ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ МНОГОМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Недю И. Попиванов

В настоящей работе рассматриваются некоторые краевые задачи в ограниченных областях полупространства $x_m \geqq 0$ $(m \geqq 3)$ для вырождающегося гиперболического уравнения

$$(1) \qquad Lu \equiv a_{ij}(x)\, u_{x_i x_j} - K(x_m)\, u_{x_m x_m} + \alpha_i(x)\, u_{x_i} + \alpha_m(x)\, u_{x_m} + \alpha_0(x)\, u = f(x),$$

где $K(x_m) \in C^1[0, \infty) \cap C^2(0, \infty)$, $K(x_m) > 0$ для $x_m > 0$, $K(0) = 0$; матрица (a_{ij}) симметрическая и положительно определенная в замкнутой области. Здесь и ниже по повторяющимся индексам проводится суммирование от 1 до $m-1$. Будем предполагать, что в замкнутой области функции $a_{ij} \in C^2$, $\alpha_i \in C^1$, $\alpha_m \in C^1$, $\alpha_0 \in C$. Пусть выполнено и условие: $K'(0) + 2\alpha_m(x_1, \ldots, x_{m-1}, 0) > 0$. Тогда для уравнения (1) выводятся априорные оценки для общих граничных задач. Из них следует единственность сильного решения и доказывается, что для каждой $f \in W_2^0$ существует слабое решение из W_2^1, которое удовлетворяет в среднем граничным условиям. Последнее делаем, используя прием из работы [1], однако здесь общий вид границы приводит к значительному усложнению доказательства. В конце § 2 показываем, что во многих случаях условие $K'(0) + \alpha_m(x_1, \ldots, x_{m-1}, 0) \geqq 0$ является необходимым для существования сильного решения для всех $f \in W_2^0$. Даем и более сильное необходимое условие для этого.

Для уравнения

$$(2) \qquad Lu \equiv u_{x_i x_i} - K(x_m)\, u_{x_m x_m} + \alpha_i(x)\, u_{x_i} + \alpha_m(x)\, u_{x_m} + \alpha_0(x)\, u = f(x)$$

в некоторых характерных областях доказываем существование и единственность сильного решения $u \in W_2^1$ для каждой $f \in W_2^{0*}$. Таким образом условие $\alpha_m \geqq 0$ является необходимым, а $\alpha_m > 0$ — достаточным условием для этого, если $K'(0) = 0$.

Раньше уравнение (2) рассматривалось в работе [2] при дополнительных предположениях: $K'(x_m) > 0$, $\alpha_i \equiv 0$, $i = 1, \ldots, m-1$, $\alpha_m = \text{const}$.

---

* Отметим, что в работе [6] получены аналогичные результаты для уравнений (1) и (2) в случае $K(0) > 0$ и в случае, когда вырождается не коэффициент перед $u_{x_m x_m}$, а матрица a_{ij}.

Исследуется вопрос о постановке краевых задач. Доказана единственность сильного решения некоторых задач, а для одной из них — существование слабого решения из W_2^1 для каждой $f \in W_2^0$.

Отметим, что на вопрос об исследовании задачи A_1 при $\varepsilon = 0$ нам обратил внимание Г. Д. Каратопраклиев.

§ 1. ПОЛОЖИТЕЛЬНО-СИММЕТРИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Приведем некоторые результаты работы [4]. Пусть D — ограниченная область в m-мерном евклидовом пространстве R^m точек $x = (x_1, \ldots, x_m)$, имеющая кусочно-гладкую $m-1$-мерную границу ∂D. Рассмотрим в области D линейную систему первого порядка

$$Ku = A_i \partial_i u + A_m \partial_m u + Bu = f, \tag{3}$$

где $f = (f_1, \ldots, f_k)$, $u = (u_1, \ldots, u_k)$, $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, $A_i (i = 1, \ldots, m)$ и B — $k \times k$-матрицы, причем A_i — непрерывно дифференцируемые, B — непрерывная. Введем матрицу $\varkappa = B - \partial_i A_i/2 - \partial_m A_m/2$ и обозначим через $\varkappa'$ ее транспонированную.

Если матрицы $A_i (i = 1, \ldots, m)$ симметрическе и матрица $\varkappa + \varkappa'$ положительно определенная в D, система (3) называется положительно-симметрической.

Введем характеристическую матрицу $\beta = n_i A_i + n_m A_m$, где $(n_1, \ldots, n_m)$ — единичный вектор внешней нормали к ∂D. Предположим, что матрицу β можно представить в виде $\beta = \beta_+ + \beta_-$, при котором выполняются следующие два условия

$$\mu + \mu' \geqq 0, \tag{4}$$

где $\mu = (\beta_+ - \beta_-)/2$ и

$$\operatorname{Ker} \beta_+ + \operatorname{Ker} \beta_- = R^k, \tag{5}$$

где $\operatorname{Ker} \beta_\pm$ — ядро $\beta_\pm$*. Тогда граничное условие $\beta_- u = 0$ называется допустимым.

Рассмотрим задачу

$$Ku = f \text{ в } D, \quad \beta_- u = 0 \text{ на } \partial D, \tag{6}$$

и сопряженную к ней

$$K^* v = g \text{ в } D, \quad \beta'_+ v = 0 \text{ на } \partial D,$$

* Заметим, что в многих случаях матрицы β_+ и β_- выбираются симметрические и формы $u \cdot \beta_\pm u$ — знакопостоянные. Тогда для проверки условия (5) удобно использовать, что $\operatorname{Ker} \beta_\pm = \{u : u \cdot \beta_\pm u = 0\}$.

где $K^* v = -\partial_i (A_i v) - \partial_m (A_m v) + B' v$. Пусть $f \in L_2(D)$. Здесь ($L_2(D)$ — гильбертовое пространство векторных функций $u = (u_1, \ldots, u_k)$, со скалярным произведением $(u, v) = \int_D \sum_{i=1}^{m} u_i v_i \, dx$ и $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$.

Функция $u \in L_2(D)$ называется **слабым решением** задачи (6), если

$$(u, K^* v) = (f, v)$$

для всех $v \in C^1(D)$, удовлетворяющих сопряженному условию $\beta'_+ v = 0$.

Функция $u \in L_2(D)$ называется **сильным решением** задачи (6), если существует последовательность таких функций $u_n \in C^1(D)$, что $\beta_- u_n = 0$ и $\|u_n - u\| \to 0$, $\|K u_n - f\| \to 0$ при $k \to \infty$.

Для всех функций $u, v \in C^1(D)$, удовлетворяющих соответственно условиям $\beta_- u = 0$, $\beta'_+ v = 0$, справедливы энергетические неравенства:

$$(u, Ku) \geqq c \|u\|^2, \quad \|Ku\| \geqq c \|u\|, \quad \|K^* v\| \geqq c \|v\|, \quad c = \text{const} > 0.$$

Из второго неравенства следует, что сильное решение задачи (6) единственно, а из третьего — что для каждой $f \in L_2(D)$ существует слабое решение этой задачи.

§ 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ, ВЫВОД АПРИОРНЫХ ОЦЕНОК И СЛЕДСТВИЯ ИЗ НИХ

Пусть D — ограниченная область в R^m, лежащая в полупространстве $x_m \geqq 0$ и имеющая кусочно-гладкую $m-1$-мерную границу ∂D. Рассмотрим в D уравнение (1). Если функция $u \in C^2(\bar{D})$ удовлетворяет уравнению (1) в D, то функции $u_0 = u$, $u_i = \partial_i u$, $i = 1, \ldots, m$, удовлетворяют в D системе

$$(7) \qquad u_m - \partial_m u_0 = 0, \quad \partial_i u_m - \partial_m u_i = 0, \quad i = 1, \ldots, m-1,$$

$$a_{ij} \partial_i u_j - K \partial_m u_m + \alpha_i u_i + \alpha_m u_m + \alpha_0 u_0 = f.$$

Ее можно записать в виде $\hat{A}_i \partial_i \hat{u} + \hat{A}_m \partial_m \hat{u} + \hat{B} \hat{u} = \hat{f}$, где $\hat{u} = (u_0, \ldots, u_m)$, $\hat{f} = (0, \ldots, 0, f)$, $\hat{A}_m$ — диагональная матрица $\{-1, \ldots, -1, -K)$ и для $i = 1, \ldots, m-1$,

* Заметим, что в многих случаях матрицы β_+ и β_- выбираются симметрические и формы $u \cdot \beta_+ u$ — знакопостоянные. Тогда для проверки условия (5) удобно использовать, что $\operatorname{Ker} \beta_+ = \{u : u \cdot \beta_+ u = 0\}$.

$$\hat{A}_i=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \delta_{i1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \delta_{im-1} \\ 0 & a_{i1} & \dots & a_{im-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{B}=\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_0 & \dots & \alpha_{m-1} & \alpha_m \end{pmatrix}.$$

Здесь δ_{ij} символы Кронекера ($\delta_{ij}=0$ для $i\neq j$, $\delta_{ii}=1$). Умножим систему (7) слева на матрицу

$$E=b\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & \dots & a_{m-11} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{1m-1} & \dots & a_{m-1m-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $b\in C^1(\overline{D})$ пока произвольная функция. Получаем симметрическую систему

$$\hat{L}\hat{u}=A_i\partial_i\hat{u}+A_m\partial_m\hat{u}+\hat{B}\hat{u}=\hat{h}, \tag{8}$$

$$\text{где } \hat{h}=(0,\dots,0,bf),\quad A_m=-b\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & \dots & a_{m-11} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{1\,m-1} & \dots & a_{m-1\,m-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & K \end{pmatrix},$$

$$A_i=b\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{i1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{im-1} \\ 0 & a_{i1} & \dots & a_{im-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad B=b\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_0 & \dots & \alpha_{m-1} & \alpha_m \end{pmatrix}.$$

Введем матрицу $\varkappa=B-\partial_i A_i/2-\partial_m A_m/2$ и рассмотрим $\varkappa+\varkappa'$

$$=\begin{pmatrix} b_{x_m} & 0 & \dots & 0 & b(\alpha_0+1) \\ 0 & (b\,a_{11})_{x_m} & \dots & (b\,a_{m-1\,1})_{x_m} & b\,\alpha_1-\partial_i(a_{i1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & (b\,a_{1m-1})_{x_m} & \dots & (b\,a_{m-1\,m-1})_{x_m} & b\,\alpha_{m-1}-\partial_i(ba_{im-1}) \\ b(\alpha_0+1) & b\,\alpha_1-\partial_i(b\,a_{i1}) & \dots & b\,\alpha_{m-1}-\partial_i(b\,a_{im-1}) & (K\,b)_{x_m}+2b\,\alpha_m \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $\varkappa_i$, $i=0,\ldots,m$, и a_i, $i=1,\ldots,m-1$, последовательные главные миноры матриц $\varkappa+\varkappa'$ и (a_{ij}). Матрица (a_{ij}) положительно определена в D. Поэтому с некоторой постоянной $a_0>0$ в $\bar{D}$ выполнено $a_i \geqq a_0$, для $i=1,\ldots,m-1$. Если $\varkappa_i>0$ в $\bar{D}$, $i=0,\ldots,m$, то матрица $\varkappa+\varkappa'$ будет положительно определена в $\bar{D}$. Пусть $b(x_1,\ldots,x_m)=\exp(p\,x_m)$, где $p\geqq 1$ произвольная пока постоянная. При этом выборе $\det E=b^{m+1}\,a_{m-1}\geqq a_0>0$ в D. Очевидно, $\varkappa_0=b_{x_m}\geqq 1$ в $\bar{D}$. Для $l=1,\ldots,m-1$ рассмотрим

$$\varkappa_l=b_{x_m}\left[(b_{x_m})^l\,a_l-\sum_{i=1}^{l}b^i\,(b_{x_m})^{l-i}\,\varphi_{li}\right],$$

где $\varphi_{li}(x)\leqq M_l$ для $x\in\bar{D}$. Тогда

$$\varkappa_l\geqq\sum_{i=1}^{l}(b_{x_m})^{l-i}\left[\frac{a_0\,p}{l}-M_l\right]\geqq\frac{a_0}{2},$$

если $p\geqq p_l=2l\,M_l/a_0$. Так как $K'(0)+2\alpha_m(x_1,\ldots,x_{m-1},0)>0$ для всех точек $(x_1,\ldots,x_{m-1},0)\in\bar{D}$, можно найти такие постоянные p_0 и $c_0>0$, что в $\bar{D}$ выполнено

$$(K\,b)_{x_m}+2b\,\alpha_m\geqq c_0\,b+K\,b\,x_m/2,\ \text{если}\ p\geqq p_0.$$

Отсюда легко получается, что $\varkappa_m>0$ в $\bar{D}$ для $p\geqq p_m$. Выбирая $p=\max(1,\,p_0,\ldots,p_m)$, получаем, что в $\bar{D}$ система (8) положительно-симметрическая.

Введем характеристическую матрицу

$$(9)\qquad \beta=n_i\,A_i+n_m\,A_m=-b\begin{pmatrix} n_m & 0 & \ldots & 0 & 0\\ 0 & a_{11}\,n_m & \ldots & a_{m-11}\,n_m & a_{i1}\,n_i\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & a_{1m-1}\,n_m & \ldots & a_{m-1\,m-1}\,n_m & a_{im-1}\,n_i\\ 0 & a_{i1}\,n_i & \ldots & a_{im-1}\,n_i & K\,n_m\end{pmatrix}.$$

Рассмотрим квадратичную форму $\hat{u}.\beta\hat{u}$. При $n_m\neq 0$ ее можно записать в виде

$$\hat{u}.\beta\hat{u}=-\frac{b}{n_m}\left[n_m^2\,u_0^2+a_{ij}\,(n_m\,u_i-n_i\,u_m)\,(n_m\,u_j-n_j\,u_m)+H\,u_m^2\right],$$

где $H=K\,n_m^2-a_{ij}\,n_i\,n_j$. Отсюда видно, какие граничные условия будут допустимыми. Рассмотрим сначала те части ∂D, на которых $H\geqq 0$. Так как матрица (a_{ij}) положительно определена в $\bar{D}$, в представлении (9) выражение в квадратных скобках неотрицательное. Поэтому в случае $n_m>0$ выполнено $\hat{u}.\beta\,\hat{u}\leqq 0$ и можно положить $\beta_-=\beta$, $\beta_+=0$, а в

случае $n_m<0$ $\hat{u}.\beta\hat{u}\geqq 0$ и можно положить $\beta_-=0$, $\beta_+=\beta$. На тех частях ∂D, на которых $H<0$, определим симметрические матрицы β_+ и β_- согласно равенствам

$$\hat{u}.\beta_-\hat{u}=-\frac{bH}{n_m}u_m^2,\ \beta_+=\beta-\beta_-,\ \text{если } n_m<0,$$

$$\hat{u}.\beta_+\hat{u}=-\frac{bH}{n_m}u_m^2,\ \beta_-=\beta-\beta_+,\ \text{если } n_m>0.$$

Формы $\hat{u}.\beta_+\hat{u}$ знакопостоянные. Следовательно, $\operatorname{Ker}\beta_+=\{\hat{u}:\hat{u}.\beta_+\hat{u}=0\}$. Возьмем произвольный вектор $\hat{u}=(u_0,\ldots,u_m)\in R^{m+1}$. Условие (5) выполняется с $\hat{u}_1=\left(0,\frac{n_1}{n_m}u_m,\ldots,\frac{n_{m-1}}{n_m}u_m,u_m\right)$, $\hat{u}_2=\hat{u}-\hat{u}_1$.

Следовательно, граничное условие $\hat{\beta}_-u=0$ на ∂D является допустимым. Оно имеет вид

$$(10)\qquad \begin{array}{ll} u_0=0,\ n_m u_i-n_i u_m+0,\ i=1,\ldots,m-1, & \text{если } n_m>0,\ H\leqq 0,\\ u_0=\ldots\ldots=u_m=0, & \text{если } n_m>0,\ H>0,\\ u_m=0, & \text{если } n_m<0,\ H<0,\\ \hat{u}\sim, & \text{если } n_m<0,\ H\geqq 0. \end{array}$$

Здесь и далее через $\hat{u}\sim$ будем обозначать, что на соответственном участке границы не задаются граничные условия. Из теории положительно-симметрических систем следует, что для всех функций $\hat{u}\in C^1(D)$, удовлетворяющих условиям (10), выполнены неравенства

$$(11)\qquad \hat{u}^2\leqq C(\hat{u},\hat{L},\hat{u}),$$

$$(12)\qquad |\hat{u}|\leqq C\ \hat{L}\hat{u}\ .$$

Рассмотрим соответствующие граничные условия для уравнения (1). Они имеют вид

$$(13)\qquad \begin{array}{ll} u=0, & \text{если } n_m>0,\ H\leqq 0,\\ u=0,\ u_{x_m}=0, & \text{если } n_m>0,\ H>0,\\ u_{x_m}=0, & \text{если } n_m<0,\ H<0,\\ u\sim, & \text{если } n_m<0,\ H\geqq 0. \end{array}$$

Задача А. Найти в области D решение уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям (13).

Обозначим через W^2 и W^2_* замыкание по норму $W^2_2(D)$ множества функций из $C^2(D)$, удовлетворяющих соответственно граничным условиям (13) и сопряженным к ним граничным условиям. Через $(,)_0$ и $\|\ \|_l$ будем обозначать соответственно скалярное произведение в $W^0_2(D)$ и норму в $W^l_2(D)$ ($W^l_2(D)$ — Соболевское пространство скалярных функций). Пусть $f \in W^0_2(D)$.

Функция $u \in W^0_2(D)$ называется слабым решением задачи А, если

$$(u,\ L^*\ v)_0 = (f,\ v)_0,\ \forall v \in W^2_*,$$

где L^* — сопряженный к L дифференциальный оператор.

Функция $u \in W^0_2(D)$ называется сильным решением задачи А, если существует последовательность $\{u_k\} \subset W^2$ и

$$\|u_k - u\|_0 \to 0,\quad \|Lu_k - f\|_0 \to 0 \quad \text{при } k \to \infty.$$

Из неравенств (11) и (12) получаем

$$\|u\|_1^2 \leqq c_1 (b u_{x_m},\ Lu)_0,\quad \forall u \in W^2, \tag{14}$$

$$\|u\|_1 \leqq c_1 \|Lu\|_0,\quad \forall u \in W^2. \tag{15}$$

Из неравенства (15) следует, что сильное решение задачи А единственное и, если существует, аппроксимирующая последовательность сходится к нему в $W^1_2(D)$. Из неравенства (14) в некоторых случаях можно вывести существование слабого решения $u \in W^1_2(D)$ задачи А.

Пусть область D имеет кусочно-гладкую границу $\partial D = \Gamma^+ \cup \Gamma^-$, где $\Gamma^\pm : x_m = \varphi_\pm(x_1, \ldots, x_{m-1})$ и D: $\varphi_- \leqq x_m \leqq \varphi_+$. Пусть функция φ_+ дважды кусочно непрерывно дифференцируемая, исключая точек, где $\varphi_+ = 0$. Предполагаем, что $H \leqq 0$ и $n_m > 0$ на Γ^+ и $H \geqq 0$ и $n_m < 0$ на Γ^-. Условия (13) принимают вид

$$u = 0 \text{ на } \Gamma^+.$$

Пусть область D такая, что в ней имеет место теорема вложения* такого вида:

$$\|\sqrt{K} w\|_{L_2(\partial D)} \leqq C \|w\|_1,\quad \forall w \in C^2(D) \cap W^2_*, \tag{16}$$

где постоянная C не зависит от w. Обозначим через W^1 замыкание множества функций из W^2 по норму $W^1_2(D)$. Через W^{-1} обозначим негативное пространство, сопряженное к W^1. Пусть функция $K''(x_m)$ ограничена в D. Имеет место следующая

Теорема 1. Для каждой функции $f \in W^0_2(D)$ существует слабое решение $u \in W^1$ задачи А. Сильное решение этой задачи единственно.

* Смотри замечание после доказательства теоремы 1.

Доказательство. При сделанных предположениях докажем, что выполнена оценка

(17) $$\|v\|_0 \leqq c_2 \|L^* v\|_{W^{-1}}, \quad \forall v \in W^2_*,$$

где постоянная c_2 не зависит от v. Из этой оценки и из (15) теорема 1 следует стандартным путем.

Для каждой функции $v \in C^2(D) \cap W^2_*$ существует решение $u_v \in W^1$ уравнения $b(x)\partial_m u = v$ в D. Оно имеет вид

$$u_v(x) = \int_{\varphi_1}^{x_m} v(x_1, \ldots, x_{m-1}, t)\, b^{-1}(t)\, dt.$$

Тогда

$$\|L^* v\|_{W^{-1}} = \sup_{u \in W^1} \frac{(L^* v, u)_0}{\|u\|_1} \geqq \frac{(L^* v, u_v)_0}{\|u_v\|_1}$$

и так как $\|u_v\|_1 \geqq \min\limits_{\bar{D}} b^{-1} \|v\|_0$, оценка (17) следовала бы из оценки

(18) $$(L^* v, u_v)_0 \geqq c_3 \|u_v\|_1^2, \quad \forall v \in C^2(\bar{D}) \cap W^2_*,$$

где $c_3 > 0$ и не зависит от v.

Рассмотрим сопряженное граничное условие на $\Gamma^0 = \partial D \cap \{x_m = 0\}$. Оно имеет вид (см. [3], стр. 90—91) $\beta v = 0$, где

$$\beta(x) = \sum_{i=1}^{m-1} \left[\alpha_i(x) - \sum_{j=1}^{m-1} \partial_j a_{ij}(x) \right] n_i(x) + [\alpha_m(x) + K'(x_m)]\, n_m(x).$$

Так как $K' + 2\alpha_m > 0$ при $x_m = 0$ и $K'(0) \geqq 0$, то $\beta = -\alpha_m - K' < 0$ при $x_m = 0$ и поэтому $v = 0$ на Γ^0. Однако совокупность Γ_1^+ тех точек Γ^+, в которых Γ^+ не является дважды гладкой, можно представить как объединение конечного числа поверхностей, размерность каждой из которых меньше или равна $m-2$. Поэтому существует последовательность функций $v_k \in C^2(\bar{D}) \cap W^2_*$, каждая из которых аннулируется в окрестности Γ^0 и Γ_1^+ и $\|v_k - v\|_1 \to 0$ при $k \to \infty$. Легко видно, что функции $u_{v_k} \in C^2(D) \cap W^2$. Используя неравенства (14), получаем

$$(L^* v_k, u_{v_k})_0 = (v_k, L u_{v_k})_0 = (b\, \partial_m u_{v_k}, L u_{v_k}) \geqq \frac{1}{c_1} \|u_{v_k}\|^2.$$

Оценка (18) следует отсюда с постоянной $c_3 = \dfrac{1}{c_1}$, если докажем, что $\|u_{v_k} - u_v\|_1 \to 0$ и $(L^* v_k, u_{v_k})_0 \to (L^* v, u_v)_0$ при $k \to \infty$.

Обозначим через Γ_x^+ и Γ_x^- характеристические части поверхностей Γ^+ и $\Gamma^- \setminus \Gamma^0$. На $\Gamma_x^\mp$ имеем

$$K=a_{ij}\frac{\partial\varphi_\pm}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi_\pm}{\partial x_j}\geqq\mu^2\sum_{i=1}^{m-1}\left(\frac{\partial\varphi_\pm}{\partial x_i}\right)^2,\quad \mu>0,$$

то есть $\left|\frac{\partial\varphi_\pm}{\partial x_i}\right|\leqq\frac{1}{\mu}\sqrt{K}$.

На $\partial D\backslash(\Gamma_x^+\cup\Gamma_x^-)$ сопряженное граничное условие имеет вид $w=0$. Поэтому для $i=1,\ldots,m-1$ из (16) имеем

$$\left\|\frac{\partial\varphi_\pm}{\partial x_i}w\right\|_{L_2(\Gamma^\pm)}\leqq c_4\|w\|_1,\quad\forall w\in C^2(\bar D)\cap W_*^2.$$

Для каждой такой функции w выполнено

$$\|u_w\|_1\leqq c_5\|w\|_1. \tag{19}$$

Действительно, если $R=\max\limits_{x\in D}x_m$, то $\|u_w\|_0\leqq R\|w\|_0$, $\|\partial_m u_w\|_0\leqq\|w\|_0$ и для $i=1,\ldots,m-1$

$$\|\partial_i u_w\|_0^2=\left\|\int_{\varphi_+}^{x_m}\partial_i w\,b^{-1}\,dt-\frac{\partial\varphi_+}{\partial x_i}b^{-1}(\varphi_+)\,w(x_1,\ldots,x_{m-1},\varphi_+)\right\|_0^2$$

$$\leqq R^2\|\partial_i w\|_0^2+R\left\|\frac{\partial\varphi_+}{\partial x_i}w\right\|_{L_2(\Gamma^+)}\leqq R^2\|w\|_1^2+\frac{RC}{\mu^2}\|w\|_1^2.$$

Поэтому $\|u_{v_k}-u_v\|_1\to0$ при $k\to\infty$ и так как

$$(L^*v_k,\ u_{v_k})_0-(L^*v,\ u_v)_0=(L^*v,\ u_{v_k}-u_v)_0+(L^*(v_k-v),\ u_{v_k})_0,$$

осталось доказать, что $(L^*(v_k-v),\ u_{v_k})_0\to0$ при $k\to\infty$. Обозначим $w_k=v_k-v$, $u_k=u_{v_k}$. Тогда имеем

$$(L^*w_k,\ u_k)_0=\int_D[-\partial_j(a_{ij}w_k)\partial_i u_k+\partial_m(Kw_k)\partial_m u_k$$

$$+\alpha_i w_k\partial_i u_k+\alpha_m w_k\partial_m u_k+\alpha_0 w_k u_k]\,dx+\int_{\partial D}[\partial_j(a_{ij}w_k)n_i$$

$$-\partial_m(Kw_k)n_m-\alpha_i w_k n_i-\alpha_m w_k n_m]\,u_k\,ds=I_{1k}+I_{2k}.$$

Из (19) следует, что $|I_{1k}|\leqq c_6\|w_k\|_1\|v_k\|_1\to0$ при $k\to\infty$. Так как $u_k\in W^2$, $w_k\in W_*^2$, то

$$I_{2k}=\int_{\partial D}[a_{ij}n_i\partial_j u_k-Kn_m\partial_m u_k]\,w_k\,ds$$

(см. например [3], стр. 90—93, имея в виду, что здесь $w_k=0$ на Γ^0). Однако на Γ^+ имеем $u_k=0$, и, следовательно, $\partial_j u_k = n_j \dfrac{\partial u_k}{\partial n}$ $(i=1,\dots,m)$. Тогда выражение в квадратных скобках в I_{2k} принимает вид

$$-H\frac{\partial u_k}{\partial n}.$$

На Γ_x^+ имеем $H=0$, а на $\Gamma^+\backslash\Gamma_x^+$ и на $\Gamma^-\backslash\Gamma_x^-$ $w_k=0$. Тогда

$$I_{2k}=\int\limits_{\Gamma_x^-}\Bigg[a_{ij}n_i\int\limits_{\varphi_+}^{x_m} b^{-1}\partial_j v_k\,dt-a_{ij}n_i\frac{\partial\varphi_+}{\partial x_j}b^{-1}(\varphi_+)\,v_k(x_1,\dots,x_{m-1},\varphi_+)$$

$$-Kn_m b^{-1}v_k\Bigg]w_k\,ds=I'_{2k}+I''_{2k}+I'''_{2k}.$$

Однако на Γ_x^- $n_i \leqq \dfrac{\partial\varphi_-}{\partial x_i}$, для $i=1,\dots,m-1$, $n_m\leqq 1$. Поэтому

$$I'''_{2k}\leqq\|\sqrt{K}w_k\|_{L_2(\Gamma_x^-)}\|\sqrt{K}v_k\|_{L_2(\Gamma_x^-)}\leqq c_7\|w_k\|_1\|v_k\|_1,$$

$$I''_{2k}\leqq c_8\sum_{i,j=1}^{m-1}\left\|\frac{\partial\varphi_-}{\partial x_i}w_k\right\|_{L_2(\Gamma_x^-)}\left\|\frac{\partial\varphi_+}{\partial x_j}v_k\right\|_{L_2(\Gamma_x^+)}\leqq c_9\|w_k\|_1\|v_k\|_1,$$

$$I'_{2k}\leqq c_{10}\sum_{i,j=1}^{m-1}\left\|\frac{\partial\varphi_-}{\partial x_i}w_k\right\|_{L_2(\Gamma_x^-)}\left\|\frac{\partial v_k}{\partial x_j}\right\|_0\leqq c_{11}\|w_k\|_1\|v_k\|_1,$$

то есть $I_{2k}\to 0$ при $k\to\infty$. Так что мы доказали (17) для всех функций $v\in C^2(D)\cap W_*^2$. После замыкания получаем, что оценка (17) выполнена. Теорема 1 доказана.

Рассмотрим вывод неравенства (17) для $v\in C^2(\bar D)\cap W_2^*$. Заметим, что предположение об ограниченности $K''(x_m)$ мы использовали только для того, чтобы перебросить производные на u_k в доказательстве сходимости $(L^*v_k,\ u_{v_k})_0\to(L^*v,\ u_v)_0$. Поэтому имеет место такое

Следствие. Пусть выполнены предположения теоремы 1, исключая предположение об ограниченности функции $K''(x_m)$. Тогда для каждой функции $f\in W_2^0(D)$ существует такая функция $u\in W^1$, что равенство $(u,\ L^*v)_0=(f,\ v)_0$ выполнено для всех $v\in C^2(\bar D)\cap W_*^2$, которые аннулируются в окрестности Γ^0.

Замечание. Так как на $\Gamma^+\backslash\Gamma_x^+$ и на $\Gamma^-\backslash\Gamma_x^-$ сопряженное условие имеет вид $w=0$, неравенство (16) должно быть выполнено только на Γ_x^+ и Γ_x^-. Однако пусть $\Gamma_1\subset\Gamma_x^+$ ($\Gamma_1\subset\Gamma_x^-$) и для всех точек $(x_1,\ldots,x_{m-1},0)$ из проекции Γ_1 на $x_m=0$ имеем $w(x_1,\ldots,x_{m-1},\varphi_-(x_1,\ldots,x_{m-1}))=0$ $(w(x_1,\ldots,x_{m-1},\varphi_+)=0)$. Тогда на Γ_1

$$w=\int_{\varphi_-}^{\varphi_+}\partial_m w\,dx_m$$

и, следовательно,

$$\sqrt{K}\,w\,|_{L_2(\Gamma_1)}\leqq c\quad w\quad{}_1,\qquad c=\frac{R}{\mu}\max_D K\sqrt{\mu^2+K}.$$

Поэтому оценка (16) эквивалентна более слабой: неравенство (16) надо быть выполнено только на тех частей ∂D, проекция которых на $x_m=0$ совпадает с пересечением проекций Γ_x^+, и тех частей Γ_x^-, на которых сопряженное условие не имеет вид $w=0$.

Здесь исследуем вопрос о необходимости условий $K'(0)+2\alpha_m(x_1,\ldots x_{m-1},0)>0$. Рассмотрим уравнение (1). Пусть каждый коэффициент, $a_{ij}(i,j=1,\ldots,m-1)$ не зависит от переменной x_i или x_j, $\alpha_i(i=1,\ldots,m-1)$ не зависит от x_i, $\alpha_m=\alpha_m(x_m)$, $\alpha_0\geqq 0$. Пусть ограниченная область D такая, что сопряженные граничные условия задаются только на $D\cap\{x_m=0\}$. Такие области будут например характеристические конoиды с вершиной произвольная точка из $\{x_m>0\}$. Такие будут и все области, которых рассматриваем в § 3. При этих предположениях имеет место

Лемма 1. Пусть функция

$$\psi(x_m)=\int_{x_m}^{1}\frac{K'(t)+\alpha_m(t)}{K(t)}\,dt$$

ограничена сверху для $0<x_m\leqq 1$. Тогда существует такая функция $V_0\in W_2^0(D)$, что задача А для $f=v_0$ не имеет сильное решение.

Доказательство. Для $x_m>0$ рассмотрим функцию

$$v_0(x_m)=\exp(\psi(x_m))\in W_2^0(D).$$

Она является решением уравнения

$$\partial_m(Kv_0)+\alpha_m v_0=0,\quad \text{для } x_m>0. \tag{20}$$

Для $0<\eta<R$ обозначим $D_\eta=D\cap\{x_m\geqq\eta\}$. Для всех $u\in C^2(\bar D)\cap W^2$ имеем

$$\int\limits_{D_\eta} Lu\, v_0\, dx = \int\limits_{D_\eta} (a_{ij} u_{x_i x_j} - K u_{x_m x_m} + \alpha_i u_{x_i} + \alpha_m u_{x_m})\, v_0\, dx$$

$$= \int\limits_{D_\eta} [\partial_m (K v_0) + \alpha_m v_0]\, \partial_m u\, \partial x + \int\limits_{\partial D_\eta} [\Sigma' a_{ij} n_j u_{x_i}$$

$$+ \Sigma'' a_{ij} n_i u_{x_j} - K n_m u_{x_m} + \alpha_i n_i u]\, v_0\, ds,$$

где суммирование в Σ' проводится по тем (i, j), для которых a_{ij} не зависит от x_j, а в Σ'' — по остальным. Функция v_0 удовлетворяет уравнению (20) в D_η. На $\partial D \backslash \{x_m = 0\}$ $u = 0$ и, следовательно,

$$\sum{}' a_{ij} n_j u_{x_i} + \sum{}'' a_{ij} n_i u_{x_j} - K n_m u_{x_m} = -H \frac{\partial u}{\partial n}.$$

Однако на характеристических частях $\partial D_\eta \backslash \{x_m = x\eta\}$ имеем $H = 0$, а на нехарактеристических $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$. Следовательно,

$$\int\limits_{D_\eta} Lu\, v_0\, dx = \int\limits_{D \cap \{x_m = \eta\}} K v_0 u_{x_m}\, ds \to 0 \quad \text{при} \quad \eta \to 0.$$

Отсюда получаем $(Lu, v_0)_0 = 0$ для всех $u \in W^2$, чем лемма 1 доказана.

Рассмотрим некоторые случаи, когда функция $\psi(x_m)$ ограничена сверху.

Случай 1. Пусть $K'(0) + \alpha_m(0) < 0$. Возьмем такие положительные числа ε и δ, что $K'(t) + \alpha_m(t) \leqq -\delta$ для $0 \leqq t \leqq \varepsilon$. Так как $K(0) = 0$, с некоторой постоянной c выполнено $K(t) \leqq ct$ для $0 \leqq t \leqq \varepsilon$. Поэтому для $0 < x_m \leqq \varepsilon$

$$\psi(x_m) \leqq c_1 + \int\limits_{x_m}^{\varepsilon} -\frac{\delta}{ct}\, dt = c_1 + \frac{\delta}{c} \ln \frac{x_m}{\varepsilon},$$

то есть в этом случае функция v_0 удовлетворяет условию Гельдера для $0 \leqq x_m \leqq 1$ и $v_0(0) = 0$.

Следствие. Условие $K'(0) + \alpha_m(0) \geqq 0$ является необходимым для существования сильного решения задачи А для всех $f \in W_2^0(D)$. Тогда если $K'(0) = 0$, то $\alpha_m(0) \geqq 0$ является необходимым условием для этого. В § 3 докажем, что $\alpha_m(0) > 0$ является достаточным условием.

Случай 2. Существует число $\varepsilon > 0$, так что $K'(t) + \alpha_m(t) \leqq 0$ для $0 \leqq t \leqq \varepsilon$. Тогда $\psi(x_m) \leqq \psi(\varepsilon)$ для $0 \leqq x_m \leqq \varepsilon$. Этот случай дает более сильное необходимое условие, которое указывает на поведение функции $K'(t) + \alpha_m(t)$ не только в точке $t = 0$, а и в ее окрестности.

Отметим, однако, что работая таким способом, мы не сможем доказать необходимость условия $K'(0)+\alpha_m(0)>0$. Например для $K'(0)=0$, $\alpha_m(0)=0$, имеем $K'(0)+\alpha_m(0)=0$, однако $\psi(x_n)=\ln\frac{K(1)}{K(x_m)}\to+\infty$ при $x_m\to 0$.

Заметим, что можно идти и другим путем: исследуя систему (8), можно показать, что существующее слабое решение является сильным (см. [8], теорема 3 и замечание к ней) и отсюда вывести существования слабого решения $u\in W^1$ задачи А. Исследуя другие задачи, этот путь мы иллюстрировали в [6].

Из теоремы 1 во многих случаях можно вывести существование сильного решения задачи А. Мы сделаем это только для уравнения (2) в некоторых характерных областях.

§ 3. СУЩЕСТВОВАНИЕ СИЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Здесь и далее исследуем уравнение (2), т. е. $a_{ij}=0$ для $i\neq j$, $a_{ii}=1$. Пусть функция $K(x_m)$ кроме сделанных в введении предположений, удовлетворяет и следующим: $(K(x_m))^{-\frac{1}{2}}\in L(0,1)$. Оно показывает, что характеристический коноид

$$\left(\sum_{i=1}^{m-1}(x_i-x_i^0)^2\right)^{\frac{1}{2}}=\int_{x_m}^{x_m^0}(K(t))^{-\frac{1}{2}}dt,$$

с вершиной в произвольной точки $x^0\in\{x_m>0\}$, пересекает плоскость $\{x_m=0\}$ в ограниченную кривую. Если $K^{-\frac{1}{2}}\in L(0,1)$, он не пересекает плоскость.

Рассмотрим некоторые примеры для функций K.

Пример 1. Функции $k(x_m)$, для которых $K'(0)>0$, так как тогда $k(x_m)\geqq k_0x_m$, для $0\leqq x_m\leqq 1$ ($k_0=\text{const}>0$).

Пример 2. Функции $K(x_m)=(x_m)^\gamma$, $1\leqq\gamma<2$.

Для $x_m\geqq 0$ определим функцию

$$\psi(x_m)=\int_0^{x_m}(K(t))^{-\frac{1}{2}}dt.$$

Пример 3. Пусть $K(x_m)\in C^2(0,\infty)$, $K(x_m)>0$ для $x_m>0$ и $K(x_m)=x_m^2\ln^4x_m$ для $0<x_m\leqq\frac{1}{2}$, $K(0)=0$. Для $0<x_m\leqq\frac{1}{2}$ соответствующая функция ψ будет: $\psi(x_m)=-(\ln x_m)^{-1}$.

Для простоты обозначений будем рассматривать случай $m=3$. Определим $R(K)=\lim\limits_{x_3\to\infty}\psi(x_3)$. Понятно, что для некоторых функций K будет $R(K)=\infty$, а для других — $R(K)<$ — например для $K(x_3)=x_3\exp(x_3)$. Рассмотрим числа $0\leqq\varepsilon<R<2R(K)$ и поверхности $S_{0\varepsilon}: x_3=0,\quad \varepsilon\leqq\sqrt{x_1^2+x_2^2}\leqq R;\quad S_{1\varepsilon}:\sqrt{x_1^2+x_2^2}=\varepsilon+\psi(x_3),\quad 0\leqq x_3\leqq d$ и $S_{2\varepsilon}:\sqrt{x_1^2+x_2^2}=R-\psi(x_3),\ 0\leqq x_3\leqq d$. Здесь d является решением уравнения $\psi(d)=(R-\varepsilon)/2$, существование которого вытекает из неравен-

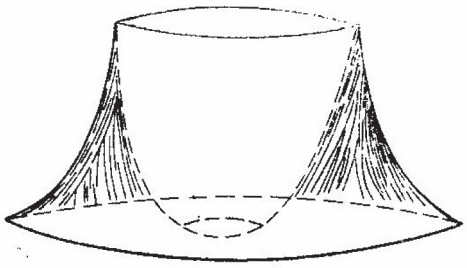

Рис. 1

ства $R<2R(K)$. Обозначим через D_ε ограниченную область, для которой $\partial D_\varepsilon=S_{0\varepsilon}\cup S_{1\varepsilon}\cup S_{2\varepsilon}$ (см. рис. 1 — для $\varepsilon>0$). Так как $\psi'(x_3)=(K(x_3))^{-\frac{1}{2}}$, функция ψ имеет обратная $\varphi\in C^1[0,\ )$, для которой $\varphi'(0)=0$. Тогда например $S_{2\varepsilon}: x_3=\varphi(R-\sqrt{x_1^2+x_2^2})$. То есть граница ∂D_ε является кусочно-гладкой и характеристики уравнения (2) $S_{1\varepsilon}$ и $S_{2\varepsilon}$ касаются плоскости $\{x_3=0\}$. Поэтому обычные теоремы вложения Соболева не всегда имеют место. Рассмотрим например те функции $K(x_3)$, для которых $K(x_3)\leqq C(x_3)^\gamma$, $1<\gamma<2$. Пусть функция $v(x_1, x_2, x_3)=S(\rho)\in C^\infty(0, R)\ (\rho=\sqrt{x_1^2+x_2^2})$ аннулируется тождественно в некоторой окрестности $\rho=0$ и имеет вид $v=(R-\rho)^{-\frac{1}{2}}$ в окрестности $\rho=R$. Тогда $v\notin W_2^0(S_{0\varepsilon})$. Однако $v\in W_1^2(D_\varepsilon)$, точнее $v\in W_2^l(D_\varepsilon)$, для $l=1,\ldots,[(2-\gamma)^{-1}]$. Пусть $K(x_3)$ — рассмотренная в примере 3 функция. В этом случае на $S_{2\varepsilon}\cap\left\{0<x_3\leqq\frac{1}{2}\right\}$, $\rho=R+(\ln x_3)^{-1}$, т. е. $x_3=\exp(\rho-R)^{-1}$, имеем касание бесконечного порядка. Функция $v\in W_2^l(D_\varepsilon)$ для всех $l=1, 2, \ldots$.

На ∂D_ε выполнено $H=0$, на $S_{0\varepsilon}$ $n_3<0$, на $S_{1\varepsilon}$ и $S_{2\varepsilon}$ $n_3>0$. Поэтому граничные условия (13) здесь выглядят так:

$$u=0 \text{ на } S_{1\varepsilon}\cup S_{2\varepsilon}. \tag{21}$$

Сопряженные граничные условия на $S_{1\varepsilon}\cup S_{2\varepsilon}$ не задаются. Рассмотрим следующий частный случай задачи А.

Задача A_1. Найти в области D_ε^1 решение уравнения

$$(22)\qquad Lu = u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2}-K(x_3)\,u_{x_3x_3}+\sum_{i=1}^{3}\alpha_i(x)\,u_{x_i}+\alpha_0(x)\,u=f(x),$$

которое удовлетворяет граничному условию (21).

Пусть $f\in W_2^0(D_\varepsilon)$. Заметив, что в этом случае оценка (16) выполнена (здесь $\Gamma_x^-=\varnothing$), можно применить следствие из теоремы 1*. Следовательно, существует такая функция $u_\varepsilon\in W_2^1(D_\varepsilon)$, что для всех функций $v\in C^2(\bar D_\varepsilon)$, которые аннулируются в окрестности поверхности $S_{0\varepsilon}$, выполнено $(u_\varepsilon,\ L^*v)_0=(f,\ v)_0$. Определим функцию $\bar u_\varepsilon$ так: $\bar u_\varepsilon=u_\varepsilon$ в D_ε, $\bar u_\varepsilon=0$ в $\{x_3\geqq 0\}\setminus D_\varepsilon$. Тогда $\bar u_\varepsilon\in W_2^1(x_3\geqq 0)$, так как $u_\varepsilon\in W^1$. Пусть $\varepsilon>0$. Докажем, что u_ε является сильным решением задачи A_1. Будем использовать теоремы, которые соответствуют некоторым теоремам из теории систем первого порядка (см. в работе [8] теорема 3 и замечание к ней). Наметим только некоторые детали доказательства. Более подробное рассмотрение аналогичных вопросов см. в [7].

Прежде всего, используя конечное C^∞-разбиение единицы $\Sigma\varphi_i=1$ в D_ε, локализируем задачу. Из текста ниже видно, какое разбиение надо взять. Общее условие для носителей φ_i $\operatorname{supp}\varphi_i$ будет: $\operatorname{supp}\varphi_i\subset\{p_i<\theta<q_i\}$, где θ — полярный угол, а $0<q_i-p_i<2\pi$ (это возможно, так как $\rho>0$ в $\bar D_\varepsilon$). Для функций $u_i=\varphi_i u_\varepsilon\in W_2^1(D_\varepsilon)$ с $f_i\in W_2^0(D_\varepsilon)$ выполнено

$$(23)\qquad (u_i,\ L^*v)_0=(f_i,\ v)_0$$

для всех $v\in C^2(\bar D_\varepsilon)$, которые обращаются в нуль в окрестности $S_{0\varepsilon}$. При том достаточно доказать, что каждая из функций u_i является сильным решением задачи A_1 с $f=f_1$.

Пусть носитель u_1 пересекает $S_{0\varepsilon}$ и не имеет общих точек с $S_{1\varepsilon}\cup S_{2\varepsilon}$. Так как на $S_{0\varepsilon}$ нет граничных условий, рассмотрим в D_ε интегральный оператор

$$R_\delta u_1(x)=\int\limits_{D_\varepsilon}\delta^{-3}j\left(\frac{x_3-\bar x_3}{\delta}+2\right)j\left(\frac{x_1-\bar x_1}{\delta}\right)j\left(\frac{x_2-\bar x_2}{\delta}\right)u_1(\bar x)\,d\bar x,$$

где $x=(x_1,\ x_2,\ x_3)$, $\bar x=(\bar x_1,\ \bar x_2,\ \bar x_3)$, а j — обычная сглаживающая функция, $j=0$ вне $[-1,\ 1]$. Обозначая через R_δ^* сопряженный к R_δ интегральный оператор, имеем: для всех $w\in C^2(\bar D_\varepsilon)$ $R_\delta^*w(x)=0$, если $x_3\leqq\delta$. Поэтому каждую такую функцию можно подставить в равенство (23) и получаем

* Напомним, что в этом параграфе функция $K''(x_3)$ может обращаться в бесконечность при $x_3=0$, так что теорему 1 применить нельзя.

$$(L^* R_\delta^*)^* u_1 = R_\delta f_1,$$

где $(L^* R_\delta^*)^*$ — сопряженный к $L^* R_\delta^*$ интегральный оператор. Так как в $W_2^0(D_\varepsilon)$ $R_\delta u_1 \to u_1$ и $R_\delta f_1 \to f_1$ при $\delta \to 0$, достаточно доказать, что выражение

$$(L^* R_\delta^*)^* u_1 - L R_\delta u_1 \tag{24}$$

сходится к нулю в $W_2^0(D_\varepsilon)$ при $\delta \to 0$. Для $\delta < r(\operatorname{supp} u_1, S_{1\varepsilon} \cup S_{2\varepsilon})$ ядро оператора R_δ аннулируется в окрестности границы ∂D_ε. Поэтому в выражении (24) можно перебросить одну производную на $u_1 \in W_2^1(D_\varepsilon)$ без появления граничного члена. Заметим, что в полученном выражении уже нет функции K'. Доказательство заканчивается применением леммы Фридрихса о сходимости полученных дифференциальных выражений первого порядка.

Пусть носитель функции u_2 пересекает $S_{1\varepsilon}$ и не имеет общих точек с $S_{0\varepsilon} \cup S_{2\varepsilon}$. Переходя к цилиндрическим координатам $y = \{\rho, \theta, x_3\}$, имеем: $\operatorname{supp} u_2 \subset \{y : \rho \geqq \varepsilon + \psi(x_3) = F(x_3),\ p_2 < \theta < q_2,\ 0 < x_3 < d\}$. Рассмотрим область $D' = \{y : \rho > 0,\ p_2 < \theta < q_2,\ 0 < x_3 < d\}$. Определим функцию $\bar{u}_2(y)$ как $u_2(y)$ для $y \in \operatorname{supp} u_2$ и 0 — для $y \in D' \setminus \operatorname{supp} u_2$. По доказанному выше $\bar{u}_2 \in W_2^1(D')$. Функция $F(x_3)$ для $(x_1, x_2, x_3) \in \operatorname{supp} u_2$ удовлетворяет условию Липшица с некоторой постоянной E. Заметив, что на $\rho = F(x_3)$ нет сопряженных граничных условий, рассмотрим в D' функции

$$R_\delta' \bar{u}_2(y) = \int_{D'} \delta^{-3} j\left(\frac{\rho - \bar{\rho}}{\delta} - E - 2\right) j\left(\frac{\theta - \bar{\theta}}{\delta}\right) j\left(\frac{x_3 - \bar{x}_3}{\delta}\right) \bar{u}_2(y)\, dy.$$

Очевидно, $R_\delta' \bar{u}_2(y) = 0$ для $\rho \leqq F(x_3) + \delta$, то есть граничное условие удовлетворяется. После продолжения задачи в области D' доказательство заканчивается как и выше, но уже в D'. Аппроксимирующая последовательность получается из рестрикций функций $R_\delta' \bar{u}_2$ для некоторых чисел $\delta_n \to +0$. Аналогично рассматривается случай, когда носитель пересекает лишь $S_{2\varepsilon}$.

Если носитель функции u_3 пересекает $S_{1\varepsilon} \cup S_{2\varepsilon}$ и содержится в области $x_3 > 0$, то $\operatorname{supp} u_3 \subset \{x_3 \geqq F_1(\rho, \theta)\}$ и $\operatorname{supp} u_3 \cap \partial D_\varepsilon \subset \{x_3 = F_1(\rho, \theta)\}$, где функция F_1 удовлетворяет условию Липшица. На $x_3 = F_1(\rho, \theta)$ нет сопряженных граничных условий. Этот случай становится аналогичным случаю для функции u_2.

Пусть носитель функции u_4 пересекает $S_{0\varepsilon} \cup S_{1\varepsilon}$ и не имеет общих точек с $S_{2\varepsilon}$. Тогда $\operatorname{supp} u_4 \subset \{0 \leqq x_3 < d,\ \rho \geqq \varepsilon + \psi(x_3) = F(x_3)\}$, на $x_3 = 0$ нет граничных, а на $\rho = F(x_3)$ — сопряженных граничных условий. Функцию u_4 можно продолжить нулем для $\rho < F(x_3)$ и в области $D'' = \{0 < x_3 < d\}$ продолжение $\bar{u}_4 \in W_2^1$. Рассмотрим в D'' функции

$$R'''_{\delta\eta} u_4(y) = \int\limits_{D''} \delta^{-1} \eta^{-2} j\left(\frac{x_3 - \bar{x}_3}{\delta} + 2\right) j\left(\frac{\rho - \bar{\rho}}{\eta} - 3\right) j\left(\frac{\theta - \bar{\theta}}{\eta}\right) \bar{u}_4(\bar{y})\, d\bar{y},$$

где $y = (\rho, \theta, x_3)$, $\bar{y} = (\rho, \bar{\theta}, \bar{x}_3)$, $\delta > 0$, $\eta > 0$. Если для $0 < \delta \leqq d + 1$ определим $\omega(\delta) = \max\limits_{\substack{|x_3 - y_3| \leqq \delta \\ 0 \leqq x_3,\, y_3 \leqq d+1}} |\psi(x_3) - \psi(y_3)|$, имеем $|F(x_3) - F(y_3)| \leqq \omega(|x_3 - y_3|)$.

Функция ω монотонно возрастающая и $\omega(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$. Тогда можно легко доказать, что $R'''_{\delta\eta} \bar{u}_4(y) = 0$ для $\rho \leqq F(x_3) + \eta$, если $\omega(3\delta) \leqq \eta$. Выбираем только такие двойки чисел $(\delta_k, \eta_k) \to (0, 0)$, для которых $\delta_k \leqq \eta_k$ и $\omega(3\delta_k) \leqq \eta_k$ (это возможно, так как $\omega(3\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$). Тогда функции $R'''_{\delta_k \eta_k} \bar{u}_4$ удовлетворяют граничному условию. Кроме этого, для всех $w \in C^2(\bar{D}'')$ имеем $R'''^{*}_{\delta_k \eta_k} \omega(y) = 0$, если $x_3 \leqq \delta_k$ и поэтому

$$(L^* R'''^{*}_{\delta_k \eta_k})^* \bar{u}_4 = R'''_{\delta_k \eta_k} f_4 .$$

Заметим, что функция $K(x_3)\left(\text{коэффициент перед } \dfrac{\partial^2 u_4}{\partial x_3^2}\right)$ зависит лишь от x_3. Поэтому сходимость дифференциального выражения

$$(L^* R'''^{*}_{\delta\eta})^* \bar{u}_4 - L R'''_{\delta\eta} \bar{u}_4$$

к нулю в $W_2^0(D'')$ при подходящем выборе $\delta = \delta_k$ и $\eta = \eta_k$ следует из того, что можно перебросить одну производную на $\bar{u}_4$.

Таким образом u_ε является сильным решением задачи A_1 и каждая функция из аппроксимирующей последовательности обращается в нуль в окрестности $S_{1\varepsilon} \cup S_{2\varepsilon}$.

Рассмотрим случай $\varepsilon = 0$. Пусть $f \in W_2^0(D_0)$. Следовательно, $f \in W_2^0(D_\varepsilon)$ для каждого $0 < \varepsilon < R$ и из доказанного следует: существуют функции $u_\varepsilon^k \in C^2(\bar{D}_\varepsilon)$, $k = 1, 2, \ldots$, каждая из которых обращается в нуль в окрестности $S_{1\varepsilon} \cup S_{2\varepsilon}$ и $\|Lu_\varepsilon^k - f\|_{0\varepsilon} \to 0$ при $k \to \infty$. Через $\|\ \|_{0\varepsilon}$ обозначаем норму в $W_2^0(D_\varepsilon)$. Продолжая функции u_ε^k нулем в $\bar{D}_0 \backslash \bar{D}_\varepsilon$, получаем функции $v_\varepsilon^k \in C^2(\bar{D}_0)$, $v_\varepsilon^k = 0$ на $S_{10} \cup S_{20}$. Пусть числа $\varepsilon_n \to +0$ такие, что $\|f\|_{W_2^0(D_0/D_{\varepsilon_n})} \leqq \dfrac{1}{n}$. Тогда имеем

$$\|L v_{\varepsilon_n}^k - f\|_{00}^2 = \|L v_{\varepsilon_n}^k - f\|_{0\varepsilon_n}^2 + \|f\|_{W_2^0(D_0/D_{\varepsilon_n})} \leqq \frac{2}{n^2}$$

для $k \geqq k_n$. Рассмотрим последовательность $\{v_{\varepsilon_n}^{k_n}\} \subset C^2(\bar{D}_0)$. Из неравенства (15) следует, что она сходится в $W_2^1(D_0)$, то есть сущест-

вует сильное решение задачи A_1 и для области D_0. Таким образом, доказана

Теорема 2. Пусть $0 \leqq \varepsilon < R$. Тогда для каждой функции $f \in W_2^0(D_\varepsilon)$ существует одно и только одно сильное решение $u_\varepsilon \in W_2^1(D_\varepsilon)$ задачи A_1. Для всех функций $u \in C^2(D_\varepsilon)$, удовлетворяющих условию (21), выполнено неравенство

$$u_{W_2^1(D_\varepsilon)} \leqq C \; Lu_{W_2^0(D_\varepsilon)}.$$

Замечание 1. Очевидно, что на самом деле функции из аппроксимирующей сильного решения последовательности можно взять из $C^\infty(\bar{D}_\varepsilon)$.

Замечание 2 Для области D_0 нам неизвестна теорема, утверждающая, что каждое слабое решение из W^1 задачи A_1 является сильным. Поэтому для исследования вопроса о существовании сильного решения задачи A_1 при $\varepsilon = 0$ мы включили область D_0 в системе областей D_ε с $0 \leqq \varepsilon < R$. Нам неизвестно, является ли слабое решение задачи A_1 единственным.

Можно обобщить задачу A_1 в случае, когда вершина коноида S_{10} находится не обязательно в начале координат. Пусть $0 < R < R(K)$ и $\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} < R$. Для $0 \leqq \varepsilon < R - \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$ рассмотрим ограниченную область G_ε, чья граница состоит из частей поверхностей

$$\Gamma_0 : x_3 = 0, \; \Gamma_{1\varepsilon} : \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2} = \varepsilon + \psi(x_3)$$

и $\Gamma_2 : \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = R - \psi(x_3)$. Таким же способом, каким выше исследовали задачу A_1, можно исследовать и такое ее обобщение:

Задача A_1': Найти решение уравнения (22) в G_ε, которое удовлетворяет граничному условию

$$u = 0 \text{ на } (\Gamma_{1\varepsilon} \cup \Gamma_2) \cap \partial G_\varepsilon.$$

Имеет место следующая

Теорема 2'. Для каждой функции $f \in W_2^0(G_\varepsilon)$ существует одно и только одно сильное решение $u \in W_2^1(G_\varepsilon)$ задачи A_1'.

Таким же способом можно исследовать и другую задачу. Пусть $0 < R < R(K)$. Рассмотрим характеристический конус

$$\Omega = \{x : \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < R - \psi(x_3)\}.$$

Задача A_2. Найти решение уравнения (22) в Ω, которое удовлетворяет граничному условию

$$u = 0 \text{ на } \partial\Omega \setminus \{x_3 = 0\}.$$

Эта задача тоже имеет одно и только одно сильное решение для каждой $f \in W_2^0(\Omega)$.

Замечание. Такой же результат можно получить и в случае, когда поверхности $S_{1\varepsilon}$ и $S_{2\varepsilon}$ из задачи A_1 заменены некоторыми гладкими поверхностями, на которых $H \leqq 0$, $n_3 > 0$. На их частях, у которых нехарактеристическое направление, задаются данные Коши и не задаются сопряженных граничных условий. Эту задачу можно исследовать аналогичным образом.

Во всех описанных выше задачах поверхность $x_3 = 0$ можно заменить произвольной кусочно-гладкой поверхностью, на которой $H \geqq 0$, $n_3 < 0$. В полученной области соответственная задача тоже имеет сильное решение и оно единственное.

Таким образом в § 3 мы доказали существование и единственность сильного решения некоторых характерных задач для уравнения (2). Очевидно, что такие же результаты переносятся и для всех уравнений более общего вида (1), которые получаются из (2) посредством неособой дважды гладкой в рассматриваемых областях трансформации независимых переменных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Врагов, В.: О задачах Гурса и Дарбу для одного класса гиперболических уравнений. Дифференц. уравн., 8 (1972), № 1, 7—16.
2. Каратопраклиев, Г.: К теории уравнений смешанного типа и вырождающихся гиперболических уравнений. Докт. дисс. (библиотека Матем. ин-та АН СССР, 1973).
3. Березанский, Ю.: Разложение по собственным функциям. Киев, 1965.
4. Friedrichs, K.: Symmetric positive linear differential equations. Comm. Pure Appl. Math., 11 (1958), № 3, 333—418.
5. Хермандер, Л.: Линейные дифференциальные операторы с частными производными. Москва, 1965.
6. Попиванов, Н.: О краевых задачах для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений. Дифференц. уравн., 11 (1975), № 1, 116—126.
7. Попиванов, Н.: Совпадение слабого и сильного решения краевых задач для линейных систем первого порядка. Сердика, Бълг. матем. известия, 1 (1975), № 2, 121—132.
8. Попиванов, Н.: О совпадении слабого и сильного решения краевых задач для линейных систем первого порядка. Доклады БАН, 26 (1973), № 9, 1147—1150.

Поступила 24. XI. 1973 г.

ON A CERTAIN CLASS OF DEGENERATE MULTIDIMENSIONAL HYPERBOLIC EQUATIONS

N. I. Popivanov

(SUMMARY)

General boundary value problems in a bounded domain of the half-space $x_m \geqq 0$ $(m \geqq 3)$ are considered for the equations

$$\sum_{i,j=1}^{m-1} a_{ij}(x)\, u_{x_i x_j} - K(x_m)\, u_{x_m x_m} + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(x)\, u_{x_i} + \alpha_0(x)\, u = f(x),$$

where $K(x_m) \in C^1[0, \infty) \cap C^2(0, \infty)$, $K(x_m) > 0$ for $x_m > 0$, $K(0) = 0$. The matrix (a_{ij}) is symmetric and positive. The uniqueness of a strong solution and the existence of a weak solution $u \in W_2^1$ for any $f \in W_2^0$ is proved. In the case $a_{ij} = 0$ for $i \neq j$, $a_{ii} = 1$ in some domains we prove existence and uniqueness of a strong solution $u \in W_2^1$ for any $f \in W_2^0$.