ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИИ МЕЖДУ ПРОСТРАНСТВАМИ ТИПА ПРОСТРАНСТВА О. В. БЕСОВА

Г. Е. Караджов

Настоящая работа посвящена изучению интерполяционных пространств между некоторыми пространствами функций, несимметричных относительно дифференциально-разностных свойств и естественно обобщающих пространств О. В. Бесова. Необходимость в результатах такого рода возникает, например, при исследовании спектра интегральных операторов (см. [5]).

Для решения поставленной задачи предлагается дискретный аналог метода интегрального представления. В [1] Питре применяет метод интегрального представления для характеристики пространств „средних" между пространствами О. В. Бесова. Использование дискретного аналога этого метода дает возможность рассмотреть и случай p-нормированных пространств. Исследование ведется на языке теории полугрупп.

План статьи следующий. В первом пункте напоминаются некоторые определения и факты теории интерполяционных пространств (см. [2], [3]). Во втором пункте выводятся интегральные представления. Пространства типа пространства О. В. Бесова определяются и изучаются в связи с теорией интерполяции в пункте 3. Основной результат доказан в четвертом пункте.

1. ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ ФУНКТОР

1. 1. Определение (совместная пара)

Будем говорить, что квазинормированные* (кв. н.) пространства F_0, F_1 образуют совместную пару (F_0, F_1), если существует хаусдорфово л. т. п. F такое, что F_0 и F_1 оба вложены в F алгебраически и топологически ($F_0 \subset F$, $F_1 \subset F$).

Если (F_0, F_1) — совместная пара, то сумма F_0+F_1 определяется следующим образом $F_0+F_1=\{x \in F;\ x=x_0+x_1;\ x_i \in F_i\ (i=0, 1)\}$. Это пространство кв. н. относительно квазинормы $\|x\|_{F_0+F_1}=\inf\{\|x_0\|_{F_0}+\|x_1\|_{F_1}\}$.

---

* Линейное топологическое пространство (л. т. п.) F называется кв. н. (см. [4]), если его топология задается конечной неотрицательной функцией $\|\cdot\|_F$ (γ — квазинорма): $\|x\|_F=0 \Leftrightarrow x=0$; $\|\lambda x\|_F=|\lambda|\,\|x\|_F$; $\|x_1+x_2\|_F \leqq \gamma(\|x_1\|_F+\|x_2\|_F)$, ($\gamma \geqq 1$).

Пространство $F_0 \cap F_1$ наделяется квазинормой

$$x|_{F_0 \cap F_1} = \max\{\|x\|_{F_0}, \|x\|_{F_1}\}.$$

1. 2. Определение (морфизмы совместных пар)

Пусть (F_0, F_1) и (G_0, G_1) — совместные пары кв. н. пространств. Через $\mathrm{Hom}((F_0, F_1), (G_0, G_1))$ обозначается совокупность всех линейных отображений T из F_0+F_1 в G_0+G_1, таких, что $T/F_i : F_i \to G_i$ $(i=0, 1)$ (непрерывно).

Будем рассматривать следующие категории. B — категория совместных пар полных кв. н. пространств (кв. б. пространств) с морфизмами из определения 1. 2. и с обычным произведением операторов в качестве композиции и B' — категория кв. б. пространств, морфизмы которой — линейные непрерывные отображения.

1. 3. Определение (интерполяционный функтор)

Интерполяционным функтором, определенным на B, называется любой (ковариантный) функтор Φ_θ, $0 \leqq \theta \leqq 1$, из B в B' такой, что

а) для любого объекта $(F_0, F_1) \in B$ пространство $\Phi_\theta[F_0, F_1]$ является промежуточным между F_0 и F_1, т. е.

$$F_0 \cap F_1 \subset \Phi_\theta[F_0, F_1] \subset F_0 + F_1;$$

в) для любого морфизма $T \in \mathrm{Hom}((F_0, F_1), (G_0, G_1))$

$$\Phi_\theta[T] = T/_{\Phi_\theta[F_0, F_1]} : \Phi_\theta[F_0, F_1] \to \Phi_\theta[G_0, G_1]$$

и, более того, $\|T\|_{\Phi_\theta[F_0, F_1] \to \Phi_\theta[G_0, G_1]} \leqq c \|T\|^{1-\theta}_{F_0 \to G_0} \|T\|^{\theta}_{F_1 \to G_1}$,
где постоянная $c>0$ не зависит от T.

Следовательно, для описания интерполяционного функтора достаточно задать соответствие между объектами. Это соответствие называется интерполяционным методом.

1. 4. Определение (p-нормированное пространство, $0<p\leqq 1$).

Л. т. п. F назовем p-нормированным, если его топология задается конечной неотрицательной функцией $\|.\|_{pF}$ (p-норма) со свойствами:

1) $\|x\|_{pF}=0 \Leftrightarrow x=0$; 2) $\|\lambda x\|_{pF}=|\lambda|\,\|x\|_{pF}$; 3) $\|x_1+x_2\|^p_{pF} \leqq \|x_1\|^p_{pF} + \|x_2\|^p_{pF}$.

Введенное нами понятие p-нормы эквивалентно понятию p-нормы, принятое в [4], где под p-нормой понимается конечная неотрицательная функция, которая положительно однородна степени p, удовлетворяет неравенству треугольника и свойству 1). Однако при исследовании свойства ограниченности линейных операторов, на наш взгляд, более удобно свойство 2).

1. 5. Предложение.

Пусть F—p-нормированное пространство. Оно полно (p-банахово) тогда и только тогда, когда из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_{pF}^p$ вытекает, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ сходится к некоторому элементу $x \in F$.

Доказательство то же, что и в случае $p=1$. Более того, этот факт имеет место и тогда, когда F только линейное метризуемое пространство, относительно инвариантной (по сдвигам) метрики (надо $\|x_n\|_{pF}^p$ заменить на $\rho(x_n, 0)$).

1. 6. Предложение.

Пусть F — кв. н. пространство с γ-квазинормой $\|\cdot\|_F$ ($\gamma \geqq 1$). Тогда существует p-норма $\|\cdot\|_{pF}$, $\gamma = 2^{1/p-1}$ такая, что

$$2^{-1/p} \|x\|_F \leqq \|x\|_{pF} \leqq \|x\|_F.$$

Доказательство (по существу) можно найти в [4].

1. 7. Определение (К-метод „средних").

Пусть $(F_0, F_1) \in B$ и $0<\theta<1$, $0<p_0, p_1 \leqq \infty$. Положим $(F_0, F_1)_{\theta p_0 p_1} = \{a \in F_0+F_1;\ a=a_{0n}+a_{1n},\ n=0, \pm 1, \ldots,\ e^{(i-\theta)n} \|a_{in}\|_{F_i} \in l^{p_i} (i=0, 1)\}$. Пространство $(F_0, F_1)_{\theta p_0 p_1}$ является кв. н. относительно квазинормы $\|a\|_{(F_0, F_1)\theta p_0 p_1} = \inf \{\max_{i=0,1} \|e^{(i-\theta)n} a_{in}\|_{l^{p_i}(F_i)};\ a=a_{0n}+a_{1n}\}$.

1. 8. Определение.

Пусть f и g — два неотрицательные функционала над F.

Будем говорить, что f эквивалентно g, $f \asymp g$, если $c_1 f(x) \leqq g(x) \leqq c_2 f(x)$, $x \in F$, где $c_1>0$, $c_2>0$.

1. 9. Предложение.

$$\|a\|_{(F_0, F_1)\theta p_0 p_1} \asymp \inf \{\|e^{-\theta n} a_{0n}\|_{l^{p_0}(F_0)}^{1-\theta} \|e^{(1-\theta)n} a_{1n}\|_{l^{p_1}(F_1)}^{\theta};\ a=a_{0n}+a_{1n}\}.$$

1. 10. Теорема (интерполяции).

Функтор $\Phi_{\theta p_0 p_1}$ из B в B', $\Phi_{\theta p_0 p_1}[F_0, F_1] = (F_0, F_1)_{\theta p_0 p_1}$ является интерполяционным.

Эта теорема доказывается с помощью предложения 1. 9.

1. 11. Определение (K-метод Питре).

Пусть $(F_0, F_1) \in B$, $0<\theta<1$, $0<p \leqq \infty$. Положим (с естественной квазинормой $(F_0, F_1)_{\theta p} = \left\{a \in F_0+F_1;\ \int_0^{\infty} t^{-\theta p} K^p(t, a;\ F_0, F_1) \frac{dt}{t} < \infty\right\}$,

где $K(t, a; F_0, F_1) = \inf \{\|a_0\|_{F_0} + t\|a_1\|_{F_1};\ a=a_0+a_1\}$.

1. 12. Теорема (эквивалентности).

Пусть $0<\theta<1$, $0<p_0$, p_1, $p \leqq \infty$, $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$. Тогда (см. [2])

$$(F_0, F_1)_{\theta p_0 p_1} = (F_0, F_1)_{\theta p}$$

с эквивалентными квазинормами.

1. 13. Теорема (p-нормированность).

Пусть $(F_0, F_1) \in H$ и F_i — p_i-банахово пространство $(i=0, 1)$, $0<p_0$, $p_1 \leqq 1$, $0<q_0$, $q_1 \leqq \infty$, $0<\theta<1$. Тогда функция

$$(1.\ 1) \qquad a \to \|a\|_{(F_0, F_1)_{\theta, q, r, L}} = \left[\int_0^\infty t^{-\theta r_0 q/r} L^{q/r}_{r_0 r_1}(t^{r_0 r_1}, a) \frac{dt}{t} \right]^{1/q},$$

где $1/q = (1-\theta)/q_0 + \theta/q_1$, $1/r = (1-\theta)/r_0 + \theta/r_1$, $r_i = \min(p_i, q_i)$,

$$(1.\ 2) \qquad L_{r_0 r_1}(t, a) = \inf\{ \|a_0\|^{r_0}_{p_0 F_0} + t \|a_1\|^{r_1}_{p_1 F_1};\ a = a_0 + a_1 \}$$

является r-нормой, эквивалентной квазинорме $\|a\|_{(F_0, F_1)_{\theta q_0 q_1}}$.

Доказательство. По теореме 1. 12 $(F_0, F_1)_{\theta, qr_0/r, qr_1/r} = (F_0, F_1)_{\theta q}$, $(F_0, F_1)_{\theta q_0 q_1} = F$, при этом (см. [2]), $\|a\|_F \asymp \|a\|_{(F_0, F_1)_{\theta, q, r, L}}$. Докажем, что функция (1. 1) является r-нормой. Достаточно проверить выполнение свойств 2) и 3) в определении 1. 4. Действительно, $L_{r_0 r_1}(t, \lambda a) = |\lambda|^{r_0} L_{r_0 r_1}(t|\lambda|^{r_1 - r_0}, a)$, откуда получаем свойство 2). С другой стороны, функция (1. 2) удовлетворяет неравенству треугольника и пространство $L^{q/r}_*$, где $*$ означает интегрирование на $(0, \infty)$ по мере Хаара dt/t, нормировано. Следовательно, функция (1. 1) удовлетворяет 3).

1. 14. Предложение.

Пусть $(F_0, F_1) \in B$, $0<\theta<1$, $0<q_0$, $q_1 \leqq \infty$. Тогда пространство $(F_0, F_1)_{\theta q_0 q_1}$ является полным пространством.

Доказательство. Пусть $\|\cdot\|_{p(F_0+F_1)}$, $\|\cdot\|_{p(F_0, F_1)_{\theta q_0 q_1}}$, $|\cdot|_{pl q_i}$ — p-нормы соответственно на F_0+F_1, $(F_0, F_1)_{\theta q_0 q_1}$, l_{q_i} $(i=0, 1)$. Если $\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\|^p_{p(F_0, F_1)_{\theta q_0 q_1}} < \infty$, то $\sum_n \|a_n\|^p_{p(F_0+F_1)} < \infty$ и так как F_0+F_1 полно, найдется элемент $a \in F_0+F_1$, для которого $\sum_n a_n = a$ в F_0+F_1. Далее для каждого $n=1, 2, \ldots$ можно найти разложение элемента $a_n = a_{0nk} + a_{1nk}$, $a_{ink} \in F_i$ такое, что $\|e^{\xi_i k} a_{ink}\|_{l^{q_i}(F_i)} \leqq \|a_n\|_{(F_0, F_1)_{\theta q_0 q_1}} + 2^{-n}$. Тогда $\sum_n \|e^{\xi_i k} a_{ink}\|^p_{l^{q_i}(F_i)} < \infty$ и, поскольку $l^{q_i}(F_i)$ полно, имеем: $\sum_n e^{\xi_i k} a_{ink} = e^{\xi_i k} b_{ik}$ в $l^{q_i}(F_i)$. При этом $b_{0k} + b_{1k} = \sum_n a_n = a$ в F_0+F_1, т. е. $a \in (F_0, F_1)_{\theta q_0 q_1}$.

С другой стороны,

$$a-\sum_{n=1}^{m} a_n \Big\|_{(F_0,\ F_1)_{\theta\, q_0\, q_1}} \leqq \max_{i=0,\,1} \Big\| e^{\xi_i k}\Big(b_{ik}-\sum_{n=1}^{m} a_{ink}\Big)\Big\|_{l^{q_i}(F_i)} \to 0 \quad \text{при} \quad m\to\infty,$$

т. е. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится в $(F_0, F_1)_{\theta\, q_0 q_1}$ к элементу $a \in (F_0, F_1)_{\theta\, q_0 q_1}$. Остается применить предложение 1. 5.

2. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Пусть E — банахово пространство и $\{T_i(t)\}$ $(i=1, \ldots, n;\ 0\leqq t<\infty)$ — семейство n попарно коммутирующих ограниченных и непрерывных полугрупп операторов в E, т. е. $T_i(t_1+t_2)=T_i(t_1)\,T_i(t_2)$, $T_i(0)=I$; $\|T_i(t)\|_{E\to E}\leqq M$; $T_i(t_1)\,T_k(t_2)=T_k(t_2)\,T_i(t_1)$; $T_i(t)\,a\to a$ $(t\to 0)$ для каждого $a\in E$ (I — тождественное отображение в E).

Если $z\in R^n_+$ $(z=(z_1, \ldots, z_n),\ z_i\geqq 0)$, положим $T(z)=\prod_{i=1}^{n} T_i(z_i)$.

Пусть $\xi(z)\in C_0^\infty(R^n)$, $\operatorname{supp}\xi\subset Q=\{z\in R^n;\ 0<z_i<1\}$, $\int \xi(z)\,dz=1$ и $\overset{\circ}{\omega}(z)=\sum_{k=1}^{m+1}(-1)^{k+1}\binom{m+1}{k}k^{-n}\,\xi\left(\frac{z}{k}\right)$. Тогда

(2. 1) $$\int z^{\varkappa}\,\overset{\circ}{\omega}(z)\,dz=0,\quad 1\leqq|\varkappa|\leqq m,\quad \int \overset{\circ}{\omega}(z)\,dz=0,\quad z=(z_1, \ldots, z_n),$$

$$\varkappa=(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n),\quad |\varkappa|=\varkappa_1+\ldots+\varkappa_n,\quad z^{\varkappa}=z_1^{\varkappa_1}\ldots z_n^{\varkappa_n}.$$

Если $\omega(z)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial z_i}[z_i\,\overset{\circ}{\omega}(z)]$, $\omega_t(z)=t^{-n}\,\omega\left(\frac{z}{t}\right)$, $\overset{\circ}{\omega}_t(z)=t^{-n}\,\overset{\circ}{\omega}\left(\frac{z}{t}\right)$, то

(2. 2) $$\int z^{\varkappa}\,\omega(z)\,dz=0,\quad 0\leqq|\varkappa|\leqq m,$$

(2. 3) $$\omega_t(z)=-t\,\frac{d}{dt}\,[\overset{\circ}{\omega}_t(z)].$$

Положим $Y(t)=\int \omega_t(z)\,T(z)\,dz$, $\overset{\circ}{Y}(t)=\int \overset{\circ}{\omega}_t(z)\,T(z)\,dz$ (интеграл понимается как сильный предел в E римановых интегральных сумм).

Для любого $a\in E$, E-значная функция $t\to Y(t)\,a$ непрерывна на $(0, \infty)$, поэтому имеет смысл интеграл Римана $\int_{\varepsilon}^{1/\varepsilon} Y(t)\,a\,\frac{dt}{t}$, $\varepsilon>0$, и, следовательно, несобственный интеграл $\int_0^{\infty} Y(t)\,a\,\frac{dt}{t}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{1/\varepsilon} Y(t)\,a\,\frac{dt}{t}$.

2. 1. Предложение (интегральное представление).

$$\int_0^1 Y(t)\frac{d}{dt}+\overset{\circ}{Y}(1)=I \tag{2. 4}$$

(на каждом элементе $a \in E$).

Доказательство. Из (2. 3) вытекает равенство

$$Y(t)a=-t\frac{d}{dt}[\overset{\circ}{Y}(t)a], \quad a \in E,$$

откуда $\int_0^\infty Y(t)a\,\frac{dt}{t}=\lim_{\varepsilon\to 0}\overset{\circ}{Y}(\varepsilon)a-\lim_{\varepsilon\to 0}\overset{\circ}{Y}(1/\varepsilon)a$. С другой стороны, $\lim_{\varepsilon\to 0}\overset{\circ}{Y}(\varepsilon)a=a$ и, как легко видеть, существует $\lim_{\varepsilon\to 0}\overset{\circ}{Y}(1/\varepsilon)a=b$, $b \in E$. Следовательно, $\int_0^\infty Y(t)a\frac{dt}{t}=a-b$. Далее, $\int_1^\infty Y(t)a\frac{dt}{t}+b=\overset{\circ}{Y}(1)a$, поэтому имеет место (2. 4).

В дальнейшем будем предполагать, что $n=n_1+n_2$, $z=(x,y)$, $x \in R^{n_1}$ $y \in R^{n_2}$. Положим $T(x)=\prod_{i=1}^{n_1}T_i(x_i)$, $x \in R_+^{n_1}$ и $T(y)=\prod_{k=1}^{n_2}T_{n_1+k}(y_k)$ $y \in R_+^{n_2}$. Тогда $T(z)=T(x)T(y)$, $z=(x, y) \in R_+^{n_1}\times R_+^{n_2}$.

Пусть функции $\overset{\circ}{\varphi}(x)$, $x \in R_+^{n_1}$ и $\overset{\circ}{\psi}(y)$, $y \in R_+^{n_2}$ аналогичны функции $\overset{\circ}{\omega}(z)$, $z \in R_+^n$. Положим

$$\varphi_k(x)=\overset{\circ}{\varphi}_{e^k}(x)-\overset{\circ}{\varphi}_{e^{k+1}}(x) \quad (k=0, \pm 1, \ldots), \tag{2. 5}$$

$$\psi_l(y)=\overset{\circ}{\psi}_{e^l}(y)-\overset{\circ}{\psi}_{e^{l+1}}(y) \quad (l=0, \pm 1, \ldots) \tag{2. 6}$$

и отметим, что вследствие (2. 1)

$$\int x^\varkappa \varphi_k(x)dx=0, \quad 0 \leqq |\varkappa| \leqq m \quad k=0, \pm 1, \ldots), \tag{2. 7}$$

$$\int y^\varkappa \psi_l(y)dy=0, \quad 0 \leqq |\varkappa| \leqq m \quad (l=0, \pm 1, \ldots). \tag{2. 8}$$

Далее, положим

$$Y_{kl}=\int\int \varphi_k(x)\psi_l(y)T(x)T(y)dx\,dy, \tag{2. 9}$$

$$A_k=\int\int \varphi_k(x)\overset{\circ}{\psi}(y)T(x)T(y)dx\,dy, \tag{2. 10}$$

(2. 11) $$B_l = \int\int \overset{\circ}{\varphi}(x)\psi_l(y)T(x)T(y)\,dx\,dy,$$

(2. 12) $$c = \int\int \overset{\circ}{\varphi}(x)\overset{\circ}{\psi}(y)T(x)T(y)\,dx\,dy.$$

2. 2. Предложение (дискретный аналог интегрального представления).

(2. 13) $$\sum_{k<0}\sum_{l<0} Y_{kl} + \sum_{k<0} A_k + \sum_{l<0} B_l + c = I$$

(ряды сходятся на каждом элементе $a \in E$).

Доказательство. Из (2. 9), (2. 5), (2. 6) имеем $\sum_{k=-m}^{m}\sum_{l=-p}^{P} Y_{kl}\,a$ $= \int\int [\overset{\circ}{\varphi}_{e-m}(x) - \overset{\circ}{\varphi}_{e^{m+1}}(x)][\overset{\circ}{\psi}_{e-p}(y) - \overset{\circ}{\psi}_{e^{p+1}}(y)]\,T(x)\,T(y)\,a\,dx\,dy.$
Дальше рассуждаем, как и при доказательстве предложения 2. 1.

3. ПРОСТРАНСТВА ТИПА ПРОСТРАНСТВА О. В. БЕСОВА

Через $\Omega^{\alpha}_{z_i ht}$ $(\alpha>0,\ h>0,\ t>0)$ обозначим дифференциально-разностный оператор

(3. 1) $$\Omega^{\alpha}_{z_i ht} = t^{m-\alpha}\,\Delta^2_{iz}(h)\,D^m_{z_i},$$

где m — наибольшее целое $<\alpha$ и, как обычно,

(3. 2) $$\Delta_i(h) = \Delta_{iz}(h) = T_i(h) - I,\quad D_i = D_{z_i} = \lim_{h\to 0}\Delta_i(h)/h \quad (i = 1, \ldots, n).$$

По определению, пространство Бесова $B^{\alpha}_q E = B^{\alpha}_{qz} E$ $(0<q\leqq\infty)$ состоит из множества всех элементов $a \in E$, для которых

(3. 3) $$a_{B^{\alpha}_q E} = a_E + a_{B^{\alpha}_q B} < \infty,$$

где

(3. 4) $$a_{B^{\alpha}_q E} = \sum_{i=1}^{n}\left[\int_0^{\infty}\sup_{0<h\leqq t}\left|\Omega^{\alpha}_{z_i ht}a\right|^q_E \frac{dt}{t}\right]^{1/q}.$$

Пространство $B^{\alpha}_q E$ — p-банахово, $p = \min(1, q)$, относительно p-нормы $a \to |a|_{B^{\alpha}_q E}$. Положим $B^0_q E = E$.

Например, если $E = L^p(R^n)$ $(1 \leqq p < \infty)$ и $T_i(t)\,a(x_1, \ldots, x_n) = a(x_1, \ldots, x_i + t, \ldots x_n)$, то $B^{\alpha}_q L^p(R^n) = B^{\alpha}_{p,q}(R^n)$ есть обычное пространство Бесова; $B^{\alpha}_{\infty} L^p(R^n) = H^{\alpha}_p(R^n)$ есть пространство С. М. Никольского.

Некоторые свойства пространства $B_q^\alpha E$ могут быть изучены с помощью метода „средних". Для этого понадобятся пространства Соболева $\omega^m E$ и $W^m E$, $m>0$ — целое.

$$\omega^m E=\{a\in E;\ \|a\|_{\omega^m E}=\|a\|_E+|a|_{\omega^m E}<\infty\},\ |a|_{\omega^m E}=\sum_{i=1}^n \|D_i^m a\|_E,$$

$$W^m E=\left\{a\in E;\ \|a\|_{W^m E}=\|a\|_E+\sum_{k=1}^n \|a\|_{\dot W^k E}\right\},\ \|a\|_{\dot W^k E}=\sum_{|\varkappa|=k}\|D^\varkappa a\|_E,$$

$$D^\varkappa=D_1^{\varkappa_1}\dots D_n^{\varkappa_n},\quad \varkappa=(\varkappa_1,\dots,\varkappa_n).$$

3. 1. Предложение.

$$K(t^m,\ a;\ E,\ \omega^m E)=\|a\|_E,\quad t\geqq 1, \tag{3. 5}$$

$$K(t^m,\ a;\ E,\ \omega^m E)\asymp\sum_{i=1}^n \sup_{0<h\leqq t}\|\Delta_i^m(h)\,a\|_E+t^m\|a\|_E,\quad 0<t\leqq 1.$$

Доказательство. (3. 5) следует из вложения $\omega^m E\subset E$. Далее, чтобы избежать громоздкие обозначения, рассмотрим только случай $m=n=2$.

Исходя из алгебраического тождества $1+(x_1-1)^2(x_2-1)^2=(x_1-1)^2+(x_2-1)^2+x_1^2x_2^2-2x_1^2x_2-2x_1x_2^2+4x_1x_2$, получаем, что $I+\Delta_1^2(h_1)\Delta_2^2(h_2)$

$$=\Delta_1^2(h_1)+\Delta_2^2(h_2)+T_1^2(h_1)\,T_2^2(h_2)-2T_1^2(h_1)\,T_2(h_2)-2T_1(h_1)\,T_2^2(h_2)$$

$$+4T_1(h_1)\,T_2(h_2).$$

Положим

$$a_0(t)=t^{-4}\int_0^t\dots\int_0^t[\Delta_1^2(\xi_1+\xi_2)+\Delta_2^2(\eta_1+\eta_2)-\Delta_1^2(\xi_1+\xi_2)\,\Delta_2^2(\eta_1+\eta_2)]\,a\,d\xi_1\dots d\eta_2,$$

$$a_1(t)=t^{-4}\int_0^t\dots\int_0^t[T_1^2(\xi_1+\xi_2)\,T_2^2(\eta_1+\eta_2)-2\,T_1^2(\xi_1+\xi_2)\,T_2(\eta_1+\eta_2)$$

$$-2T_1(\xi_1+\xi_2)\,T_2^2(\eta_1+\eta_2)+4\,T_1(\xi_1+\xi_2)\,T_2(\eta_1+\eta_2)]\,a\,d_{\xi_1}\,d_{\xi_2}\,d_{\eta_1}\,d_{\eta_2}.$$

Тогда $a=a_0(t)+a_1(t)$, $\|a_0(t)\|_E\leqq c\sum_{i=1}^2\sup_{0<h\leqq t}\|\Delta_i^2(h)\,a\|_E$, $\|a_1(t)\|_E\leqq c\,\|a\|_E$, $\|D_i^2 a_1(t)\|_E\leqq ct^{-m}\sum_{i=1}^2\sup_{0<h\leqq t}\|\Delta_i^2(h)\,a\|_E$ и, следовательно, $K(t^2,\ a;\ E,\ \omega^2 E)$

$\leqq c \sum_{i=1}^{2} \sup_{0<h\leqq t} \|\Delta_i^2(h) a\|_E + ct^2 \|a\|_E$. Обратное неравенство устанавливается проще. Следует воспользоваться оценкой $\|\Delta_i^2(h) a\|_E \leqq h^2 \|D_i^2 a\|_E$.

3. 2. Предложение.

$$\omega^m E,\ W^m E \in P_\theta(E,\ \omega^{m+2} E),\quad \theta = m/(m+2).$$

Доказательство. 1. $\omega^m E \in J_\theta(E,\ \omega^{m+2} E)$, $\theta = m/(m+2)$. Согласно определению (см. [6]) надо доказать, что

$$\|a\|_{\omega^m E} \leqq c \|a\|_E^{1-\theta} \|a\|_{\omega^{m+2} E}^{\theta},\quad a \in \omega^{m+2} E. \tag{3. 6}$$

Аналогично (2. 4) для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$a = \int_0^\varepsilon Y(t) a\, dt/t + \mathring{Y}(\varepsilon). \tag{3. 7}$$

С другой стороны, по формуле Тейлора

$$T_i(z_i) a = a + z_i D_i a + \int_0^{z_i} (z_i - \xi)\, T_i(\xi) D_i^2 a\, d\xi,$$

откуда, учитывая (2. 2), получаем

$$Y(t) a = \int \omega_t(z)\, T(z') \left[\int_0^{z_i} (z_i - \xi)\, T_i(\xi) D_i^2 a\, d\xi \right] dz,$$

$$z' = (z_1, \ldots, z_{i-1}, z_{i+1}, \ldots, z_n),$$

и, следовательно, $\|D_i^m Y(t) a\|_E \leqq c \|D_i^{m+2} a\|_E \int z_i^2 \omega_t(z)\, dz \leqq ct^2 \|D_i^{m+2} a\|_E$

Далее, $\|D_i^m \mathring{Y}(t) a\|_E \leqq \int \left| \frac{\partial^m}{\partial z_i^m} \mathring{\omega}_\varepsilon(z) \right| \|T(z) a\|_E\, dz \leqq c\varepsilon^{-m} \|a\|_E$. Из (3. 7) и полученных оценок следует, что $\|a\|_{\omega^m E} \leqq c\varepsilon^{-m} \|a\|_E + c\varepsilon^2 \|a\|_{\omega^{m+2} E}$, откуда, минимизируя по $\varepsilon > 0$, находим

$$\|a\|_{\omega^m E} \leqq c \|a\|_E^{1-\theta} \|a\|_{\omega^{m+2} E}^{\theta}. \tag{3. 8}$$

Однако $\|a\|_E \leqq \|a\|_{\omega^{m+2} E}$, поэтому

$$\|a\|_E \leqq \|a\|_E^{1-\theta} \|a\|_{\omega^{m+2} E}^{\theta}. \tag{3. 9}$$

Теперь (3. 6) следует из (3. 8) и (3. 9).

2. $\omega^m E,\ W^m E \in K_\theta(E,\ \omega^{m+2} E)$, $\theta = m/(m+2)$.

Пусть $a_0(\varepsilon)=\int\limits_0^{\varepsilon} Y(t)\,a\,\frac{dt}{t}$, $a_1(\varepsilon)=\overset{\circ}{Y}(\varepsilon)\,a$. Из (3. 7) имеем $a=a_0(\varepsilon)+a_1(\varepsilon)$, $0<\varepsilon<\infty$. С другой стороны, с помощью формулы Тейлора находим $\|a_0(\varepsilon)\|_E\leqq c\,\varepsilon^m\,\|a\|_{\omega^m E}$. Далее, $\|a_1(\varepsilon)\|_{\omega^{m+2}E}\leqq c\,\varepsilon^{-2}\,\|a\|_{\omega^m E}$, $\|a_1(\varepsilon)\|_E\leqq c\,\|a\|_E$, откуда $\|a_1(\varepsilon)\|_{\omega^{m+2}E}\leqq c\,\varepsilon^{-2}\,\|a\|_{\omega^m E}$, если $0<\varepsilon\leqq 1$. Следовательно, $\varepsilon^{-m}K(\varepsilon^{m+2},\ a;\ E,\ \omega^{m+2}E)\leqq c\,\|a\|_{\omega^m E}$, $0<\varepsilon\leqq 1$, поэтому, учитывая (3. 5), имеем $\omega^m E\subset(E,\ \omega^{m+2}E)_{\theta,\infty}$. Остается заметить, что $W^m E\subset\omega^m E$ и сослаться на определение [6].

3. $W^m E\in J_\theta(E,\ \omega^{m+2}E)$, $\theta=m/(m+2)$.

Пусть $\varkappa=(\varkappa_1,\ldots,\varkappa_n)$, $|\varkappa|=m$. По формуле Тейлора $T_i(z_i)a=a+z_i D_i a+\ldots+\frac{z_i^{k_i}}{k_i!}D_i^{k_i}a+R(z_i)\,a$, $R(z_i)\,a=\int\limits_0^{z_i}(z_i-\xi)^{k_i}\,T_i(\xi)\,D_i^{k_i+1}\,a\,d\xi$,

$k_i=m+1-\varkappa_i$. Отсюда $Y(t)\,a=\int\omega_t(z)\,T(z')\Big[\int\limits_0^{z_i}(z_i-\xi)^{m+1-\varkappa}$

$$\times T_i(\xi)\,D_i^{m+2-\varkappa_i}\,a\,d\xi\Big]\,dz,\ z'=(z_1,\ldots,z_{i-1},\ z_{i+1},\ldots z_n),$$

$\varkappa'=(\varkappa_1,\ldots,\varkappa_{i-1},\ \varkappa_{i+1},\ldots,\varkappa_n)$. И $D^\varkappa Y(t)\,a$

$$=\int D^{\varkappa'}_{z'}\,\omega_t(z)\,T(z')\Big[\int\limits_0^{z_i}(z_i-\xi)^{m+1-\varkappa_i}\,T_i(\xi)\,D_i^{m+2}a\,d\xi\Big]\,dz.$$

Поэтому $|D^\varkappa Y(t)\,a|_E\leqq c\,\|D_i^{m+2}a\|_E\int|z_i^{m+2-\varkappa_i}t^{-|\varkappa'|}\,D^{\varkappa'}_{z_i'}\,\omega_t(z)|\,dz$. С другой стороны, $\|D^\varkappa\overset{\circ}{Y}(\varepsilon)\,a\|_E\leqq c\,\varepsilon^{-m}\,\|a\|_E$. Тогда из (3. 7) имеем $\|a\|_{\dot W^m E}\leqq c\,\varepsilon^{-m}\,\|a\|_E+c\,\varepsilon^2\,\|a\|_{\omega^{m+2}E}$, откуда (минимизируя по $\varepsilon>0$)

$$\|a\|_{\dot W^m E}\leqq c\,\|a\|_E^{1-\theta}\,\|a\|^{\theta}_{\omega^{m+2}E},\quad \theta=m/(m+2). \tag{3. 10}$$

Далее, если $|\varkappa|=k<m$, выберем $\nu=(\nu_1,\ldots,\nu_n)$; $|\nu|=m$; $\nu_k=\varkappa_k$, $k\neq i_0$; $\nu_{i_0}>\varkappa_{i_0}$. По формуле Тейлора

$$Y(t)\,a=\int\omega_t(z)\,T(z')\Big[\int\limits_0^{z_{i_0}}(z_{i_0}-\xi)^{k_{i_0}-1}\,T_{i_0}(\xi)\,D_{i_0}^{k_{i_0}}a\,d\xi\Big]\,dz,\ k_{i_0}=\nu_0-\varkappa_{i_0},$$

откуда

$$D^{\varkappa} Y(t)\, a = \int \omega_t(z)\, T(z') \left[\int_0^{z_{i_0}} (z_{i_0} - \xi)^{k_{i_0}-1}\, T_{i_0}(\xi)\, D^{\nu} a\, d\xi \right] dz,$$

$$\| D^{\varkappa} Y(t)\, a \|_E \leqq c\, t^{\nu_{i_0} - \varkappa_{i_0}} \| D^{\nu} a \|_E, \quad \| D^{\varkappa} \mathring{Y}(1)\, a \|_E \leqq c \| a \|_E.$$

Следовательно, $\| D^{\varkappa} a \|_E \leqq c \| a \|_E + c \| a \|_{\dot{W}^m E}$, $|\varkappa| = k < m$ и $\| a \|_{\dot{W}^k E} \leqq c \| a \|_E + c \| a \|_{\dot{W}^m E}$ $(0 \leqq k \leqq m)$. Из (3. 9)—(3. 11) вытекает, что $\| a \|_{\dot{W}^k E} \leqq c \| a \|_E^{1-\theta} \| a \|_{\omega^{m+2} E}^{\theta}$ $(0 \leqq k \leqq m)$, поэтому $\| a \|_{W^m E} \leqq c \| a \|_E^{1-\theta} \| a \|_{\omega^{m+2} E}^{\theta}$.

Предложение 3. 2 полностью доказано.

3. 3. Замечание.

Из (3. 11) вытекает, что $\| a \|_{W^m E} \asymp \| a \|_E + \| a \|_{\dot{W}^m E}$.

3. 4. Предложение.

$$(E, \omega^{m+2} E)_{\alpha/(m+2),\, q} = (\omega^m E, \omega^{m+2} E)_{\theta,\, q} = B_q^{\alpha} E,$$

$$\alpha = m + 2\theta, \quad 0 < \theta < 1, \quad 0 < q \leqq \infty.$$

Доказательство. Обозначим через $\| \cdot \|_0$ — квазинорму первого пространства, через $\| \cdot \|_1$ — второго. Из теоремы реитерации (см. [6]) и предложения 3. 2 следует, что $\| \cdot \|_0 \asymp \| \cdot \|_1$. Из предложения 3. 1 имеем

$$\| a \|_0 \asymp \| a \|_E + \sum_{i=1}^{n} \left[\int_0^1 t^{-\alpha q} \sup_{0 < h \leqq t} \| \Delta_i^{m+2}(h)\, a \|_E^q \frac{dt}{t} \right]^{1/q},$$

откуда $\| a \|_0 \leqq c \| a \|_{B_q^{\alpha} E}$. С другой стороны, для любого разложения

$$a = a_0 + a_1, \quad a_0 \in \omega^m E, \quad a_1 \in \omega^{m+2} E, \quad \sup_{0 < h \leqq t} \| \Delta_i^2(h)\, D_i^m a \|_E \leqq c \left[\| D_i^m a_0 \|_E + t^2 \| D_i^{m+2} a_1 \|_E \right],$$

поэтому $\sum_{i=1}^{n} \sup_{0 < h \leqq t} \| \Delta_i^2(h)\, D_i^m a \|_E \leqq c\, K(t^2, a; \omega^m E, \omega^{m+2} E)$.

Отсюда $\| a \|_{B_q^{\alpha} E} \leqq \| a \|_E + c \| a \|_{(\omega^m E,\, \omega^{m+2} E)_{\theta\, q}}$ и, следовательно, $\| a \|_{B_q^{\alpha} E} \leqq c \| a \|_0$.

3. 5. Предложение.

$$(E, W^{m+2} E)_{\alpha/(m+2),\, q} = (E, \omega^{m+3} E)_{\alpha/(m+3),\, q} = B_q^{\alpha} E, \quad m < \alpha < m+2, \quad 0 < q \leqq \infty.$$

Доказательство. Первое равенство следует из предложения 3. 2 и теоремы реитерации (см. [6]). Далее, обозначим через $\| \cdot \|_2$ — квазинорму второго пространства. Согласно предложению 3. 1

$$\|a\|_2 \asymp \|a\|_E + \sum_{i=1}^{n} \left[\int_0^1 t^{-\alpha q} \sup_{0<h\leq t} \|\Delta_i^{m+3}(h)\, a\|_E^q \frac{dt}{t} \right]^{1/q},$$

откуда $\|a\|_2 \leq c\|a\|_0$. Обратно, имеет место тождество Маршо,

$$\Delta_i^{m+2}(h) = 2^{-m-2}\Delta_i^{m+2}(2h) + Q_{m+1}\cdot\Delta_i^{m+3}(h),$$

где Q_{m+1} — полином степени $m+1$ от $T_i(h)$, I. Очевидно,

$$\sup_{0<h\leq t} \|\Delta_i^{m+2}(h)\, a\|_E \leq 2^{-m-2} \sup_{0<h\leq 2t} \|\Delta_i^{m+2}(h)\, a\|_E + c \sup_{0<h\leq t} \|\Delta_i^{m+3}(h)\, a\|_E,$$

откуда

$$(1-2^{\alpha-m-2}) \left[\int_0^\infty t^{-\alpha q} \sup_{0<h\leq t} \|\Delta_i^{m+2}(h)\, a\|_E^q \frac{dt}{t} \right]^{1/q}$$

$$\leq c \left[\int_0^\infty t^{-\alpha q} \sup_{0<h<t} \|\Delta_i^{m+3}(h)\, a\|_E^q \frac{dt}{t} \right]^{1/q}$$

и, следовательно, $(\alpha < m+2)$, $\|a\|_0 \leq c\|a\|_2$.

3. 6. **Следствие.**

$$\|a\|_{B_q^\alpha E} \asymp \|a\|_E + \sum_{i=1}^{n} \left[\int_0^\varepsilon t^{-\alpha q} \sup_{0<h\leq t} \|\Delta_i^{m+2}(h)\, a\|_E^q \frac{dt}{t} \right]^{1/q}, \quad 0<\varepsilon\leq\infty.$$

В заключение этого пункта определим пространства $B_q^{\alpha\beta}E$ $(\alpha>0$, $\beta>0$, $0<q\leq\infty)$. Это множество всех элементов $a \in E$ таких, что

$$\|a\|_{B_q^{\alpha\beta}E} = \|a\|_E + \|a\|_{\dot{B}_{q\,x}^{\alpha}E} + \|a\|_{\dot{B}_{q,y}^{\beta}E} + \|a\|_{\dot{B}_q^{\alpha\beta}E} < \infty,$$

$$\|a\|_{\dot{B}_q^{\alpha\beta}E} = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{k=1}^{n_2} \left[\int_0^\infty \int_0^\infty \sup_{0<h_1\leq t} \sup_{0<h_2\leq\tau} \|\Omega_{x_i h_1 t}^{\alpha}\, \Omega_{y_k h_2 \tau}^{\beta}\, a\|_E^q \frac{dt}{t} \frac{d\tau}{\tau} \right]^{1/q}.$$

Это p-банахово пространство, $p=\min(1, q)$, относительно p-нормы $a \to \|a\|_{B_q^{\alpha\beta}E}$. Положим $B_q^{0\beta}E = B_{qy}^{\beta}E$, $B_q^{\alpha 0}E = B_{qx}^{\alpha}E$.

В том случае, когда $E = L^p(R^n)$ $(1\leq p<\infty)$, обычно пишут $S_{p,q}^{\vec{r}}B(R^n)$, $(\vec{r}=(\alpha,\ldots\alpha;\ \beta,\ldots\beta)$, вместо $B_q^{\alpha\beta}L^p(R^n)$.

4. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Пусть (E_0, E_1) совместная пара банаховых пространств;

$E=(E_0, E_1)_{\theta\, p_0, p_1}$ $(0<\theta<1,\ 1\leq p_0,\ p_1\leq\infty,\ 1/p_0+1/p_1>0)$, $\{T_i(t)\}$

семейство n попарно коммутирующих ограниченных и непрерывных полугрупп операторов в E_0 и E_1. Продолжим $T_i(t)$ линейно на все E_0+E_1. Легко проверить, что $\{T_i(t)\}$ — такое же семейство и в E_0+E_1, и в E. Тогда операторы D_i, $D_i=\lim \Delta_i(h)/h$ $(h\to 0)$ можно одновременно определить в E_0+E_1, E, E_0 и E_1. Определения согласованы.

4. 1. Теорема.

$$B_q^{\alpha\beta}E \subset (B_{q_0\,x}^{\alpha_0}E_0,\ B_{q_1\,y}^{\alpha_1}E_1)_{\theta\,p_0\,p_1} \subset B_\infty^{\alpha\beta}E,$$

$$\alpha=(1-\theta)\alpha_0,\ \beta=\theta\alpha_1,\ 1/q=(1-\theta)/r_0+\theta/r_1,\ r_i=\min(1,\ q_i),$$

$$\alpha_i\geqq 0\ (i=0,\ 1),\ 0<q_0,\ q_1\leqq\infty,\ 1\leqq p_0,\ p_1\leqq\infty,\ 1/p_0+1/p_1>0.$$

4. 2. Замечание.

В случае $E_0=E_1=E$ теорема 4. 1 имеет место при всех p_0, p_1, $0<p_0$, $p_1\leqq\infty$. При этом r_i надо вычислять по формуле $r_i=\min(1,p_i,q_i)$.

4. 3. Замечание.

В теореме 4. 1 вместо функтора „средних" $(.,.)_{\theta\,p_0,\,p_1}$ можно взять любой интерполяционный функтор $\Phi_\theta: B\to B'$ $(0<\theta<1)$ такой, что $\{T_i(t)\}$ — семейство непрерывных полугрупп и в $E=\Phi_\theta[E_0,\ E_1]$. При этом, число q будет соответствовать q-норме на $\Phi_\theta[B_{q_0\,x}^{\alpha_0}E_0,\ B_{q_1\,y}^{\alpha_1}E_1]$.

В частности, если $q_0\geqq 1$, $q_1\geqq 1$ в качестве Φ_θ можно брать комплексный функтор $[.,.]_\theta$ (см. [7]).

Доказательство теоремы 4. 1.

1. Докажем первое вложение $\subset$.

Для всех целых $k\leqq 0$, $l=0,\ \pm 1,\ldots$ и целых $r,\ s,\ 0\leqq r,\ s\leqq m$,

$$\|Y_{kl}\,a\|_{B_{q_0\,x}^{\alpha_0}E_0}\leqq Ce^{(r-\alpha_0)\,k+sl}\|a\|_{W_x^r\,W_y^sE_0}. \tag{4. 1}$$

Действительно, примем во внимание следствие 3. 6. Обозначим через $\|.\|_{\dot B_{q_0\,x}^{\alpha_0}E_0}$ главный член p-нормы $\|.\|_{B_{q_0\,x}^{\alpha_0}E_0}$, где $m+2$ заменено на m. Очевидно,

$$\Delta_{ix}^m(h)\,Y_k\ a=\int\int\Delta_{ix}^m(h)\,\varphi_k(x)\psi_l(y)\,T(x)\,T(y)\,a\,dx\,dy,$$

$$\|\Delta_{ix}^m(h)\,\varphi_k(x)\|\leqq h^m e^{-km}\left[\left\|\frac{\partial^m}{\partial x_i^m}\overset{\circ}{\varphi}_{e^k}(x)\right\|+e^{-m}\left\|\frac{\partial^m}{\partial x_i^m}\overset{\circ}{\varphi}_{e^{k+1}}(x)\right\|\right],$$

откуда $\|\Delta_{ix}^m(h)\,Y_{kl}\,a\|_{E_0}\leqq Ch^m e^{-km}\|a\|_{E_0}$. С другой стороны, $\|\Delta_{ix}^m(h)\,Y_{kl}\,a\|_{E_0}\leqq C\|a\|_{E_0}$, поэтому $\|Y_{kl}\,a\|_{\dot B_{q_0\,x}^{\alpha_0}E_0}\leqq Ce^{-k\alpha_0}\|a\|_{E_0}$. Следовательно,

$$\|Y_{kl}\,a\|_{B_{q_0\,x}^{\alpha_0}E_0}\leqq Ce^{-k\alpha_0}\|a\|_{E_0}\ (k\leqq 0),$$

что совпадает с (4. 1) при $r=s=0$. Далее, по формуле Тейлора

$$T_i(x_i)\,a = a + x_i D_{x_i} a + \ldots + \frac{x_i^{m-1}}{(m-1)!} D_{x_i}^{m-1} a$$

$$+ R(x_i)\,a,\ R(x_i)\,a = \int_0^{x_i} (x_i - \xi)^{m-1}\, T_i(\xi)\, D_{x_i}^m a\, d\xi$$

и по свойствам (2. 7), (2. 8)

$$Y_{kl}\,a = C \int\int \varphi_k(x)\,\psi_l(y) \left[\int_0^{x_i} (x_i - \xi)^{m-1}\, T(x')\, T(y)\, D_{x_i}^m a\, d\xi \right] dx\, dy,$$

$$x' = (x_1, \ldots \underset{i-1}{x}, \xi, \underset{i+1}{x} \ldots x_n),$$

откуда $\|\Delta_{ix}^m(h)\, Y_{kl}\, a\|_{E_0} \leqq C e^{km} \|a\|_{W_x^m E_0}$. Из определения Y_{kl} непосредственно следует, что $\|\Delta_{ix}^m(h)\, Y_{kl}\, a\|_{E_0} \leqq C h^m \|a\|_{W_x^m E_0}$, поэтому $\|Y_{kl}\, a\|_{B^{\alpha_0}_{q_0 x} E_0} \leqq C e^{k(m-\alpha_0)} \|a\|_{W_x^m E_0}$. Следовательно, $\|Y_{kl}\, a\|_{B^{\alpha_0}_{q_0 x} E_0} \leqq C e^{k(m-\alpha_0)} \|a\|_{W_x^m E_0}$ $(k \leqq 0)$, что совпадает с (4. 1) при $r = m$, $s = 0$.

Подобным же образом устанавливаются другие оценки в (4. 1).

Аналогично, для всех целых $l \leqq 0$, $k = 0, \pm 1$, и целых r, s; $0 \leqq r$, $s \leqq m$,

(4. 2) $$\|Y_{kl}\, a\|_{B^{\alpha_1}_{q_1 y} E_1} \leqq C e^{rk + (s-\alpha_1) l} \|a\|_{W_x^r W_y^s E_1}.$$

Далее

(4. 3) $$(W_x^m E_0,\ W_x^m E_1)_{\theta p_0 p_1} = W_x^m E.$$

Действительно, оператор $(I - D_{x_1})^m \ldots (I - D_{x_{n_1}})^m$ осуществляет изоморфизм $W_{x_i}^m E_i$ на E_i $(i = 0, 1)$ (см. [8, стр. 278]) и функтор $(\cdot, \cdot)_{\theta p_0 p_1}$ является интерполяционным.

Положим $B = (B^{\alpha_0}_{q_0 x} E_0, B^{\alpha_1}_{q_1 y} E_1)_{\theta p_0 p_1}$. Интерполируя отображение $a \to Y_{kl}\, a$ согласно (4. 1) и (4. 2), с помощью (4. 3) получаем

(4. 4) $$\|Y_{kl}\, a\|_B \leqq C e^{(r-\alpha)k + (s-\beta) l} \|a\|_{W_x^r W_y^s E},$$

$$\alpha = (1-\theta)\,\alpha_0,\ \beta = \theta \alpha_1;\ 0 \leqq r,\ s \leqq m;\ k \leqq 0,\ l \leqq 0.$$

Используя (4. 4) при $r = 0$ и $r = m$, находим

$$\|Y_{kl}\, a\|_B \leqq C e^{-\alpha k + (s-\beta) l} K(e^{mk},\ a;\ W_y^s E,\ W_x^m\ W_y^s E)$$

для всех $k \leqq 0$, $l \leqq 0$, $0 \leqq s \leqq m$. Отсюда

$$\sum_{k<0} \|Y_{kl}\, a\|_B^q \leqq C e^{(s-\beta) lq} \|a\|^q_{(W_y^s E,\ W_x^m W_y^s E)_{\frac{\alpha}{m}, q}} \quad (l \leqq 0,\ 0 \leqq s \leqq m).$$

По предложению 3. 5 $(W_y^s E, W_x^m W_y^s E)_{\frac{\alpha}{m}, q} = B_{qx}^\alpha W_y^s E$ поэтому

$$\sum_{k<0} \|Y_{kl} a\|_B^q \leqq C e^{(s-\beta) lq} \|a\|_{B_{qx}^\alpha W_y^s E}^q \quad (l \leqq 0,\ 0 \leqq s \leqq m).$$

Используя это соотношение при $s=0$ и $s=m$, находим

$$\sum_{k<0} \|Y_{kl} a\|_B^q \leqq C e^{-\beta lq} K^q (e^{mlq},\ a;\ B_{qx}^\alpha E,\ B_{qx}^\alpha W_y^m E) \quad (l \leqq 0)$$

и, следовательно,

$$\sum_{k<0} \sum_{l<0} \|Y_{kl} a\|_B^q \leqq C \|a\|^q_{(B_{qx}^\alpha E,\ B_{qx}^\alpha W_y^m E)_{\frac{\beta}{m}\ q}}. \tag{4. 5}$$

Далее, действуя так же, как при доказательстве предложения 3. 2, получаем соотношения

$$B_{qx}^\alpha \omega_y^m E\ B_{qx}^\alpha W_y^m E \subset P_\theta (B_{qx}^\alpha E\ B_{xq}^\alpha\ \omega_y^{m+2} E), \quad \theta = m/(m+2),$$

поэтому, по теореме реитерации (см. [6]), имеем

$$(B_{qx}^\alpha E,\ B_{qx}^\alpha W_y^m E)_{\frac{\beta}{m}\ q} = (B_{qx}^\alpha E,\ B_{qx}^\alpha \omega_y^{m+2} E)_{\frac{\beta}{m+2}\ q}. \tag{4. 6}$$

С другой стороны, аналогично предложению 3. 1 можно вывести формулу

$$K(\tau^{m+2},\ a) = K(\tau^{m+2},\ a;\ B_{qx}^\alpha E,\ B_{qx}^\alpha \omega_y^{m+2} E) = \|a\|_{B_{qx}^\alpha E} \quad (\tau \geqq 1),$$

$$K^q(\tau^{m+2},\ a) \asymp \tau^{m+2} \|a\|_{B_{qx}^\alpha E} + \sum_{k=1}^{n_2} \sup_{0<h_2\leqq\tau} \|\Delta_{ky}^{m+2}(h_2) a\|_E^q$$

$$+ \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{k=1}^{n_2} \int_0^\infty t^{-\alpha q} \sup_{0<h_1\leqq t} \sup_{0<h_2\leqq\tau} \|\Delta_{ix}^{m+2}(h_1) \Delta_{ky}^{m+2}(h_2) a\|_E^q \frac{dt}{t},\ 0<\tau\leqq 1.$$

Следовательно (ср. предложения 3. 4),

$$(B_{qx}^\alpha E,\ B_{qx}^\alpha \omega_y^{m+2} E)_{\frac{\beta}{m+2}, q} = B_q^{\alpha\beta} E. \tag{4. 7}$$

Отсюда, из (4. 5), (4. 6) получаем

$$\sum_{k<0} \sum_{l<0} \|Y_{kl} a\|_B^q \leqq C \|a\|_{B_q^{\alpha\beta} E}^q.$$

Точно так же выводятся оценки

$$\sum_{k<0} \|A_k a\|_B^q \leqq C\|a\|^q_{B^\alpha_{qx}E}, \quad \sum_{l<0} \|B_l a\|_B^q \leqq C\|a\|^q_{B^\beta_{qy}E}, \quad \|c_a\|_B \leqq C\|a\|_E.$$

Так как $B=q$-банахово пространство, $B\subset E$ и имеет место (2. 13), получаем $\|a\|^B \leqq C\|a\|_{B^{\alpha\beta}_q E}$.

2. Докажем второе вложение $\subset$.

Имеет место оценка

(4. 8) $$\|a\|_{B^\alpha_{\infty x}E} \leqq c\|a\|_B.$$

Действительно, пусть φ и ψ построены по $\overset{\circ}{\varphi}$ и $\overset{\circ}{\psi}$ так же, как ω по $\overset{\circ}{\omega}$. Положим $Y_1(h)=\int \varphi_h(x)\,T(x)\,dx$,

$$a_0(t)=\int_0^t Y_1(h)\,a\,\frac{dh}{h}, \quad a_1(t)=\overset{\circ}{Y}_1(t)\,a, \quad 0<t<\infty.$$

Тогда, по (2. 4)

(4. 9) $$a=a_0(t)+a_1(t), \quad 0<t<\infty.$$

С другой стороны, $\|Y_1(h)\,a\|_{E_i} \leqq ch^k\|a\|_{\omega^k_x E_i}$ $(i=0,\ 1;\ 0\leqq k\leqq m)$, откуда по методу „средних" с параметрами $(\alpha_0/m,\ q_0)$ получаем $\|Y_1(h)\,a\|_{E_0} \leqq ch^{\alpha_0}\|a\|_{B^{\alpha_0}_{q_0 x}E_0}$; очевидно, $\|Y_1(h)\,a\|_{E_1} \leqq c\,a\|_{E_1} \leqq c\,\|a\|_{B^{\alpha_1}_{q_1 y}E_1}$. Интерполируя отображение $a\to Y_1(h)\,a$ согласно последних двух оценок, находим $\|Y_1(h)\,a\|_E \leqq ch^\alpha\|a\|_B$, откуда

(4. 10) $$\|a_0(t)\|_E \leqq ct^\alpha\|a\|_B.$$

Далее, $\|a_1(t)\|_{W^m_x E_i} \leqq ct^{k-m}\|a\|_{W^k_x E_i}$ $(i=0,1)$, $0\leqq k\leqq m$, $0<t\leqq 1$, откуда по методу „средних" с параметрами $(\alpha_0/m,\ q_0)$ получаем

$$\|a_1(t)\|_{W^m_x E_0} \leqq ct^{\alpha_0-m}\|a\|_{B^{\alpha_0}_{q_0 x}E_0} \quad (0<t\leqq 1);$$

очевидно,

$$\|a_1(t)\|_{W^m_x E_1} \leqq ct^{-m}\|a\|_{E_1} \leqq ct^{-m}\|a\|_{B^{\alpha_1}_{q_1 y}E_1} \quad (0<t\leqq 1).$$

Интерполируя отображение $a\to \overset{\circ}{Y}_1(t)\,a$ согласно последних оценок, находим (учитывая (4. 3)),

(4. 11) $$\|a_1(t)\|_{W^m_x E} \leqq ct^{\alpha-m}\|a\|_B \quad (0<t\leqq 1).$$

Из (4. 9)—(4. 11) и (3. 5) вытекает $K(t^m,\ a;\ E,\ W^m_x E) \leqq ct^\alpha\|a\|_B$. Применяя предложения (3. 5), получаем (4. 8).

Положим $Y_2(\tau)=\int \psi_\tau(y)\,T(y)\,dy$. Тогда

(4. 12) $$\|Y_2(\tau)\,a\|_{B^\alpha_{\infty x}E}\leqq c\,\tau^\beta\,\|a\|_B.$$

Действительно, из (2. 4) имеем

(4. 13) $$Y_2(\tau)a=b_0(t)+b_1(t),\ 0<t<\infty,$$

$$b_0(t)=\int_0^t Y_1(h)\,Y_2(\tau)\,a\,\frac{dh}{h},\quad b_1(t)=\overset{\circ}{Y}_1(t)\,Y_2(\tau)\,a.$$

С другой стороны, $\|Y_1(h)\,Y_2(\tau)\,a\|_{E_0}\leqq ch^k\,\|a\|_{\omega^k_x E_0}$ $(0\leqq k\leqq m)$,

$$\|Y_1(h)\,Y_2(\tau)\,a\|_{E_1}\leqq c\,\tau^k\,\|a\|_{\omega^k_y E_1}\ (0\leqq k\leqq m),$$

откуда, по методу „средних" с параметрами $(\alpha_0/m,\ q_0)$ и $(\alpha_1/m,\ q_1)$ соответственно, получаем

$$\|Y_1(h)\,Y_2(\tau)\,a\|_{E_0}\leqq ch^{\alpha_0}\,\|a\|_{B^{\alpha_0}_{q_0 x}E_0},\quad \|Y_1(h)\,Y_2(\tau)\,a\|_{E_1}\leqq c\,\tau^{\alpha_1}\,\|a\|_{B^{\alpha_1}_{q_1 y}E_1}.$$

Интерполируя отображение $a\to Y_1(h)\,Y_2(\tau)\,a$ согласно последних двух оценок, находим $\|Y_1(h)\,Y_2(\tau)\,a\|_E\leqq ch^\alpha\,\tau^\beta\,\|a\|_B$ и, следовательно,

(4. 14) $$\|b_0(t)\|_E\leqq ct^\alpha\,\tau^\beta\,\|a\|_B.$$

Аналогично (4. 11) имеем

(4. 15) $$\|b_1(t)\|_{W^m_x E}\leqq ct^{\alpha-m}\,\tau^\beta\,\|a\|_B\ \ (0<t\leqq 1).$$

Из (4. 13)—(4. 15) получаем $K(t^m,\ Y_2(\tau)\,a;\ E,\ W^m_x E)\leqq ct^\alpha\,\tau^\beta\,\|a\|_B$, $0<t\leqq 1$, откуда следует (4. 12), если учесть, что при $t\geqq 1$ (ср. (4. 10))

$$K(t^m,\ Y_2(\tau)\,a;\ E,\ W^m_x E)=\|Y_2(\tau)\,a\|_E\leqq c\,\tau^\beta\,\|a\|_B;$$

затем нужно применить предложение 3. 5.

Пусть $\overset{\circ}{Y}_2(\tau)\,a=\int \overset{\circ}{\psi}_\tau(y)\,T(y)\,a\,dy$. Тогда

(4. 16) $$\|\overset{\circ}{Y}_2(\tau)\,a\|_{W^m_y B^\alpha_{\infty x}E}\leqq c\,\tau^{\beta-m}\,\|a\|_B\ \ (0<\tau\leqq 1).$$

Действительно

(4. 17) $$\overset{\circ}{Y}_2(\tau)a=\overset{\circ}{b}_0(t)+\overset{\circ}{b}_1(t),\ 0<t<\infty,$$

$$\overset{\circ}{b}_0(t)=\int_0^t Y_1(h)\,\overset{\circ}{Y}_2(\tau)\,a\,\frac{dh}{h},\quad \overset{\circ}{b}_1(t)=\overset{\circ}{Y}_1(t)\,\overset{\circ}{Y}_2(\tau)\,a,$$

$$\|Y_1(h)\mathring{Y}_2(\tau)a\|_{W_y^m E_0} \leqq c\,\tau^{-m} h^k \|a\|_{\omega_x^k E_0} \quad (0 \leqq k \leqq m,\ 0<\tau \leqq 1),$$

$$\|Y_1(h)\mathring{Y}_2(\tau)a\|_{W_y^m E_1} \leqq c\,\tau^{k-m} \|a\|_{\omega_y^k E_1} \quad (0 \leqq k \leqq m,\ 0<\tau \leqq 1),$$

откуда по методу „средних“

$$\|Y_1(h)\mathring{Y}_2(\tau)a\|_{W_y^m E_0} \leqq c\,\tau^{-m} h^{\alpha_0} \|a\|_{B^{\alpha_0}_{q_0 x} E_0} \quad (0<\tau \leqq 1),$$

$$\|Y_1(h)\mathring{Y}_2(\tau)a\|_{W_y^m E_1} \leqq c\,\tau^{\alpha_1-m} \|a\|_{B^{\alpha_1}_{q_1 y} E_1} \quad (0<\tau \leqq 1).$$

Интерполируя отображение $a \to Y_1(h)\mathring{Y}_2(\tau)a$ согласно последних двух оценок, находим (учитывая (4. 3)), $(0<\tau \leqq 1)$

$$\|Y_1(h)\mathring{Y}_2(\tau)a\|_{W_y^m E} \leqq c\,\tau^{\beta-m} h^{\alpha} \|a\|_B$$

и, следовательно,

$$\|\mathring{b}_0(t)\|_{W_y^m E} \leqq c\,\tau^{\beta-m} t^{\alpha} \|a\|_B \quad (0<\tau \leqq 1). \tag{4. 18}$$

Аналогично (4. 11), (4. 15) имеем

$$\|\mathring{b}_1(t)\|_{W_x^m W_y^m E} \leqq c t^{\alpha-m} \tau^{\beta-m} \|a\|_B \quad (0<t,\ \tau \leqq 1). \tag{4. 19}$$

Из (4. 17)—(4. 19) следует $(0<\tau \leqq 1)$

$$K(t^m,\ \mathring{Y}_2(\tau)a;\ W_y^m E, W_x^m W_y^m E) \leqq c t^{\alpha} \tau^{\beta-m} \|a\|_B \quad (0<t \leqq 1).$$

Чтобы получить отсюда (4. 16), надо учесть, что при $t \geqq 1$

$$K(t^m,\ \mathring{Y}_2(\tau)a;\ W_y^m E,\ W_x^m W_y^m E) = \|\mathring{Y}_2(\tau)a\|_{W_y^m E} \leqq c\,\tau^{\beta-m} \|a\|_B$$

(ср. (4. 11)) и затем надо применить предложения 3. 5.

Наконец, положим $a_0(\tau) = \int\limits_0^{\tau} Y_2(h) a \dfrac{dh}{h}$, $a_1(\tau) = \mathring{Y}_2(\tau)a$. Тогда

$$a = a_0(\tau) + a_1(\tau),\ 0<\tau<\infty. \tag{4. 20}$$

Из (4. 12) имеем

$$\|a_0(\tau)\|_{B^{\alpha}_{\infty x} E} \leqq c\,\tau^{\beta} \|a\|_B, \tag{4. 21}$$

из (4. 16) $\quad \|a_1(\tau)\|_{W_y^m B^{\alpha}_{\infty x} E} \leqq c\,\tau^{\beta-m} \|a\|_B \quad (0<\tau \leqq 1).$

Отсюда, из (4. 20), (4. 21) вытекает формула

(4. 22) $$K(\tau^m, a; B^{\alpha}_{\infty x}E, W^m_y B^{\alpha}_{\infty x}) \leq c\,\tau^{\beta}\,\|a\|_B \quad (0<\tau\leq 1).$$

Из (3. 5) и (4. 8) имеем

(4. 23) $$K(\tau^m, a; B^{\alpha}_{\infty x}E, W^m_y B^{\alpha}_{\infty x}E) \leqq c\,\|a\|_B \quad (\tau\geqq 1).$$

Теперь (4. 22), (4. 23) и предложение 3. 5 показывают, что $\|a\|_{B^{\alpha\beta}_{\infty}E} \leqq c\,\|a\|_B$. Теорема полностью доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Peetre, J.: Espaces d'interpolation et théorèmes de Soboleff. Ann. inst. Fourier, 16 (1966), 1, 279—317.
2. Peetre, J.: A new approach in interpolation spaces. Studia math., 34 (1970), 1, 23—42.
3. Peetre, J.: Sur le nombre de paramètres dans la définition de certains espaces d'interpolation. 12. 1963, 2, 248—261.
4. Köthe, G.: Topollogische lineare Räume 1. Berlin, 1966.
5. Караджов, Г. Е.: О применении интерполяции к оценкам s-чисел интегральных операторов. Сб. „Пробл. мат. анализа", изд. ЛГУ, 1973, 37—45.
6. Караджов, Г. Е.: Об интерполяционном методе „средних" для квазинормированных пространств. Докл. АН СССР, 209 (1973), 1, 33—36.
7. Кальдерон, А. П.: Промежуточные пространства и интерполяция. Комплексный метод. Сб. пер. Математика, 9 (1965), 3, 56—129.
8. Хилл, Э.: Функциональный анализ и полугруппы. ИЛ, Москва, 1951.

Поступила 24. XI. 1973 г.

SUR L'INTERPOLATION ENTRE LES ESPACES DU TYPE DE L'ESPACE DE O. V. BESSOV

G. E. Karadžov

(RÉSUMÉ)

Dans ce travail nous démontrons deux plongements d'interpolation par une méthode de représentation intégrale discrète:

$$B^{\alpha\beta}_q(E_0, E_1)_{\theta\, p_0 p_1} \subset (B^{\alpha_0}_{q_0 x}E_0, B^{\alpha_1}_{q_1 y}E_1)_{\theta\, p_0 p_1} \subset B^{\alpha\beta}_{\infty}(E_0, E_1)_{\theta\, p_0 p_1},$$

où

$$\alpha=(1-\theta)\alpha_0,\ \beta=\theta\alpha_1,\ 1/q=(1-\theta)/r_0+\theta/r_1,\ r_i=\min(1, q_i),\ \alpha_i\geqq 0,$$

$$(i=0, 1),\ 0<q_0,\ q_1\leqq\infty,\ 1\leqq p_0,\ p_1\leqq\infty,\ 1/p_0+1/p_1>0$$

et E_0, E_1 sont deux espaces de Banach, qui forment une paire d'interpolation et dans lesquels agit une famille de n semi-groupes $\{T_i(t)\}$ $(i=1,\ldots,n;\ 0\leqq t<\infty)$ commutatifs, continues et bornés.

Nous définissons l'espaces $B^{\alpha}_{qx}E$ $(\alpha\geqq 0,\ q>0)$ comme ci-dessus:

Posons: $\Omega^{\alpha}_{x_i ht}=t^{m-\alpha}\Delta^2_{ix}(h)D^m_{x_i}$, $\Delta_{ix}(h)=T_i(h)-I$, $x\in R^{n_1}$, $n=n_1+n$

$$(i=1,\ldots,n_1),\ B^{\alpha}_{qx}E=\left\{a\in E;\ \|a\|_{B^{\alpha}_{q}E}=\|a\|_E+\sum_{i=1}^{n}{}'\left[\int_0^{\infty}\sup_{0<h\leqq t}\|\Omega^{\alpha}_{z_i ht}a\|^q_E\frac{dt}{t}\right]^{1/q}\right.$$

$$\left.<\infty\right\},\ B^0_{qx}E=E,$$ où m est le plus grand entier avec

$$m<\alpha,\ D_{x_i}=\lim_{h\to 0}\Delta_{ix}(h)/h\,.$$

C'est une espace p-normé, $p=\min(1,q)$. L'espace $B^{\beta}_{qy}E$ est defini par une manière analogue.

L'espace $B^{\alpha\beta}_{q}E$ est une espace p-normé par rapport à la p-norme suivante:

$$\|a\|_{B^{\alpha\beta}_{q}E}=\|a\|_E+\|a\|_{B^{\alpha}_{qx}E}+\|a\|_{B^{\beta}_{qy}E}+\|a\|_{\dot{B}^{\alpha\beta}_{q}E},$$

où

$$\|a\|_{\dot{B}^{\alpha\beta}_{q}E}=\sum_{i=1}^{n_1}{}'\sum_{k=1}^{n_2}{}'\left[\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\sup_{0<h_1\leqq t}\sup_{0<h_2\leqq\tau}\|\Omega^{\alpha}_{x_i h_1 t}\Omega^{\beta}_{y_k h_2\tau}a\|^q_E\frac{dt}{t}\frac{d\tau}{\tau}\right]^{1/q}$$

$$\alpha>0,\ \beta>0,\ q>0,\ p=\min(1,q).$$