О СИСТЕМАХ ОБСЛУЖИВАНИЯ С КОНЕЧНЫМ ИСТОЧНИКОМ И НЕНАДЕЖНЫМ ПРИБОРОМ

Боян Димитров и Христо Карапенев

§ 1. Введение. При исследовании систем массового обслуживания (СМО) обычно приходится отказаться от многих свойств реальных систем, в целях упрощения моделей и желания получить какие-то аналитические результаты. Поэтому большинство работ рассматривает несколько идеализированные модели [2, 4, 5], ограничивающие область применения полученных результатов. В последнее время возникает вопрос об уточнениях моделей и о приближении их структур к действительным системам. Так возникла необходимость рассмотрения систем обслуживания с ненадежным прибором (с прибором, выходящим из строя в свободном или в занятом состоянии). В этом отношении показано [5, гл. V; 6, § II], что достаточно изучить СМО, у которых прибор выходит из строя только в свободном состоянии, так как все другие постановки сводятся к этой после простой модификации распределения времени обслуживания. В [1] изучена СМО типа $M/G/1$ с ожиданием и двумя типами отказов прибора в свободном состоянии. Настоящая статья посвящена подобному же вопросу в случае, когда источник заявок конечен [2, гл. II; 5, гл. VI].

В работе найдены наиболее важные характеристики СМО с конечным источником, с экспоненциальным распределением времени пребывания заявок в источнике и с общим распределением времени единичного обслуживания и с прибором, выходящим из строя по двум причинам, с разными последующими временами восстановления прибора. Изучен период занятости прибора, длина очереди, число обслуженных заявок на конечном интервале времени, время ожидания начала обслуживания. Полученные результаты с успехом можно применять в СМО подобного типа с несколькими конечными источниками и приоритетами между заявками отдельных источников при их становлении в очереди. Используется подход, основанный на методе введения дополнительного события [4, 5], причем не требуется существования плотностей у распределений времен обслуживания, как в [2].

§ 2. Описание системы и обозначения. Рассмотрим СМО, состоящую из одного обслуживающего прибора и из источника с конечным числом n заявок. Считаем, что когда заявка потребует обслуживания, она покидает источник и становится в очередь у обслуживающего прибора. После окончания своего обслуживания заявка сразу же

возвращается в источник. Предполагаем, что времена пребывания всех заявок в источнике суть независимые случайные величины (сл. в.), распределенные по экспоненциальному закону с параметром $\lambda>0$. Это означает, что если у прибора имеется k заявок (в очереди плюс обслуживаемая), то интенсивность входящего потока равна $\lambda(n-k)$. Прибор обслуживает заявок по одной в порядке их поступления, причем каждое время обслуживания случайно, не зависит от других параметров системы и имеет функцию распределения (ф. р.) $B(x)$ самого общего вида. Во время обслуживания прибор абсолютно надежен, однако в свободном состоянии он подвержен поломкам двух типов: если у прибора не будет заявки непрерывно в течении времени t и за это время не произойдет поломка второго (либо первого) типа, то с вероятностью $F_1(t)$ (либо с вероятностью $F_2(t)=1-e^{-ct}$, $c>0$) прибор выйдет из строя из-за поломки первого (либо второго) типа. После выхода из строя типа k прибору необходимо случайное время для восстановления типа k, имеющее ф. р. $G_k(t)$, $k=1$, 2. Отдельные времена восстановления, как и все прочие сл. в. независимы между собою. Заявки, заставшие прибор свободным от обслуживания и исправным, сразу же начинают обслуживаться; в противном случае они ждут конца восстановления прибора и будут обслуживаться после всех прочих заявок, стоящих перед ними в очереди.

Укрупненные состояния системы и переходы между ними можно представить с помощью ориентиранного графа на рис. 1. Через S_0

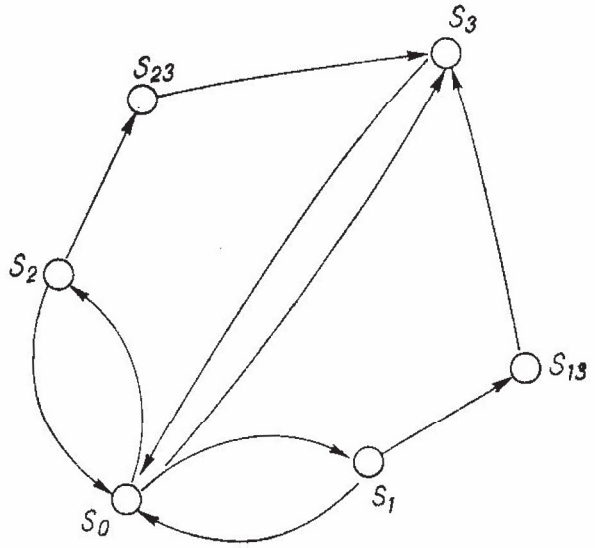

Рис. 1

мы обозначили состояние „прибор свободен от обслуживания и исправен“; через S_1 (S_2) — состояние „прибор восстанавливается после поломки первого (второго) типа и ожидающих заявок нет“; через S_{18} (S_{23}) — состояние „прибор восстанавливается после поломки первого (второго) типа и какие-то заявки ждут у прибора“; через S_3 — со-

стояние „прибор обслуживает некоторую заявку". Стрелки графа указывают на возможные переходы системы из одного состояния в другое. Функции $F_1(t)$ ($F_2(t)$) представляют собой безусловное распределение времени простоя в состоянии S_0 при переходе системы в состояние $S_1(S_2)$. Соответственно $G_k(t)$ суть ф. р- времен пребывании системы в множестве состояний $\{S_k, S_{k3}\}$, $k=1, 2$.

В работе находятся распределения нестационарных характеристик описанной системе обслуживания, причем эти распределения обычно задаются своими преобразованиями Лапласа-Стилтьеса (Л. С. преобразования) либо со своими обычными преобразованиями Лапласа. Если $A(x)$, $B(x)$, $F(x)$, . . . некоторые ф. р., то их Л. С. преобразования будем обозначать соответствующими малыми латинскими или греческими буквами, а обычные преобразования Лапласа — теми же буквами со звездочкой кверху. Например

$$\varphi(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\,dF(x); \quad \beta^*(s)=\int_0^\infty e^{-sx}B(x)\,dx.$$

§ 3. Период занятости прибора и период регенерации процесса. А. Периодом занятости прибора назовем любой из интервалов времени π, начинающийся с момента выхода системы из состояния S_0 и кончающий с первым после этого моментом, когда система вернется обратно в состояние S_0. Ф. р. π обозначим через $\Pi(x)$, а ее Л. С. преобразование — через $\pi(s)$. Ясно, что период занятости может начаться с поступления некоторой заявки в момент, когда прибор исправен и свободен от вызовов (переход из S_0 в S_3, рис. 1), либо начаться с поломки прибора первого или второго типа (переход из S_0 в S_1 или из S_0 в S_2). Обозначим продолжительности периода занятости в этих трех случаях соответственно через π_1, b_1 и b_2; пусть $\Pi_1(x)$, $B_1(x)$ и $B_2(x)$ будут их соответствующие ф. р., определенные однозначно своими Л. С. преобразованиями $\pi_1(s)$, $b_1(s)$ и $b_2(s)$.

Теорема 3. 1: а. Распределение $\Pi(x)$ периода занятости определяется однозначно своим Л. С. преобразованием $\pi(s)$, которое задается равенством

$$\pi(s)=p_0\pi_1(s)+p_1b_1(s)+p_2b_2(s), \tag{3.1}$$

где числа p_0, p_1, p_2 и функции $\pi_1(s)$, $b_1(s)$, $b_2(s)$ определены выражениями

$$\begin{cases} P_0=\dfrac{n\lambda}{c+n\lambda}[1-\varphi_1(c+n\lambda)], \\ P_1=\varphi_1(c+n\lambda), \\ P_2=\dfrac{c}{c+n\lambda}[1-\varphi_1(c+n\lambda)]; \end{cases} \tag{3.2}$$

$$\pi_1(s)=\left[\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}V_{l-1}(s)\right]^{-1}\sum_{l=0}^{n-1}\binom{n-1}{l}V_{l-1}(s); \tag{3.3}$$

$$b_k(s)=\left[\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}V_{l-1}(s)\right]^{-1}\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}V_{l-1}(s)\,g_k(l\lambda+s), \tag{3.4}$$

$$k=1,\ 2.$$

Здесь положено

$$V_{l-1}(s)=\begin{cases}\prod\limits_{j=0}^{l-1}\dfrac{1-\beta(j\lambda+s)}{\beta(j\lambda+s)} & \text{при } l>0,\\ 1 & \text{при } l=0.\end{cases} \tag{3.5}$$

б. Если $\beta_1=\int\limits_0^\infty x\,dB(x)<\infty$ и $\gamma_{k1}=\int\limits_0^\infty x\,dG_k(x)<\infty$, то ожидаемая продолжительность периода занятости вычисляется по формуле

$$E\pi=P_0\beta_1\left[1+\sum_{l=1}^{n-1}\binom{n-1}{l}\prod_{j=1}^{l}\frac{1-\beta(j\lambda)}{\beta(j\lambda)}\right] \tag{3.6}$$

$$+\sum_{k=1}^{2}P_k\left\{\gamma_{k1}+\beta_1\left[n(1-g_k(\lambda))\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{l=2}^{n}\binom{n}{l}\prod_{j=1}^{l-1}\frac{[1-g_k(l\lambda)][1-\beta(j\lambda)]}{\beta(j\lambda)}\right]\right\},\quad n>1.$$

Доказательство. Используя вероятностный смысл Л. С. преобразований от ф. р. [4, 5], сразу выводим равенство (3.1) по формуле полной вероятности. Через P_0, P_1, P_2 обозначены вероятности перехода системы соответственно из состояния S_0 в состояния S_3, S_1 и S_2, т. е.

$$P_0=P\{S_0\to S_3\}=\int\limits_0^\infty[1-F_1(x)]\,e^{-cx}\,d(1-e^{-n\lambda x})$$

$$=\frac{n\lambda}{c+n\lambda}[1-\varphi_1(c+n\lambda)],$$

$$P_1 = P\{S_0 \to S_1\} = \int_0^\infty e^{-cx} e^{-n\lambda x} d F_1(x) = \varphi_1(c + n\lambda),$$

$$P_2 = P\{S_0 \to S_2\} = \int_0^\infty [1 - F_1(x)] e^{-n\lambda x} d(1 - e^{-cx})$$

$$= \frac{c}{c + n\lambda} [1 - \varphi_1(c + n\lambda)].$$

Если предположить, что независимо от состояний системы где-то происходит Пуассоновский поток „катастроф" с параметром $s > 0$, то функция $\pi(s)$ в левой стороне (3.1) будет иметь смысл вероятности события A: с момента выхода из состояния S_0 до следующего момента возвращения опять в S_0 „катастрофы" не будет (т. е. $P(A) = \pi(s)$). Функция $\pi_1(s)$ будет вероятностью события A_1: во время простоя в состоянии S_3 „катастрофа" не произойдет (т. е. $P(A_1) = \pi_1(s)$); функции $b_k(s)$ дают соответственно вероятности событий B_k: с момента попадания в состояние S_k до первого следующего момента попадания в S_0 „катастрофа" произойдет (т. е. $P(B_k) = b_k(s)$, $k = 1, 2$). Поскольку

$$P(A) = P\{S_0 \to S_3\} P(A_1) + P\{S_0 \to S_1\} P(B_1) + P\{S_0 \to S_2\} P(B_2),$$

то это равенство, ввиду указанных значений вероятностей, совпадает с равенством (3.1).

В [2, 3] получено Л. С. преобразование $\pi_i(s)$ ($i = 1, \ldots, n$; $\pi_0(s) = 1$) от ф. р. периода занятости прибора π_i, начавшегося с обслуживанием одной заявки и при наличии еще ровно $i - 1$ ожидающих заявок в очереди (или при $n - i$ заявок в источнике). Функция $\pi_i(s)$ имеет вид

$$\pi_i(s) = \left[\sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} V_{l-1}(s) \right]^{-1} \sum_{l=0}^{n-i} \binom{n-i}{l} V_{l-1}(s), \tag{3.7}$$

где $V_{l-1}(s)$ определены по формуле (3.5). При $i = 1$ мы получаем функцию $\pi_1(s)$, участвующую в (3.1) Далее, тоже используя вероятностное толкование функций $b_k(s)$, по формуле полной вероятности выводим

$$b_k(s) = \sum_{i=0}^{n} \pi_i(s) \int_0^\infty \binom{n}{i} (1 - e^{-\lambda t})^i (e^{-\lambda t})^{n-i} e^{-st} d G_k(t),$$

откуда находим

$$b_k(s) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \pi_i(s) \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \binom{i}{j} g_k[(n - i + j)\lambda + s], \quad k = 1, 2.$$

Подставив сюда выражения для $\pi_i(s)$ от (3.7), после несложных преобразований (подобных тем в [2, гл. 2, § 2]) для $b_k(s)$ выводим окончательные выражения (3.4).

Чтобы доказать часть б) теоремы, необходимо учесть, что $E\pi = -\pi'(s)|_{s=0}$ и после дифференцирования выражения (3.1), использовав (3.2)—(3.5), убедимся в справедливости (3.6). Теорема доказана.

Б. Периодом регенерации процесса обслуживания назовем длину $\varkappa$ интервала времени между любыми двумя последовательными моментами перехода системы в состояние S_0. Ясно, что период регенерации состоит из одного промежутка времени, когда прибор свободен от обслуживания и исправен (простой в S_0) и из следующего после того периода занятости (время пребывания в множестве состояний $\{S_1, S_2, S_{12}, S_{13}, S_3\}$). Пусть $K(x)=P\{\varkappa<x\}$ — ф. р. периода регенерации, а $k(s)$ — её Л. С. преобразование.

Теорема 3. 2: а. Функция $k(s)$ определяется выражением

$$k(s)=\frac{n\lambda}{c+n\lambda+s}[1-\varphi_1(c+n\lambda+s)]\pi_1(s)+\varphi_1(c+n\lambda+s)\,b_1(s) \tag{3.8}$$

$$+\frac{c}{c+n\lambda+s}[1-\varphi_1(c+n\lambda+s)]\,b_2(s)\,.$$

б. Если математические ожидания времен ремонтов и времени обслуживания конечны, то существует $E\varkappa$ и вычисляется по формуле

$$E\varkappa=\frac{[1-\varphi_1(c+n\lambda)](n\lambda E\pi_1+cEb_2+1)}{c+n\lambda}+\varphi_1(c+n\lambda)Eb_1\,, \tag{3.9}$$

где $E\pi_1$, Eb_k определены (3.6) ($E\pi=P_0E\pi_1+P_1Eb_1+P_2Eb_2$).

Доказательство. а. Вводим вспомогательный поток „катастроф" как в доказательстве теоремы 3.1. Тогда $k(s)$ будет вероятностью события B: на периоде регенерации „катастрофа" не произойдет. С другой стороны, событие B равносильно осуществлению одного из трех несовместимых событий: B_0 — одна из n заявок, находящихся в источнике, придет на обслуживание раньше, чем прибор успеет выйти из строя по какому-либо поводу (время простоя в S_0 с последующим переходом в S_3), за это время не наступит „катастрофа" (вероятность этого равна $\frac{n\lambda}{c+n\lambda+s}[1-\varphi_1(c+n\lambda+s)]$), и „катастрофа" не наступит в следующим за этим периоде занятости (вероятность чего равна $\pi_1(s)$), т. е.

$$P(B_0)=\frac{n\lambda}{c+n\lambda+s}[1-\varphi_1(c+n\lambda+s)]\pi_1(s);$$

B_1 — поломка первого типа произойдет раньше, чем успеют произойти поломка второго типа, или приход заявки, или „катастрофа" (вероят-

ность этого равна $\varphi_1(c+n\lambda+s)$), и в последующем периоде занятости типа 1 не наступит „катастрофа“ (вероятность чего равна $b_1(s)$), т. е.

$$P(B_1)=\varphi_1(c+n\lambda+s)\,b_1(s);$$

B_2 — поломка второго типа опередит и поломку первого типа, и приход заявки, и наступление „катастрофы“ (вероятность этого равна $\frac{c}{c+n\lambda+s}[1-\varphi_1(c+n\lambda+s)]$), и „катастрофа“ не произойдет в последующем периоде занятости типа 2 (вероятность чего равна $b_2(s)$), т. е.

$$P(B_2)=\frac{c}{c+n\lambda+s}[1-\varphi_1(c+n\lambda+s)]\,b_2(s).$$

Так как $B=B_0+B_1+B_2$, то $P(B)=P(B_0)+P(B_1)+P(B_2)$ и (3.8) есть не что иное, как это же равенство, записанное через выше найденных выражениях участвующих вероятностей.

Доказательство части б) аналогично доказательству теоремы 3. 1. б).

§ 4. Вероятности макро-состояний системы. Пусть $t_0=0$ является моментом попадания системы в состояние S_0 (начало периода регенерации). Через $P_i(t)/P_{j3}(t)$) обозначим вероятность того, что в момент t система находится в состоянии S_i, $i=0, 1, 2, 3$ (S_{j3}, $j=1, 2$). Пусть $\hat{P}_i(t)(\hat{P}_{j3}(t))$ будут эти же вероятности, однако при условии, что до момента t первый период регенерации все еще не закончен. Соответствующих преобразований Лапласа вышеперечисленных вероятностей обозначим через $P_i^*(s)$, $P_{j3}^*(s)$, $\hat{P}_i^*(s)$, $\hat{P}_{j3}^*(s)$, $i=0, 1, 2, 3$, $j=1, 2$.

Теорема 4. 1: а. Функции $\hat{P}_i^*(s)$, $\hat{P}_{j3}^*(s)$, $i=0, 1, 2, 3$, $j=1, 2$, определяются посредством равенства

$$(4.1)\quad \begin{cases} \hat{P}_0^*(s)=\dfrac{1-\varphi_1(c+n\lambda+s)}{c+n\lambda+s}, \\[2ex] \hat{P}_1^*(s)=\dfrac{[1-g_1(s+n\lambda)]\,\varphi_1(c+n\lambda+s)}{s+n\lambda}, \\[2ex] \hat{P}_2^*(s)=\dfrac{c\,[1-g_2(s+n\lambda)][1-\varphi_1(c+n\lambda+s)]}{(s+n\lambda)(c+n\lambda+s)}, \\[2ex] \hat{P}_{13}^*(s)=\dfrac{\varphi_1(c+n\lambda+s)\{n\lambda[1-g_1(s)]+s[g_1(s+n\lambda)-g_1(s)]\}}{s(s+n\lambda)}, \\[2ex] \hat{P}_{23}^*(s)=\dfrac{c[1-\varphi_1(c+n\lambda+s)]\{n\lambda[1-g_2(s)]+s[g_2(s+n\lambda)-g_2(s)]\}}{s(s+n\lambda)(c+n\lambda+s)}, \\[2ex] \hat{P}_3^*(s)=\dfrac{1}{s}-\sum\limits_{i=0}^{2}\hat{P}_i^*(s)-\sum\limits_{j=1}^{2}\hat{P}_{j3}^*(s). \end{cases}$$

б. Для функций $P_i^*(s)$, $P_{j3}^*(s)$ справедливы соотношения

$$(4.2)\qquad \begin{cases} P_i^*(s)=\dfrac{\hat{P}_i^*(s)}{1-k(s)}, & i=0,\ 1,\ 2,\ 3, \\[2ex] P_{j3}^*(s)=\dfrac{\hat{P}_{j3}^*(s)}{1-k(s)}, & j=1,\ 2. \end{cases}$$

в. Если выполняются условия теоремы 3. 1. б), то существуют пределы $P_i=\lim\limits_{t\to\infty} P_i(t)$, $P_{j3}=\lim\limits_{t\to\infty} P_{j3}(t)$, задающие стационарное распределение макросостояний системы, и эти пределы определяются соотношениями

$$(4.3)\qquad P_i=\lim_{s\downarrow 0} s P_i^*(s),\quad P_{j3}=\lim_{s\downarrow 0} s P_{j3}^*(s).$$

В частности например имеем

$$(4.4)\qquad \begin{cases} P_0=\dfrac{1-\varphi_1(c+n\lambda)}{(c+n\lambda)E\varkappa}, \\[2ex] P_{23}=\dfrac{c\gamma_{21}[1-\varphi_1(c+n\lambda)]}{(c+n\lambda)E\varkappa}. \end{cases}$$

Доказательство. а. Установление верности равенств (4.1) является хорошим упражнением на метод введения дополнительного события [5, гл. IV, § 3] (в случае дополнительные события, это „катастрофы“ вспомогательного потока Пуассона, введенного при доказательстве теоремы 3.1). Любую из величин

$$s\hat{P}_i^*(s)=\int_0^\infty \hat{P}_i(t)\,d(1-e^{-st}),\quad i=0,\ 1,\ 2,\ 3$$

можно считать вероятностью события $\hat{A}_i$: в момент наступления первой „катастрофы“ система находится в состоянии S_i и до этого момента первый период регенерации еще не прошел. Подобное же очевидное объяснение имеют и величины $s\hat{P}_{j3}^*(s)$: это вероятности событий $\hat{A}_{j3}$, что первая „катастрофа происходит еще на первом периоде регенерации, и то в момент, когда система находится в состоянии S_{j3}, $j=1,\ 2$“. Любое из указанных событий разлагается на более элементарных подсобытий и его вероятность удается найти по формуле полной вероятности — таким образом получаются правые стороны (4.1), умноженные на s. К примеру выведем формулу для $\hat{P}_2^*(s)$. Событие $\hat{A}_2$ может осуществиться лишь, когда осуществятся одновременно два независимых событий: $\hat{A}_2'$ — поломка второго типа опередит приход

заявки, поломку первого типа и наступление „катастрофы", вероятность чего есть

$$\int_0^\infty e^{-n\lambda t}[1-F_1(t)]e^{-st}d(1-e^{-ct})=\frac{c}{c+n\lambda+s}[1-\varphi_1(c+n\lambda+s)],$$

$\hat{A}_2''$ — в последующем интервале восстановления второго типа произойдет „катастрофа" в момент, когда в системе все еще не пришли никакие заявки на обслуживание. Вероятность этого есть

$$\int_0^\infty [1-G_2(t)]e^{-n\lambda t}d(1-e^{-st})=\frac{s}{s+n\lambda}[1-g_2(s+n\lambda)].$$

Из равенства $P(\hat{A}_2)=P(\hat{A}_2').P(\hat{A}_2'')$ следует третье равенство (4.1). Таким образом доказываются и остальные равенства. Вывод $\hat{P}^*_{j3}(s)$ можно упростить, если заметить, что $S[\hat{P}^*_j(s)+\hat{P}^*_{j3}(s)]$ является вероятностью события $\hat{B}_j$: первая „катастрофа" происходит на первом периоде регенерации в момент, когда у прибора идет восстановление типа j, $j=1, 2$. Тогда вероятность события $\hat{B}_j$ легко определить (как выше мы поступили с событием $\hat{A}_2$) и из полученного уравнения для $\hat{P}^*_{j3}(s)$, пользуясь известным видом $\hat{P}^*_j(s)$, выводится соответствующее (четвертое или пятое) равенство (4.1). Например, из того, что

$$P(\hat{B}_2)=\frac{c}{c+n\lambda+s}[1-\varphi_1(c+n\lambda+s)][1-g_2(s)]$$

и еще

$$P(\hat{B}_2)=s[\hat{P}^*_2(s)+\hat{P}^*_{23}(s)],$$

выводим пятое из соотношений (4.1). Шестое равенство следует из условия $\sum_{i=0}^{3}\hat{P}_i(t)+\sum_{j=1}^{2}\hat{P}_{j3}(t)=1$.

б. Событие A_i: в момент наступления первой „катастрофы" система находится в состоянии S_i, имеет вероятность $sP^*_i(s), i=0, 1, 2, 3$. Это событие может осуществиться только двумя несовместимыми способами

1. если осуществится $\hat{A}_i$.

2. если на первом периоде регенерации „катастрофа" не произойдет (вероятность этого равна $k(s)$), и „катастрофа" наступит потом

в момент, когда система находится в состоянии S_i (вероятность этого равна $P(A_i)$, так как после момента регенерации весь процесс начинается как бы заново).

Таким образом мы получаем соотношение

$$P(A_i)=P(\hat{A}_i)+k(s)\,P(A_i),$$

откуда, ввиду уже известного $P(\hat{A}_i)=s\hat{P}_i^*(s)$, убеждаемся в верности первых равенств (4.2). Этим же способом доказываются и остальные равенства (4.2).

в. Соотношения (3.4) указывают на возможность применения тауберовых теорем при нахождении пределов $P_i(t)$ и $P_{j3}(t)$ при $t\to\infty$, $i=0, 1, 2, 3$; $j=1, 2$ [см. 4, гл. I, § 9 или 6, гл. XIII]. После соответствующих подсчетов получены (4.4).

§ 5. Число обслуженных заявок. А. Предположим, что $t_0=0$ является моментом начала периода занятости π, причем с вероятностью P_0, P_1, P_2 осуществится одна из его реализаций π_1, b_1, b_2 (вероятности P_i, $i=0, 1, 2$, определены (3.2)). Пусть $\Phi(m, t)$ обозначает вероятность события „во время занятости π будет обслужено ровно m заявок, $m=0, 1, 2, \ldots$, а сам период занятости продлится времени не больше чем t". Соответствующие вероятности для периодов занятости π_i обозначим через $\Phi_i(m, t)$, $i=1, \ldots, n$, а для периодов b_k эти вероятности будут обозначены через $Q_k(m, t)$, $k=1, 2$. Производящие функции вышеперечисленных распределений

$$(5.1)\qquad \Phi(z, t)=\sum_{m=0}^{\infty}\Phi(m, t)\,z^m,\quad \Phi_i(z, t)=\sum_{m=i}^{\infty}\Phi_i(m, t)\,z^m,\quad i=1,\ldots, n;$$

$$Q_k(z, t)=\sum_{m=0}^{\infty}Q_k(m, t)\,z^m,\quad k=1, 2,\quad z\leqq 1$$

определяются однозначно своими Л. С. преобразованиями

$$(5.2)\qquad \Phi(z, s)=\int_0^{\infty}e^{-st}\,d_t\,\Phi(z, t),\quad \Phi_i(z, s)=\int_0^{\infty}e^{-st}\,d_t\,\Phi_i(z, t),$$

$$i=1,\ldots, n;$$

$$q_k(z, s)=\int_0^{\infty}e^{-st}\,d_t\,Q_k(z, t),\quad k=1, 2;\ Re\,s\geqq 0,$$

для которых справедливо следующее утверждение:

Теорема 5.1: а. Для любого $i=1,\ldots,n$ функции $\Phi_i(z, s)$ находятся из соотношений

$$(5.3)\qquad \Phi_i(z,\ s)=\left[\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}U_{l-1}(z,\ s)\right]^{-1}\sum_{l=0}^{n-i}\binom{n-i}{l}U_{l-1}(z,\ s),$$

где положено

$$(5.4)\qquad U_{l-1}(z,\ s)=\begin{cases}\prod\limits_{j=0}^{l-1}\dfrac{1-z\beta(j\lambda+s)}{z\beta(j\lambda+s)} & \text{при } l>0,\\ 1 & \text{при } l=0.\end{cases}$$

б. Для любых ф. р. $G_k(x)$ функции $q_k(z,\ s)$ задаются равенствами

$$(5.5)\qquad q_k(z,\ s)=\left[\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}U_{l-1}(z,\ s)\right]^{-1}\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}U_{l-1}(z,s)g_k(l\lambda+s),$$

$$k=1,\ 2,$$

где функции $U_l(z,\ s)$ те же, что и в а.;

в. Для числа обслуженных заявок на каком-нибудь периоде занятости π верно соотношение

$$(5.6)\qquad \Phi(z,\ s)=P_0\Phi_1(z,\ s)+P_1q_1(z,\ s)+P_2q_2(z,\ s),$$

где числа P_0, P_1, P_2 определены по (3.2).

г. Среднее число обслуженных заявок на любом из периодов занятости вычисляется по формуле

$$(5.7)\qquad \bar{N}=P_0\left[1+\sum_{l=1}^{n-1}\binom{n-1}{l}\prod_{j=1}^{l}\frac{1-\beta(j\lambda)}{\beta(j\lambda)}\right]+\sum_{k=1}^{2}P_k\left[n(1-g_k(\lambda))\right.$$

$$\left.+\sum_{l=2}^{n}\binom{n}{l}\prod_{j=1}^{l-1}\frac{1-\beta(j\lambda)}{\beta(j\lambda)}[1-q_k(l\lambda)]\right]=P_0\bar{N}_0+P_1\bar{N}+P_1\bar{N}_2.$$

Доказательство. Пусть с вероятностью $z\,(0\leqq z\leqq 1)$ каждая обслуженная заявка объявляется красной, независимо от цвета других обслуженных заявок и пусть независимо от работы системы где-то происходит Пуассоновский поток „катастроф" с параметром $s>0$. Тогда функции $\Phi(z,\ s)$, $\Phi_i(z,\ s)$ и $q_k(z,\ s)$ из (5.1)—(5.2) можно рассматривать как вероятности того, что во время соответствующих периодов занятости π, π_i и b_k не наступят „катастрофы" и будут обслужены разве лишь красные заявки.

а. По формуле полной вероятности для вероятностей $\Phi_i(z,\ s)$, $i=1,\ldots,\ n$ выводим систему уравнений

$$(5.8)\qquad \Phi_i(z,\ s)=z\sum_{j=0}^{n-i}\Phi_{i+j-1}(z,\ s)\int_0^\infty\binom{n-i}{j}(1-e^{-\lambda t})^j$$

$$(e^{-\lambda t})^{n-i-j}e^{-st}\,dB(t)$$

(принято считать $\Phi_0(z,\ s)=1$).

Действительно, для того, чтобы осуществилось событие A_i: во время периода занятости π_i не наступят „катастрофы" и будут обслужены только красные заявки (вероятность чего представляется левой стороной (5.8)) необходимо и достаточно одновременное осуществление следующих событий: $A_i'(j)$ — первая обслуженная заявка красная, за время ее обслуживания не наступали „катастрофы" и поступили ровно j новых заявок $j=0,\ 1,\ldots,\ n-i$. Вероятность этого

$$P\{A_i'(j)\}=z\int_0^\infty e^{-st}\binom{n-i}{j}(1-e^{-\lambda t})^j(e^{-\lambda t})^{n-i-j}\,dB(t).$$

$A_i''(j)$ — в начавшемся после ухода первой заявки периоде занятости π_{i+j-1} будут обслужены только красные заявки и не произойдет ни одна „катастрофа". Вероятность этого события

$$P\{A_i''(j)\}=\Phi_{i+j-1}(z,\ s).$$

Поскольку

$$A_i=\sum_{j=0}^{n-i}A_i'(j)\cap A_i''(j)$$

и события $A_i'(j)$ и $A_i''(j)$ независимы, то равенством (5.8) записан всего лишь тот факт, что $P(A_i)=\sum_{j=0}^{n-i}P\{A_i'(j)\}.P\{A_i''(j)\}$.

Далее, с применением подходящего дискретного преобразования (как при выводе $\pi_i(s)$ в [3]) система (5.8) решается и в итоге для функций $\Phi_i(z,\ s)$, $i=1,\ldots,\ n$, получаем (5.3).

б. Формула (5.5) для функций $q_k(z,\ s)$ получается тем же способом, каким мы вывели функции $b_k(s)$ в теореме 3.1.

в. Получается сразу по формуле полной вероятности.

г. Если N_t число обслуженных заявок в периоде занятости при условии, что этот период не дольше t, то известно [5, гл. II, § 1], что

$$\nu(s)=\int_0^\infty e^{-st}\,d\,EN_t=\left.\frac{\partial\Phi(z,\ s)}{\partial z}\right|_{z=1}.$$

Так как $N=\lim\limits_{t\to\infty} E N_t$, то (5.7) легко выводится из остальных результатов теоремы, поскольку еще должно выполняться

$$N=\lim_{s\downarrow 0}\nu(s).$$

Дифференцирование $\Phi_1(z, s)$ и $q_k(z, s)$, $k=1, 2$, по z упрощается, если в равенствах (5.3) (при $i=1$) и (5.5) сперва освобождаемся от выражений в знаменателе.

Через N_0, N_1 и N_2 обозначено среднее число обслуженных заявок на периодах занятости π_1, b_1 и b_2 соответственно.

Б. Рассмотрим теперь число обслуженных заявок N_t до какого-нибудь момента t при единственном условии, что $t_0=0$ является моментом начала периода регенерации. Обозначим через $R(m, t)$ вероятность того, что до момента t обслужено ровно m заявок, $m=0, 1, 2, ..$, а через $R_k(m, t)$ — вероятность того же события, при условии, что в момент t система находится в период занятости типа k (индексы $k=0, 1, 2$ отвечают соответственно периодам π_1, b_1, b_2). Если рассматриваем эти события еще при дополнительном условии, что первый период регенерации продлится времени больше t, то их вероятности будем обозначать через $\hat{R}(m, t)$ и $\hat{R}_k(m, t)$, $k=0, 1, 2$, $m=0, 1, 2\ldots$ Преобразования Лапласа по параметру t от производящих функций вышеперечисленных вероятностных распределений обозначим через $r^*(z, s)$, $r_k^*(z, s)$ и $\hat{r}^*(z, s)$, $\hat{r}_k^*(z, s)$, $k=0, 1, 2$. Если известны эти функции, то принято считать, что распределения уже известны.

Теорема 5.2. а. Функции $\hat{r}_k^*(z, s)$, $k=0, 1, 2$ определены равенствами

$$\hat{r}_0^*(z, s)=\frac{[1-\beta(s)][1-\Phi_1(z, s)]}{s[1-z\beta(s)]}, \tag{5.9}$$

$$\hat{r}_k^*(z, s)=\frac{1}{s}[1-g_k(s)]+\frac{[1-\beta(s)][g_k(s)-q_k(z, s)]}{s[1-z\beta(s)]}, \quad k=1, 2.$$

б. Функция $\hat{r}^*(z, s)$ задается выражением

$$\hat{r}^*(z, s)=\hat{F}_0^*(s)+\frac{n\lambda}{c+n\lambda+s}[1-\varphi_1(c+n\lambda+s)]\hat{r}_0^*(z, s) \tag{5.10}$$

$$+\varphi_1(c+n\lambda+s)\hat{r}_1^*(z, s)+\frac{c}{c+n\lambda+s}[1-\varphi_1(c+n\lambda+s)\hat{r}_2^*(z, s).$$

в. Функция $r^*(z, s)$ определена соотношением

$$r^*(z, s)=\frac{\hat{r}^*(z, s)}{1-k(z, s)}, \tag{5.11}$$

где

$$k(z, s)=\frac{n\lambda}{c+n\lambda+s}[1-\varphi_1(c+n\lambda+s)]\Phi_1(z, s) \tag{5.12}$$

$$+\varphi_1(c+n\lambda+s)q_1(z, s)+\frac{c}{c+n\lambda+s}[1-\varphi_1(c+n\lambda+s)]q_2(z, s)$$

преобразование Лапласа — Стилтьеса производящей функции $K(z, t)$ числа обслуженных заявок в одном периоде регенерации при условии, что этот период меньше t. Функции $\Phi_1(z, s)$, $q_k(z, s)$, $k=1, 2$ определены теоремой 5.1. а), б).

г. Среднее число обслуженных заявок EN_t при $t\to\infty$ удовлетворяет асимптотическому равенству

$$EN_t\sim\frac{t}{E\varkappa}N, \tag{5.13}$$

где N определено теоремой 5.1 г).

Доказательство. Вводя тех же дополнительных событий, которыми мы пользовались в доказательстве теоремы 5.1, получаем возможность толковать

$$s\hat{r}^*(z, s)=\int_0^\infty\left[\sum_{m=0}^\infty\hat{R}(m, t)z^m\right]d(1-e^{-st}), \quad s>0, \ 0\leqq z\leqq 1,$$

как вероятность события $\hat{A}$: в момент наступления первой „катастрофы“ первый период регенерации еще не закончил и до этого момента все обслуженные заявки были красными. Подобное очевидное толкование допускают и функции $s\hat{r}_k^*(z, s)$, $sr^*(z, s)$ и $sr_k^*(z, s)$, $k=0, 1, 2$, которое имеет место при $s>0$, $0\leqq z\leqq 1$.

а. Доказательство равенств (5.9) производится в точности так, как доказательство соответствующих выражений для этих же характеристик СМО типа $M|G|1$ с бесконечным источником (см. [1] или [5 стр. 228]).

б. После умножения (5.10) на s получим равенство, которое выводится сразу же с применением теоремы сложения вероятностей. Необходимо иметь в виду, что каждое слагаемое в правой части представляет собой вероятность одной из четырех возможностей осуществления события $\hat{A}$.

в. Доказательство (5.11) проводится аналогично доказательству теоремы 4.1. б).

г. Соотношение (5.13) получается с применением тауберовой теореме [5, 6] из асимптотического равенства

$$\frac{\partial r^*(z, s)}{\partial z}\Big|_{z=1} = \int_0^\infty e^{-st} E N_t \, dt \sim \frac{1}{s^2} \frac{\bar{N}}{E\varkappa}, \quad s \to 0.$$

§ 6. Длина очереди. Как и до сих пор, предположим, что в момент $t_0=0$ система начинает работу, когда все заявки находятся в источнике, а прибор свободен от обслуживания и исправен. Пусть ν_t обозначает число заявок у прибора в момент времени t. Величина ν_t включает обслуживаемую и все ожидающие заявки, т. е. если $\nu_t=m$, то в источнике имеется равно $n-m$ заявок. Положим $P(m, t)=P\{\nu_t=m\}$, $m=0, \ldots, n$. Вероятности события $\{\nu_t=m\}$, при условии, что в момент t система находится в период занятости типа k и идет обслуживание некоторой заявки, обозначим через $P_k(m, t)$, $k=0, 1, 2$. Если добавить еще условие, что первый период регенерации продлится больше времени t, тогда вероятность события $\{\nu_t=m\}$ в перечисленных случаях будем обозначать соответственно через $\hat{P}(m, t)$ и $\hat{P}_k(m, t)$, $k=0, 1, 2$, $m=0, 1, \ldots, n$. Эти распределения величины ν_t считаются известными, если известны преобразования Лапласа от соответствующих им производящих функций, т. е. если известны

$$P^*(z, s)=\int_0^\infty e^{-st}[E z^{\nu_t}]\,dt=\int_0^\infty e^{-st}\left[\sum_{m=0}^{n} P(m, t) z^m\right] dt,$$

$$P_k^*(z, s), \ \hat{P}^*(z, s) \ \text{и} \ \hat{P}_k^*(z, s), \ k=0, 1, 2.$$

При $0 \leqq z \leqq 1$ и $s>0$ эти функции имеют простое вероятностное толкование, например $sP^*(z, s)$ будет вероятностью события „в момент наступления первой „катастрофы“ все ожидающие заявки и обслуживаемая являются красными“.

Теорема 6.1. а. Функции $\hat{P}_k^*(z, s)$, $k=0, 1, 2$, определяются выражениями

$$\hat{P}_k^*(z, s)=\sum_{j=0}^{n-1} z^{n-j}(1-z)^j a_k(j, s)\frac{1-\beta(j\lambda+s)}{j\lambda+s}, \tag{6.1}$$

где

$$a_k(j, s)=\frac{1}{[1-\beta(j\lambda+s)]V_{j-1}(s)}\left[\sum_{l=0}^{j}\binom{\psi}{l}V_{l-1}(s)\,g_k(l\lambda+s)\right. \tag{6.2}$$

$$\left.-b_k(s)\sum_{l=0}^{j}\binom{n}{l}V_{l-1}^{(s)}\right].$$

Здесь положено $g_0(l\lambda+s)=1$; $b_0(s)=\pi_1(s)$; $\psi=\begin{cases} n-1 & \text{при } k=0 \\ n & \text{при } k=1,\ 2, \end{cases}$ а функции $V_{l-1}^{(s)}$ определены (3.5).

б. Функция $\hat{P}^*(z,\ s)$ задается равенством

$$(6.3)\qquad \hat{P}^*(z,\ s)=\hat{P}_0^*(s)+\frac{n\lambda}{c+n\lambda+s}\,[1-\varphi_1(c+n\lambda+s)]\,\hat{P}_0^*(z,\ s)$$

$$+\varphi_1(c+n\lambda+s)[\hat{P}_1^*(z,\ s)+\hat{P}_{G_1}^*(z,\ s)]+\frac{c}{c+n\lambda+s}\,[1-\varphi_1(c+n\lambda$$

$$+s)][\hat{P}_2^*(z,\ s)+\hat{P}_{G_2}^*(z,\ s)],$$

где обозначено

$$(6.4)\qquad \hat{P}_{G_k}^*(z,\ s)=\sum_{m=0}^{n}{}' z^m\binom{n}{m}\sum_{i=0}^{m}{}'(-1)^i\binom{m}{i}\frac{1-g_k[(n-m+i)\lambda+s]}{(n-m+i)\lambda+s},$$

$$k=1,\ 2.$$

в. Функция $P^*(z,\ s)$ определена соотношением

$$(6.5)\qquad P^*(z,\ s)=\frac{\hat{P}^*(z,s)}{1-k(s)}.$$

г. Если среднее время обслуживания и средние времена ремонта конечны, то при $t\to\infty$ сл. в. ν_t стремится по распределению к сл. в. ν с производящей функцией

$$(6.6)\qquad P(z)=Ez^{\nu}=\lim_{s\downarrow 0}sP^*(z,\ s)=\frac{1}{E\varkappa}\left\{\frac{1-\varphi_1(c+n\lambda)}{c+n\lambda}\right.$$

$$+\sum_{k=0}^{2}{}' P_k\left[\hat{P}_{Gk}^*(z,\ 0)+z^n\beta_1 N_k\right.$$

$$+\sum_{j=1}^{n-1}{}'\frac{z^{n-j}(1-z)^j[1-\beta(j\lambda)]}{j\lambda\beta(j\lambda)}\left(\prod_{u=1}^{j}\frac{\beta(u\lambda)}{1-\beta(u\lambda)}N_k\right.$$

$$\left.\left.\left.+\sum_{l=1}^{j}\prod_{u=l}^{j}\frac{\beta(u\lambda)}{1-\beta(u\lambda)}\left[\binom{\varphi}{l}g_k(l\lambda)-\binom{n}{l}\right]\right)\right]\right\};\quad \hat{P}_{G_0}^*(z,\ 0)\equiv 0.$$

Математическое ожидание $E\nu$ находится по формуле

$$E\nu=\frac{1}{E\varkappa}\left\{P_0\left[\bar{N}_0\left(n\beta_1-\frac{1}{\lambda}\right)+\frac{1}{\lambda}\right]\right. \tag{6.7}$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{2}P_k\left[\bar{N}_k\left(n\beta_1-\frac{1}{\lambda}\right)-\frac{n}{\lambda}(g_k(\lambda)-1)+\bar{\alpha}_k\right]\right\},$$

где положено

$$\bar{\alpha}_k=\frac{d}{dz}\hat{P}^*_{G_k}(z,\ 0)\Big|_{z=1} \tag{6.8}$$

$$=\sum_{m=1}^{n}{}' m\binom{n}{m}\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}\frac{1-g_k[(n-m+i)\lambda]}{(n-m+i)\lambda},\qquad k=1,\ 2.$$

Доказательство. а. Выражения (6.1) и (6.2) получены из результатов книги Джейсуола [2, гл. 2].

б. Соотношение (6.3) выводится по теореме сложения вероятностей (как в теореме 5.2 б)). При $s>0$, $0\leqq z\leqq 1$, величина $s\hat{P}^*_{G_k}(z,\ s)$ дает вероятность события: „катастрофа“ наступает на первом периоде регенерации в момент, когда прибор восстанавливается после поломки типа k, $k=1,\ 2$, и все ожидающие заявки красные. Выражение (6.4) получается легко по формуле полной вероятности.

в. Равенство (6.5) доказывается как теорема 4. 1. б).

г. Следует из теоремы непрерывности [5, гл. XIII] и из равенства

$$E\nu=\frac{d}{dz}Ez^{\nu}\Big|_{z=1}.$$

§ 7. Время ожидания. Пусть сл. в. w_t обозначает время, которое ждала бы заявка до начала своего обслуживания, если придет в момент t. Через $W(x,\ t)$ обозначим ф. р. величины w_t и пусть

$$w(s,\ t)=Ee^{-sw_t}=\int_0^\infty e^{-sx}d_xW(x,\ t).$$

Функция $\omega(s,\ t)$ считается известной, если известно ее преобразование Лапласа по t

$$\omega^*(s,\ \tau)=\int_0^\infty e^{-\tau t}\omega(s,\ t)\,dt.$$

Иногда величину w_t называют виртуальным временем ожидания.

Пусть $t_0=0$ является моментом начала периода регенерации. Тогда вышеуказанные характеристики времени ожидания в момент t при условии, что первый период регенерации продлится больше времени t, будем обозначать соответственно через $\hat{w}_t$, $\hat{W}(x, t)$, $\hat{\omega}(s,t)$ и $\omega^*(s,\tau)$. Если $t_0=0$ является моментом начала периода занятости типа k и этот период продолжит дольше времени t, то соответствующее виртуальное время ожидания в момент t при условии, что в этот момент идет некоторое обслуживание, будем обозначать через $\hat{w}_{kt}$, а его распределение и производящие функции будут обозначены через $\hat{W}_k(x, t)$, $\hat{\omega}_k(s, t)$ и $\hat{\omega}_k^*(s, \tau)$, $k=0, 1, 2$ (напомним, что $k=0$ соответствует периоду занятости π_1, а $k=1, 2$ — периодам занятости b_k, начинающиеся с восстановлений типа k).

Имеет место следующее утверждение:

Теорема 7. 1: а. В области $\operatorname{Re} s \geqq 0$, $\operatorname{Re} \tau \geqq 0$ функция $\omega^*(s, \tau)$ определяется равенством

$$(7.1)\qquad \hat{\omega}^*(s, \tau)=\hat{P}_0^*(\tau)+\frac{n\lambda}{c+n\lambda+\tau}[1-\varphi_1(c+n\lambda+\tau)]\hat{\omega}_0^*(s, \tau)$$

$$+\varphi_1(c+n\lambda+\tau)[\hat{\omega}_1^*(s, \tau)+\hat{\omega}_{G_1}^*(s, \tau)]+\frac{c}{c+n\lambda+\tau}[1-\varphi_1(c+n\lambda$$

$$+\tau)][\hat{\omega}_2^*(s, \tau)+\hat{\omega}_{G_2}^*(s, \tau)],$$

где положено

$$(7.2)\qquad \hat{\omega}_k^*(s, \tau)=\frac{1}{\beta(s)}\sum_{j=0}^{n-1}[\beta(s)^{n-j}[1-\beta(s)]^j a_k(i, \tau)\frac{\beta(j\lambda+\tau)-\beta(s)}{s-j\lambda-\tau},$$

$$k=0, 1, 2;$$

$$(7.3)\qquad \hat{\omega}_{G_k}^*(s, \tau)$$

$$=\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}[\beta(s)]^m\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}\frac{g_k[(n-m+i)\lambda+\tau]-g_k(s)}{s-\tau-(n-m+i)\lambda},\quad k=1, 2.$$

Величины $a_k(i, \tau)$ определены теоремой 6.1; $\hat{P}_0^*(\tau)$ — теоремой 4.1. а);

б. Функция $\omega^*(s, \tau)$ определена соотношением

$$(7.4)\qquad \omega^*(s, \tau)=\frac{\hat{\omega}^*(s, \tau)}{1-k(\tau)},$$

где $k(\tau)$ определена теоремой 3.2.

в. Если $\beta_1<\infty$ и $\gamma_{k1}<\infty$, $k=1, 2$, то существует предел $W(x)=\lim\limits_{t\to\infty} W(x, t)$, являющийся ф. р. по x. Преобразование Лапласа — Стилтьеса функции $W(x)$ задается выражением

$$(7.5)\qquad \omega(s)=P_0+\frac{1}{E\varkappa}\sum_{k=0}^{2}P_k\Bigg\{N_k[\beta(s)]^{n-1}\frac{1-\beta(s)}{s}+\hat{\omega}^*_{G_k}(s, 0)$$

$$+\frac{1}{\beta(s)}\sum_{j=1}^{n-1}[\beta(s)]^{n-j}[1-\beta(s)]^j\frac{\beta(j\lambda)-\beta(s)}{(s-j\lambda)\beta(j\lambda)}\Bigg[\prod_{u=1}^{j}\frac{\beta(u\lambda)}{1-\beta(u\lambda)}N_k$$

$$+\sum_{l=1}^{j}\prod_{u=l}^{j}\frac{\beta(u\lambda)}{1-\beta(u\lambda)}\left(\binom{\psi}{l}g_k(l\lambda)-\binom{n}{l}\right)\Bigg]\Bigg\};\quad \hat{\omega}^*_{G_0}(s, 0)=0.$$

г. Если второй момент β_2 времени обслуживания конечен, то существует $w=\int\limits_0^\infty x\,d\,W(x)$ и имеет вид

$$(7.6)\qquad w=\frac{1}{E\varkappa}\sum_{k=0}^{2}P_k\Bigg\{N_k\beta_1\Bigg[(n-1)\beta_1-\frac{1}{\lambda}+\frac{\beta_2}{2\beta_1}$$

$$+\frac{n-\psi g_k(\lambda)}{\lambda\overline{N}_k}\Bigg]+\mu_k\Bigg\},$$

где для краткости положено

$$(7.7)\qquad \mu_k=-\frac{d\,\hat{\omega}^*_{G_k}(s, 0)}{ds}\Bigg|_{s=0}$$

$$=\sum_{m=1}^{n}m\binom{n}{m}\beta_1\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}\frac{\gamma_{k1}\lambda(m-n-i)-g_k[(n-m+i)\lambda]+1}{\lambda^2(n-m+i)^2},$$

$$k=1, 2;\quad \mu_0=0,$$

величины $\overline{N}_k$ определены в теореме 5.1. г), а $\psi=\begin{cases} n-1 & \text{при } k=0,\\ n & \text{при } k=1, 2.\end{cases}$

Доказательство. а. Предположим, что независимо от функционирования системы происходят два независимых Пуассоновских потока „s-катастроф“ и „τ-катастроф“ с параметрами $s>0$ и $\tau>0$ соответственно. Тогда величину

$$\tau\omega^*(s,\ \tau)=\int_0^\infty \hat{\omega}(s,\ t)\,d(1-e^{-\tau t})$$

можно рассматривать как вероятность события $\hat{A}$: первая „τ-катастрофа“ наступает в момент, когда первый период регенерации еще не закончен и в следующем (начиная с этого момента) виртуальным временем ожидания не наступит ни одна „s-катастрофа“. Такой вероятностный смысл имеют и функции $\tau\hat{\omega}_k^*(s,\ \tau)$, $k=0,\ 1,\ 2$, а также и функция $\tau\omega^*(s,\ \tau)$.

Обозначим через $\tau\hat{\omega}_{G_k}^*(s,\ \tau)$ вероятность события $\hat{B}_k$: первая „τ-катастрофа“ наступит на первом периоде регенерации в момент, когда прибор восстанавливается после поломки типа k ($k=1,\ 2$) и в следующем (начиная с момента „τ-катастрофы“) виртуальном времени ожидания не наступит „s-катастрофа“.

Теперь формула (7.1) выводится легко. Если умножим обе стороны (7.1) на τ, то в полученном равенстве слева будет стоять вероятность события $\hat{A}$, а справа — сумма вероятностей всех шести возможностей осуществления события $\hat{A}$.

По формуле полной вероятности можно найти еще одно выражение для вероятности события $\hat{B}_k$:

$$P(\hat{B}_k)=\int_0^\infty\left[\int_0^u \sum_{m=0}^{n}{}' \binom{n}{m}(1-e^{-\lambda t})^m(e^{-\lambda t})^{n-m}\,[\beta(s)]^m e^{-s(u-t)}\,d(1-e^{-\tau t})\right]dG_k(u)$$

$$=\tau\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}[\beta(s)]^m\sum_{i=0}^{m}{}'(-1)^i\binom{m}{i}\frac{g_k[(n-m+i)\lambda+\tau]-g_k(s)}{s-\tau-(n-m+i)\lambda},\quad k=1,2,$$

из которого выводим равенство (7.3). Формулы (7.2) для $\hat{\omega}_k^*(s,\ \tau)$ получаются на базе результатов Джейсуола [2, гл. II] для СМО с конечным источником.

б. Доказывается как теорема 4.1. б).

в. Следует из теоремы непрерывности на основе соотношения

$$\lim_{\tau \downarrow 0} \tau \omega^*(s, \tau) = \omega(s),$$

где $\omega(s)$ определена равенством (7.5), и из того, что $\lim_{s \downarrow 0} \omega(s) = 1$.

г. Выводится после соответствующих подсчетов из равенства

$$w = -\left.\frac{d\,w(s)}{ds}\right|_{s=0}.$$

Функция $W(x)$ задает распределение времени ожидания до начала обслуживания какой-нибудь заявки, потребовавшей обслуживание в стационарном режиме работы системы.

§ 8. Обсуждение результатов. Рассмотренная в предыдущих параграфах система достаточно общая. Многие другие системы обслуживания могут быть изучены всего лишь с подходящим сведением к этой.

А. Отметим, что если во всех предыдущих результатах положим $c=0$, $\varphi_1(s)=0$, то мы получим результаты для системы обслуживания с конечным источником и надежным прибором. Эти результаты будут совпадать с полученными Джейсуолом [2, гл. II], причем из § 5 следуют новые, по крайней мере нам неизвестные до сих пор результаты.

А 1. Если положить только $c=0$, то получится система обслуживания, чей прибор не имеет поломки первого типа. Таким образом мы выведем результаты, справедливые для СМО с конечным источником и ненадежным прибором, с общим распределением $F_1(x)$ времени „жизни" прибора в свободном состоянии. Частный случай этих результатов, когда $F_1(x)=1-e^{-cx}$, будет совпадать с результатом для системы, котороя получится, если в системе с двумя типами отказов $c>0$, но $\varphi_1(s)=0$.

Б. Заметим, что изученная нами система может применяться с успехом при исследовании однолинейных СМО с приоритетами и ненадежным прибором. Для примера рассмотрим систему с двумя источниками. Источник заявок первого вида бесконечен, так что входящий поток этих заявок Пуассоновский с параметром $\sigma>0$. Источник заявок второго вида конечен и имеет свойства источника, описанного в § 2. Прибор ненадежен в свободном состоянии.

Б 1. Предположим, чс заявки первого вида обладают абсолютным приоритетом перед заявками второго вида (в присутствии заявки первого вида заявка второго вида не может быть обслуживана). Требуется найти характеристики процесса обслуживания заявок второго вида.

Ответ на этот вопрос дается легко, если располагаем результатами § 2—§ 7. Во-первых, необходимо модифицаровать распределение времени обслуживания заявок второго типа: вместо обычного распределения взять для $B(x)$ распределение времени блокировки прибора от одной заявки второго вида. Эти времена блокировки определяются в зависимости от принятой дисциплины обслуживания после прерывания (см. [5], гл. V). Потом следует принять приход заявки первого вида на свободный от обслуживания и исправный прибор за поломку второго

типа, т. е. в наших результатах нужно положить $c=\sigma$, (т. е. $F_2(x) = 1-e^{-\sigma x}$). Временем восстановления прибора после такой „поломки" надо назвать период занятости прибора с обслуживанием заявок первого вида. Его ф. р. $\Pi(x)$ определена например в [5], гл. VII, так что положим $G_2(x)=\Pi(x)$. Необходимо отчитывать, однако, еще одну деталь этого процесса: во время восстановления прибора после обычного выхода из строя в систему могут поступить заявки первого вида, и прибор еще на некоторое время останется недоступным для заявок второго вида. Поэтому распределение времени ремонта прибора тоже следует поменять на модифицированное (новый ремонт равен периоду занятости системы с бесконечным источником и с опозданием, равным времени обычного ремонта прибора). Лишь теперь процесс обслуживания заявок второго вида сведен к процессу в системе с конечным источником и прибором е двумя типами отказов. Характеристики такого процесса нам уже известны.

Если первый источник тоже конечен (с параметрами n_1, λ_1), то при вышеописанном сведении к рассмотренной системе достаточно изменить только параметры c и $G_2(x)$. В случае $c=n_1\lambda_1$, а вместо функции $G_2(x)$ необходимо взять распределение $\Pi(x)$ периода занятости системы с этим же источником и абсолютно надежным прибором. Модификация же времени ремонта имеет распределение как у периода занятости b_2 (см. § 2) прибора с обслуживанием заявок первого источника.

Б 2. Предположим, что прибор обслуживает несколько источников, занумерованные числами 1, 2, ..., r. Заявки источника с меньшим номером обладают абсолютным приоритетом перед заявками источников с большими номерами. Если нас интересуют только характеристики обслуживания заявок k-го источника, то их можно получить, считая появление заявки более высокого приоритета в свободный прибор как „поломка" второго типа (интенсивность таких „поломок" будет $c=n_1\lambda_1+\ldots+n_{k-1}\lambda_{k-1}$, где n_i — число заявок в i-том источнике, а $1-e^{-\lambda_i x}$ — ф. р. времени пребывания заявки в нем). Время восстановления прибора после такой „поломки" будет равняться периоду занятости обслуживанием заявок приоритета выше k. После подходящей модификации времени обслуживания заявок k-ого потока и модификации времени обычного ремонта прибора (из-за недоступности прибора еще на некоторое время после ремонта, поскольку тогда могут прийти заявки более высокого приоритета чем k), характеристики обслуживания вызовов k-ого источника будут получены как частный случай результатов § 2—§ 7.

Заметим, что таким образом (сведением к обслуживанию с ненадежным прибором) можно получить еще характеристики приоритетных СМО в случае чередования приоритетов [5, гл. IX, § 7] как с конечными, так и с бесконечными источниками.

ЛИТЕРАТУРА

1. Даниелян, Э. А., Димитров, Б. Н.: О системе $M\ G\ 1$ с ожиданием и двумя типами отказов. Mathematica Balkanica, т. 2 (1972), 21—37.
2. Джейсуол, Н.: Очереди с приоритетами. „Мир", Москва, 1973.
3. Димитров Б. Н., Карапенев Х. К.: Една система на обслужване с краен източник и ненадежден прибор. Годишник ВТУЗ, т. IX, кн. 1, София, 1973, 173—186.
4. Климов Г. П.: Стохастические системы обслуживания. „Наука", Москва, 1966.
5. Обретенов, А., Димитров, Б. Н., Даниелян, Е.: Масово обслужване и приоритетни системи на обслужване. „Наука и изкуство", София, 1973.
6. Феллер, В.: Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. II. „Мир", Москва, 1967.

Поступила 24. XI. 1973 г.

QUEUEING SYSTEMS WITH A FINITE SOURCE AND NONRELIABLE SERVER

B. Dimitrov, Ch. Karapenev

(SUMMARY)

A queueing system with one server and a finite source with n calls is considered. It is supposed that if a call needs service, it leaves the source and stays in a queue to the server. After serving every call goes back immediately to the source. The call remains in the source an exponentially distributed random time with parameter $\lambda>0$. The serving times are equally distributed and have distribution function $B(x)$. If not busy, the server can fail and the failures are of two types. When during a time interval t there are no calls, the failure is of the first (second) type with probability $F_1(t)\,(F_2(t)=1-e^{-ct})$. After a failure of type k the server is blocked during a random time with distribution function $G_k(x)$, $k=1, 2$. All the random variables above are independent. The call coming to the idle and ready server will be served immediately, otherwise it remains there until the end of the repair and the serving of all earlier calls.

In the paper the following more important characteristics of the queueing process are studied: the busy time of the server; the number of calls in the queue; the number of successive servings in a finite time interval; the waiting time of the calls. Results for the nonstationary process as well as for the stationary one are given. The method used is the method of complementary events [4, 5]. Possibilities for applying this model to priority queues are discussed.