c = c(E, F)$ — емкость конденсатора (E, F), а

$$d = \begin{cases} u(\infty), & \text{если } E \cup F \text{ ограничено;} \\ 0, & \text{если } E \text{ неограничено;} \\ 1, & \text{если } F \text{ неограничено.} \end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим только случай, когда F — неограничено (остальные доказываются аналогично).

Пусть $\Gamma_n^1 = \left\{ z : u(z) = \frac{1}{n} \right\}$ и $\Gamma_n^2 = \left\{ z : u(z) = 1 - \frac{1}{n} \right\}$. Γ_n^1 и Γ_n^2 состоят из конечного числа аналитических кривых Жордана. Если через R_n обозначим множество

$$R_n = \left\{ z \in R : \frac{1}{n} < u(z) < 1 - \frac{1}{n} \right\},$$

то ясно, ввиду непрерывности $u(z)$ на $\bar{R}$, что последовательность R_n является исчерпывающей для R. Тогда для любого $z \in R$ найдется индекс n_0 такой, что при $n > n_0$ имеет место формула Грина

$$(2) \qquad u(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma_n^1} \left[u(\zeta) \frac{\partial \ln |\zeta - z|}{\partial \nu} - \ln |\zeta - z| \frac{\partial u(\zeta)}{\partial \nu} \right] ds$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma_n^2} \left[u(\zeta) \frac{\partial \ln |\zeta - z|}{\partial \nu} - \ln |\zeta - z| \frac{\partial u(\zeta)}{\partial \nu} \right] ds$$

(ν — внешняя нормаль относительно R_n). Отсюда, пользуясь определением Γ_n^1 и Γ_n^2, получаем

$$(3) \qquad u(z) = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma_n^1} \ln |\zeta - z| \frac{\partial u(\zeta)}{\partial \nu}$$

$$+ 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma_n^2} \ln |\zeta - z| \frac{\partial u(\zeta)}{\partial \nu} ds.$$

Меры μ_n, $\operatorname{supp} \mu_n = \Gamma_n^1$ и ν_n, $\operatorname{supp} \nu_n = \Gamma_n^2$, определенные равенствами

$$d\mu_n(\zeta) = -\frac{1}{2\pi c} \frac{\partial u(\zeta)}{\partial \nu} ds, \quad \zeta \in \Gamma_n^1,$$

$$d\nu_n(\zeta) = \frac{1}{2\pi c} \frac{\partial u(\zeta)}{\partial \nu} ds, \quad \zeta \in \Gamma_n^2$$

($c = c(E, F)$), единичные и неотрицательные. При помощи этих мер равенство (3) можем записать в виде

$$(4) \qquad \frac{1}{c} \left[u(z) - 1 + \frac{1}{n} \right] = \int\limits_{\Gamma_n^1} \ln |\zeta - z| \, d\mu_n - \int\limits_{\Gamma_n^2} \ln |\zeta - z| \, d\nu_n.$$

По хорошо известным теоремам функционального анализа из последовательностей $\{\mu_n\}$ и $\{\nu_n\}$ можем выбрать слабо сходящиеся подпоследовательности. Это означает, что существует подпоследовательность натуральных чисел $\{n_k\}$ и единичные неотрицательные меры μ и ν такие, что для любой непрерывной функции $f(\zeta)$ выполняются равенства

$$\lim_{n\to\infty}\int f(\zeta)\,d\mu_{n_k}(\zeta)=\int f(\zeta)\,d\mu(\zeta);$$

(5)

$$\lim_{n\to\infty}\int f(\zeta)\,d\nu_{n_k}(\zeta)=\int f(\zeta)\,d\nu(\zeta).$$

Ясно, кроме того, что $\operatorname{supp}\mu\subset\partial E$, $\operatorname{supp}\nu=\partial F$. Тогда из (4), переходя в предел по подпоследовательности $\{n_k\}$, получим (1). Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть $\sigma(\zeta,\xi)=\mu(\zeta)\times\nu(\zeta)$ — единичная, неотрицательная мера на $\partial E\times\partial F$, являющаяся произведением мер μ и ν из леммы 1. Тогда функция

$$u(z,t)=\int\limits_{\partial E\times\partial F}\ln\left|\frac{t-\zeta}{z-\zeta}\cdot\frac{z-\xi}{t-\xi}\right|d\sigma(\zeta,\xi) \tag{6}$$

удовлетворяет следующим условиям:

а) $u(z,t)$ полунепрерывна снизу на $(E\cup R)\times(R\cup F)$;

б) $u(z,t)=\frac{1}{c}[u(t)-u(z)]$, $(z,t)\in R\times R$;

в) $u(z,t)\leqq\frac{1}{c}=\ln\rho$, $(z,t)\in E\times F$.

Здесь $u(z)$ — введенная выше гармоническая мера ∂F относительно R.

Доказательство. а. Так как в любой точке $(z,t)\in(E\cup R)\times(R\cup F)$ $u(z,t)$ является суммой логарифмических потенциалов, то она полунепрерывна снизу там.

б. Пусть $(z,t)\in R\times R$. По теореме Фубини имеем

$$u(z,t)=\int\limits_{\partial E}\ln\left|\frac{t-\zeta}{z-\zeta}\right|d\mu(\zeta)+\int\limits_{\partial F}\ln\left|\frac{z-\xi}{t-\xi}\right|d\nu(\xi). \tag{7}$$

С другой стороны, если в (1) заменим z на t и вычтем из (1) то получим

$$\frac{1}{c}[u(t)-u(z)]=\int\limits_{\partial E}\ln\left|\frac{t-\zeta}{z-\zeta}\right|d\mu(\zeta)+\int\limits_{\partial F}\ln\frac{z-\xi}{t-\xi}\,d\nu(\xi). \tag{8}$$

Из (7) и (8) вытекает б).

в. Пусть $(z_0,t_0)\in E\times F$. Рассмотрим три случая.

1. $z_0\in\mathring{E}$, $t_0\in\mathring{F}$, где через $\mathring{V}$ обозначена, как обычно, внутренность множества V. Тогда можем записать

$$(9)\qquad u(z_0,\ t_0)=\int\limits_{\partial E}\ln\left|\frac{t_0-\zeta}{z_0-\zeta}\right|d\mu(\zeta)+\int\limits_{\partial F}\ln\left|\frac{z_0-\zeta}{t_0-\zeta}\right|\partial\nu(\zeta)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{1}{2\pi c}\int\limits_{\Gamma^1_{n_k}\cup\Gamma^2_{n_k}}\ln|t_0-\zeta|\frac{\partial u(\zeta)}{\partial\nu}+\frac{1}{2\pi c}\int\limits_{\Gamma^1_{n_k}\cup\Gamma^2_{n_k}}\ln|z_0-\zeta|\frac{\partial u(\zeta)}{\partial\nu}ds\right\}.$$

Но если $p\in\mathring{E}\cup\mathring{F}$, то

$$(10)\qquad \frac{1}{2\pi c}\int\limits_{\Gamma^1_n\Gamma^2_n}\left[\ln|p-\zeta|\frac{\partial u(\zeta)}{\partial\nu}-u(\zeta)\frac{\partial\ln|\zeta-p}{\partial\nu}\right]ds=0.$$

Таким образом из (10) получаем

$$(11)\qquad \frac{1}{2\pi c}\int\limits_{\Gamma^1_n\cup\Gamma^2_n}\ln|z_0-\zeta|\frac{\partial u(\zeta)}{\partial\nu}ds=-\frac{1}{nc};$$

$$\frac{1}{2\pi c}\int\limits_{\Gamma^1_n\cup\Gamma^2_n}\ln|t_0-\zeta|\frac{\partial u(\zeta)}{\partial\nu}ds=\frac{1}{c}\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

Из (9) и (11) вытекает, что $u(z_0,\ t_0)=\dfrac{1}{c}$.

2. $z_0\in\partial E$, $t_0\in\partial F$. Пусть $\delta>0$ произвольно. Тогда для

$$z\in\{|z-z_0|<\delta\}\cap R\quad\text{и}\quad t\in\{|t-t_0|<\delta\}\cap R$$

имеем

$$u(z,\ t)=\frac{1}{c}[u(t)-u(z)]\leqq\frac{1}{c}.$$

Но тогда $\inf u(z,\ t)\leqq\dfrac{1}{c}$, где inf берется по всем $(z,\ t)$, принадлежащим бикругу $\Delta_\delta=\{(z,\ t)\in C^2:\ |z-z_0|<\delta,\ |t-t_0|<\delta\}$. Отсюда, в силу полунепрерывности $u(z,\ t)$ снизу в $(z_0,\ t_0)$, получим

$$u(z_0,\ t_0)=\varliminf_{\substack{z\to z_0\\ t\to t_0}}u(z,\ t)=\lim_{\delta\to 0}\inf_{\Delta_\delta}u(z,\ t)\leqq\frac{1}{c}.$$

3. Пусть $z_0\in\mathring{E}$, $t_0\in\partial F$ (случай $z_0\in\partial E$, $t_0\in\mathring{F}$ рассматривается аналогично). Тогда, пользуясь тем, что функция $\ln|z_0-\zeta|$ непрерывна в окрестности ∂E, и определением меры $\mu(\zeta)$, можем заключить, что найдется круг $\Delta=\{|z-z_0|<\delta_0\}\subset\mathring{E}$, такой, что для любого $z\in\Delta$ и лю-

бого t такого, что (z, t) принадлежит области определения функции $u(z, t)$, имеем

$$u(z, t)=\int_{\partial E} \ln|t-\zeta|\, d\mu(\zeta)-\int_{\partial F} \ln|t-\zeta|\, d\nu(\zeta).$$

В частности при $|z-z_0|<\delta\leqq\delta_0$, $t\in\{|t-t_0|<\delta\leqq\delta_0\}\cap R$ получим (смотри лемму 1)

$$u(z, t)=\frac{1}{c}[u(t)-d]\leqq\frac{1}{c}.$$

Отсюда, пользуясь опять полунепрерывностью $u(z, t)$ снизу в (z_0, t_0), получим

$$u(z_0, t_0)\leqq\frac{1}{c}.$$

Лемма доказана.

Теорема 1. Пусть (E, F) — произвольный регулярный конденсатор. Тогда

$$r=\frac{1}{\rho},$$

где ρ — риманов модуль конденсатора (E, F), а $r=\inf r(\alpha, \beta)$ — число, определенное в начале этого пункта.

Доказательство. Докажем сначала, что для любого интерполяционного процесса (α, β) для класса $A(D)$ имеет место неравенство

$$r(\alpha, \beta)\geqq\frac{1}{\rho}. \tag{12}$$

Без ограничения общности можем предполагать, что множество $E\cup F$ — ограничено, так как наша задача инвариантна относительно преобразований вида $z'=1/z-z_0$.

Пусть $z_0\in E$, $t_0\in F$ — произвольны. Обозначим через $d(E, F)$ расстояние от E до F и положим

$$K=\frac{1}{\max\limits_{\substack{z\in E\\ t\in F}} z-t}\cdot\frac{d(E, F)}{\operatorname{diam} F}>0.$$

Тогда по интерполяционной формуле Уолша — Эрмита примененной к функции $f(z)=\dfrac{1}{z-t_0}$, имеем

$$r(\alpha, \beta)\geqq\overline{\lim_{n\to\infty}}\left\|\frac{1}{z-t_0}-r_{n-1}(z, f, \alpha, \beta)\right\|_E^{\frac{1}{n}} \tag{13}$$

$$(13)\qquad \geqq \overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \frac{1}{z_0-t_0} \cdot \frac{\omega_n(z_0)}{\omega_n(t_0)} \cdot \frac{z_0-b_{nn}}{t_0-b_{nn}} \right|^{\frac{1}{n}}$$

$$\geqq \overline{\lim_{n\to\infty}} K^{\frac{1}{n}} \cdot \left| \frac{\omega_n(z_0)}{\omega_n(t_0)} \right|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\omega_n(z_0)}{\omega_n(t_0)} \right|^{\frac{1}{n}},$$

где

$$\omega_n(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{z-a_{nk}}{z-b_{nk}}.$$

Положим

$$u_n(z, t) = \frac{1}{n} \ln \left| \frac{\omega_n(t)}{\omega_n(z)} \right|.$$

Тогда из (13) для любого $(z, t) \in E\times F$ получим

$$(14)\qquad \ln \frac{1}{r(\alpha, \beta)} \leqq -\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{\omega_n(z)}{\omega_n(t)} \right| = \lim_{n\to\infty} u_n(z, t).$$

В каждую точку (a_{ni}, b_{nj}) поставим массу $\frac{1}{n^2}$ и обозначим полученную таким образом единичную неотрицательную меру через $\sigma_n(z, t)$. При помощи этой меры функцию $u_n(z, t)$ можем записать в следующем виде:

$$u_n(z, t) = \int_{E\times F} \ln \left| \frac{t-\zeta}{z-\zeta} \cdot \frac{z-\xi}{t-\xi} \right| d\sigma_n(\zeta, \xi).$$

Проинтегрировав это равенство по мере $\sigma(z, t)$ (см. лемму 2) и применяя неравенство в лемме **2**, получим

$$\int_{E\times F} u_n(z, t)\, d\sigma(z, t) = \int_{E\times F} \left[\int_{E\times F} \ln \left| \frac{t-\zeta}{z-\zeta} \cdot \frac{z-\xi}{t-\xi} \right| d\sigma_n(\zeta, \xi) \right] d\sigma(z, t)$$

$$= \int_{E\times F} \left[\int_{E\times F} \ln \left| \frac{t-\zeta}{z-\zeta} \cdot \frac{z-\xi}{t-\xi} \right| d\sigma(z, t) \right] d\sigma_n(\zeta, \xi)$$

$$= \int_{E\times F} u(\zeta, \xi)\, d\sigma_n(\zeta, \xi) \leqq \frac{1}{c}$$

для любого n. Таким образом

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \int\limits_{E\times F} u_n(z,\ t)\, d\sigma(z,\ t) \leqq \frac{1}{c}\cdot \tag{15}$$

С другой стороны, интегрируя (14) и применяя лемму Фату, из (15) получим

$$\ln\frac{1}{r(\alpha,\ \beta)} \leqq \int\limits_{E\times F} \overline{\lim_{n\to\infty}}\, u_n(z,\ t)\, d\sigma(z,\ t) \tag{16}$$

$$\leqq \overline{\lim_{n\to\infty}} \int\limits_{E\times F} u_n(z,\ t)\, d\sigma(z,\ t) \leqq \frac{1}{c} = \ln\rho,$$

т. е. $r(\alpha,\ \beta) \geqq \frac{1}{\rho}\cdot$ Отсюда следует, что

$$r = \inf_{(\alpha,\ \beta)} r(\alpha,\ \beta) \geqq \frac{1}{\rho}\cdot$$

Докажем обратное неравенство. Как показано в [1], для любого регулярного конденсатора существует интерполяционный процесс (α^*, β^*) такой, что равенство

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{\omega_n(z)}{\omega_n(t)}\right|^{\frac{1}{n}} = \rho^{u(z)-u(t)},\quad \omega_n(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{z-a^*_{nk}}{z-b^*_{nk}} \tag{17}$$

выполняется равномерно внутри $R\times R$.

Пусть $f\in A(D)$ произвольна. Для τ, $0<\tau<1$ обозначим через $\Gamma_\tau=\{z: u(z)=\tau\}$ соответствующую линию уровня функции $u(z)$. Пусть ε, $0<\varepsilon<1-\varepsilon$ произвольно. По формуле Уолша — Эрмита имеем

$$f(z)-r_{n-1}(z,\ f,\ \alpha^*,\ \beta^*) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{1-\varepsilon}} \frac{f(t)}{t-z}\cdot\frac{\omega_n(z)}{\omega_n(t)},\ \frac{z-b_{nn}}{t-b_{nn}}\, dt \tag{18}$$

откуда, пользуясь (17), следует

$$\left|f-r_{n-1}\right|_E^{\frac{1}{n}} \leqq \left\|f-r_{n-1}\right\|_{\Gamma_\varepsilon}^{\frac{1}{n}} \leqq M_\varepsilon^{\frac{1}{n}}\rho^{3\varepsilon-1},\quad n>N(\varepsilon), \tag{19}$$

где M_ε — некоторая постоянная. Из (19), очевидно, вытекает

$$r(\alpha^*,\ \beta^*) = \sup_{f\in A(D)} \overline{\lim_{n\to\infty}} \left\|f-r_{n-1}\right\|_E^{\frac{1}{n}} \leqq \frac{1}{\rho} \tag{20}$$

и, значит, $r \leqq \frac{1}{\rho}$. Теорема доказана.

Замечание. Интерполяционный процесс (α^*, β^*), построенный в [1], именно является тем процессом, при котором $r = r(\alpha^*, \beta^*)$ и среди всех интерполяционных процессов дает наилучший порядок равномерного на E приближения мотодом интерполирования во всем классе $A(D)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bagby, Th.: On interpolation by rational functions. Duke Math. J., 36 (1969), No 1, 95—104.
2. Левин, А. Л., Тихомиров, В. М.: Об одной теореме Ерохина. УМН, 23, № 1 (139), 1968, 119—132.
3. Уолш, Дж.: Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. Изд. иностр. литературы, Москва, 1961.
4. Walsh J. and Rassel, H.: Hyperbolic capacity and interpolations rational functions. II. Duke Math. J., 33 (1966), 375—379.
5. Shen Y. C.: On interpolation and approximation by rational functions. J. of the Chinese Math. Soc. 1 (1936), 154—173.

ON THE RATE OF THE RATIONAL INTERPOLATION OF ANALYTIC FUNCTIONS

P. G. Boyadjiev

(SUMMARY)

Let $D \subset C$ be a domain and $E \subset D$ be a compact set. We investigate the uniform approximation on E of the analytic functions in D by rational functions, found by the method of interpolation, and show that the degree of the best uniform interpolation by rational functions of a degree $\leqq n$ is $(1/\rho)^n$, where ρ is the Riemann's modulus of the condenser (E, D).